

## 용탕유동과 응고를 고려한 주조공정의 유한요소해석

윤석일\*, 김용환\*\*

### Finite Element Analysis of Casting Processes Considering Molten-Metal Flow and Solidification

Suck-Il Yoon\* , Yong Hwan Kim\*\*

#### ABSTRACT

Finite element analysis tool was developed to analyze the casting process. Generally, casting process consists of mold filling and solidification. Both filling and solidification process were simulated simultaneously to investigate the effects of process variables and to predict the defect. At filling process, thermal coupling was especially considered to investigate thermal history of material during the filling stage. And thermal condition at the final stage of filling is used as the initial conditions in a solidification process for the exact simulation of the actual casting processes. At mold filling process, Lagrangian-type finite element method with automatic remeshing scheme was used to find the material flow. A perturbation method with artificial viscosity is adopted to avoid numerical instability in low viscous fluid. At solidification process, enthalpy-based finite element method was used to solve the heat transfer problem with phase change. And elastic stress analysis has been performed to predict the thermal residual stress. Through the FE analysis, solidification time, position of solidus line, liquidus line and thermal residual stress are found. Through the study, the importance of combined analysis has been emphasized. Finite element tools developed in this study will be used process design of casting process and may be basic structure for total CAE system of castings which will be constructed afterward.

**Key Words** : FEM(유한요소법), Casting (주조), CAE(컴퓨터원용공학), Molten metal flow (용탕유동), Combined analysis (연결해석)

#### 1. 서 론

금속의 주조(casting)는 각종 재료가공 방법 중에서 그

역사가 가장 오래되며 그 활용범위가 일상 생활용품에서 부터 고정밀 기계요소에 이르기까지 매우 넓다. 최근 들어 연속주조(continuous casting), Die casting,

\* LG화학 기술연구원  
\*\* 충남대 기계설계공학과

Squeeze casting, Investment casting, Strip casting, Twin-roll casting 등의 각종 정밀주조법의 개발로 재료손실을 최소화하면서 정밀하고 복잡한 형상의 부품의 주조가 가능하게 되었다. 그럼에도 불구하고 현재까지 국내의 실정은 주조 공정의 설계가 주로 경험에 의거하여 수행되어 왔고, 이에 따라 고정도의 주조 부품의 생산에 많은 어려움을 가지고 있는 실정이다. 좋은 주조설계는 최소의 비용으로 최종제품이 원하는 성질을 갖도록 하는 것이다. 이를 위해서는 재료 및 공정 전체에 대한 광범위한 연구를 필요로 하고, 공동, 기포, 수축공동, 변형, 치수불량 등의 발생 가능한 결함을 예측하여 방지할 수 있도록 하여야 한다.

일반적으로 주조 공정은 용해된 재료를 형안에 주입하는 단계와 주입된 주물을 응고시켜 필요한 형상을 얻는 두 단계로 구분할 수 있으며, 효과적인 공정설계를 위해서는 재료 및 공정 전체에 대한 광범위한 연구가 필요하다. 현재 이러한 공정 해석에 가장 널리 사용되는 방법은 수치적인 모의시험이다. 이런 수치적인 해석을 통하여 주조시 재료의 유동 및 응고시 열전달에 관련된 정보를 얻을 수 있다. 이러한 공정 해석을 통한 공정설계는 종래의 경험이나 실험에 의한 공정설계에 비해 제반 공정변수의 영향을 정확히 알 수 있고, 또한 주조시의 결함을 정확히 예측할 수 있어 제품설계기간을 줄이고, 보다 정확한 공정설계를 가능하게 하여 준다.

주조공정 해석에 수치적인 방법이 본격적으로 사용된 지난 20년 동안 이 분야에 대한 연구는, 주로 재료의 유동을 고려하지 않고 주물의 응고시 상변화를 포함한 열전달 해석 및 그에 따른 열응력의 해석에 그 주안점을 두고 이루어져 왔다. 응고해석시 가장 문제가 되는 것은 응고잠열의 처리로서 이를 해결하기 위해 엔탈피법(Enthalpy method), 등가비열법(Equivalent specific heat method), 온도회복법 등이 쓰이고 있으며, 이 중에서도 엔탈피법<sup>(1)</sup>은 가장 안정적이고, 취급이 용이한 장점을 가지고 있어 널리 사용되고 있다. 그러나 단순한 응고해석은 주입시 재료의 유동이 완전하다고 가정함으로써, 유동에 의한 결함이 없고 응고 시작 시에 전체 영역에서 재료의 성질이 일정하다는 가정 하에서 해석이 행하여졌기 때문에 복잡한 형상을 가진 주조에는 그 적용이 어려울 뿐 만 아니라, 공정설계에서 가장 중요한 탕구계의 설계에는 아무런 정보를 제공하지 못한다는 결함을 가지고 있다. 또한 실제 주입이 끝난 시점에서 주물 내의 온도 분포는 일정하지 않고, 심지어 주입 중에도 주형과의 접촉면에서 이미 응고가 시작되어 이것이 최종제품에 결함(frozen skin)으로 남는 경우도 있고 유동에도 영향을

줄 수 있기 때문에<sup>(2)</sup>, 응고해석 만으로는 정확한 공정설계가 불가능하다 할 수 있다. 따라서 탕구계 설계를 위한 충전시 유동해석이 활발히 진행되어 왔는데, 기존의 수치기법은 주로 유한차분법(FDM)에 기초를 둔 MAC, SMAC, VOF등이며, 자유표면을 추적하기 위한 별도의 계산이 요구되고 복잡한 형상에 대해서는 적용이 쉽지 않은 단점이 있다<sup>(4)</sup>. 최근에 들어선 유한요소법을 이용한 유동해석이 활발히 진행되고 있는데 운동학적 기술방법에 따라 Lagrangian기법과 Eulerian기법으로 구분될 수 있으며 용탕 충전 문제와 같이 자유표면(Melt front)의 정보가 중요한 문제에서는 Remeshing기법을 이용한 Lagrangian기법이 효용도가 높다<sup>(5)</sup>. 또한 최근에는 충전시 유동과 열해석을 동시에 수행하고 순차적으로 응고시 열해석을 수행하여 공정전체에 대한 통합적인 CAE 시스템을 구성하려는 연구가 진행되고 있다.<sup>(6,7)</sup>

전술한 바와 마찬가지로 용탕 충전시 유동해석은 그 자체로 주입시의 결함을 예측할 수 있어 riser 등의 gating system의 설계에 가장 필요한 정보를 제공할 수 있으며 열해석을 포함한 유동해석은 정확한 응고해석을 위한 초기조건을 제공하기 때문에 그 두 가지를 동시에 연계하여 해석하는 것이 바람직하다고 하겠다. 또한 유동해석은 용탕의 주입속도, 주입시간, 초기 용탕온도 등의 가장 필수적인 공정변수에 대한 정보를 제공한다.

따라서 본 연구는 주조시 용탕 주입의 단계와 주입완료 후의 응고의 과정을 서로 연계하여 실제 적용 가능성을 갖는 주조공정 해석용 CAE 시스템을 개발하는 것을 주목적으로 한다. 본 논문에서는 해석시스템의 개발과 관련한 이론 전개와 프로그램 작성 및 검증을 수행하여 해석시스템의 타당성을 보였다. Fig. 1은 개발된 CAE 시스템의 개략도를 보여준다.

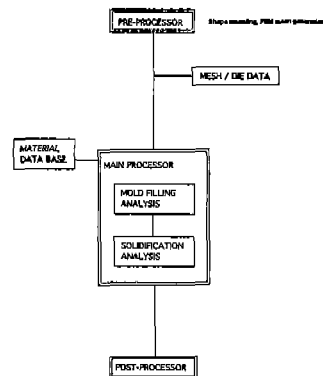


Fig. 1 CAE system for process design of precision casting

## 2. 유한요소정식화

### 2-1. 재료유동에 대한 유한요소 정식화

2차원 등방성, 비압축성 유체에 대해 운동방정식과 비압축성 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\rho Dt \frac{d\bar{v}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho \bar{g} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

본 연구에서 사용되는 Lagrangian 수식화에서 재료도 함수  $\frac{D\bar{v}}{Dt}$  는

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (3)$$

로 표시되며, 이는 Eulerian 수식화에서처럼 비선형의 대류항(convective term)을 필요로 하지 않아 훨씬 간단한 수식화가 가능케 된다.

위의 수식에 대한 경계조건은 다음과 같다.

자유표면에서  $\sigma \bar{n} = \bar{\tau}$

주형과의 경계에서  $\bar{v} = 0$  또는  $\sigma \bar{n} = \bar{\tau}_f$  (4)

주입구에서  $\bar{v} = \bar{v}_i$  또는  $\sigma \bar{n} = p \bar{n}$

여기서  $\bar{n}$  은 표면에 수직인 단위벡터이며,  $\bar{\tau}$  는 주어진 표면력 (대기압, 표면장력),  $\bar{\tau}_f$  는 주형과의 접촉면에서의 마찰력을 의미한다. 주형과의 경계조건에서 점성유체의 경우에는 고착조건을 사용하여야 하나, 수치해석 상의 어려움으로 저점성유체의 경우와 응고된 이후에는 마찰조건을 사용하였다. 경계영역에서 주형과 재료와의 접촉시 마찰은 Norton-Hoff 법칙을 따르는 다음 식을 이용한다<sup>(3)</sup>.

$$\bar{\tau}_f = -\alpha K \left| \Delta \bar{v}_t \right| \left| \Delta \bar{v}_t \right|^{1-p} \quad (5)$$

여기서  $\Delta \bar{v}_t$  는 주형에 대한 재료의 상대속도이며,  $\alpha, p$  는 주어지는 상수값이다. 재료가 뉴턴 유체일 경우  $p$  는 1로 주어진다. 주입구에서의 조건은 용탕의 주입속도나, 주입압력으로 주어진다.

용융금속 주입시 재료의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma = -pI + \sigma' = -pI + 2K(\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{m-1} \dot{\epsilon} \quad (6)$$

여기서 재료의 강도계수,  $K$  는 온도의 함수로  $K = K_0 \exp(\beta/T)$  로 표시되며,  $m$  은 변형률속도경화지수이다. 만약 재료가 뉴턴 유체일 경우는  $m$  이 1로 주어지며  $K$  는 재료의 등점성계수가 되며, 지배 방정식은 Navier-Stokes 방정식이 된다. 본 연구에서는 용탕의 경우에는 뉴턴유체로 가정하였으며, 응고된 이후에는 식 (6)의 멱급수법칙을 따른다고 가정하였다. Lagrangian 수식화를 사용하고, 뉴턴유체의 경우에는 전체 강성방정식이 선형이 된다. 하지만 유동중 상변화가 일어나 고상과 액상이 동시에 존재하면 강성방정식은 비선형이 되어 Newton-Raphson 방법으로 해를 구하였다.

비압축성 조건을 벌칙항으로 처리하여 압력항을 독립변수에서 제거하면(8), 식 (1-6)에 해당하는 다음과 같은 범함수를 구할 수 있고 주어진 문제는 다음의 범함수를 최소화하는 문제로 변환된다.

$$\Phi_{total}(v) = \Phi_\rho + \Phi_K + \Phi_\lambda - \Phi_g - \Phi_\tau - \Phi_\alpha \quad (7)$$

여기서

$$\Phi_\rho = \int \rho \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} d\Omega \quad (\text{관성항})$$

$$\Phi_K = \int \frac{K}{m+1} (\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{m+1} d\Omega \quad (\text{점성항})$$

$$\Phi_\lambda = \int \lambda (\nabla \cdot \bar{v})^2 d\Omega \quad (\text{벌칙항})$$

$$\Phi_g = \int \rho \bar{g} \cdot \bar{v} d\Omega \quad (\text{중력항})$$

$$\Phi_\tau = \int \bar{\tau} \cdot \bar{v} dS \quad (\text{외력항})$$

$$\Phi_\alpha = \int \frac{\alpha K}{p+1} \left| \Delta \bar{v}_t \right|^{p+1} dS \quad (\text{마찰항})$$

식(7)을 최소화하는 일반적인 유한요소 이산화 과정에 의해 다음과 같은 강성방정식을 구할 수 있다.

$$[M]\{\dot{V}\} + [M]\{V\} = \{F\} \quad (8)$$

상미분방정식 (8)을 풀기 위해 아래와 같은 Newmark 시간적분법<sup>(8)</sup>을 사용한다.

$$V_{t+\Delta t} = V_t + \Delta t \left\{ \beta \frac{dV_{t+\Delta t}}{dt} + (1-\beta) \frac{dV_t}{dt} \right\} \quad (9)$$

여기서  $\beta$  는 Explicit/implicit Parameter 이다. 식 (9)를 사용하면 식 (8)은 다음과 같은 방정식계가 된다.

$$\left\{ \frac{1}{\beta \Delta t} [M] + [K] \right\} V_{t+\Delta t} = \{F\} + \frac{1}{\beta} [M] \left\{ \frac{1}{\Delta t} V_t + (1-\beta) \frac{dV_t}{dt} \right\} \quad (10)$$

이 식은 시간  $t$ 에서의 기지의 함수로부터 시간  $t + \Delta t$ 에서의 속도장  $V_{t+\Delta t}$ 를 구하는 방정식계이다. 식(10)으로부터 속도장을 계산한 후 변형후의 새로운 영역이 다음 식에 의해 계산된다.

$$\Omega_{t+\Delta t} = \Omega_t + \Delta t \{V_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \frac{dV_{t+\Delta t}}{dt} \right\} \quad (11)$$

식 (7)에서 벌칙상수  $\lambda$ 는 점성의 변화에 대해 비압축성조건을 보다 효과적으로 적용하기 위하여

$$\lambda = 10^5 \text{Max}(1, \rho / K\beta\Delta t) \quad (12)$$

를 사용하였다<sup>(5)</sup> 유한요소의 구성은 6절점 삼각형요소를 사용하였으며, 수치적분에는 벌칙항은 3점 적분을, 나머지 항은 7점 적분을 수행하였다.

주조시 용융금속은 낮은 점도와 높은 밀도를 갖게 되어 높은 레이놀즈 수(  $\approx 10^5 \sim 10^6$ )로 인한 수치적 불안정성을 갖게 된다. 유체문제에 주로 사용된 Eulerian 유한요소법에서는 이런 수치적 문제를 해결하기 위해 upwinding scheme이나 Petrov-Galerkin기법을 사용하나<sup>(6)</sup> Lagrangian 기법을 유체문제에 적용할 경우는 대류항의 부재로 다른 효과적인 수치기법이 필요하다. 이를 위해 기존의 Zero equation model<sup>(9)</sup>과 근사한 형태

를 갖는 가상점도  $K_{rot}$ 를 통한 Regularization model을 이용하였다<sup>(5)</sup>. 이 기법은 속도장의 와도(vorticity)를 조절함으로써 Lagrangian수식화에 따른 요소의 수치적 회전을 제한하는 방법으로 다음의 범함수를 최소화하는 방법을 사용한다.

$$\Phi_r = \int_{\Omega} K_{rot} (\nabla \times \bar{v}) \cdot (\nabla \times \bar{v}) d\Omega \quad (13)$$

본 기법에서 가장 문제가 되는 것은  $K_{rot}$  값의 설정이다. 이러한  $K_{rot}$  도입이 난류유동에 의한 가상점도를 추가하는 것과 같은 효과를 갖고 있으므로 이 값은 유체의 변형과 혼합길이(mixing length)에 의해 결정된다고 가정할 수 있다. 본 연구에서는 시간  $t$ 에서 속도장을 구한 후 다음 시간대  $t + \Delta t$ 에서  $i$  번째 절점에서의  $K_{rot}$  값을 다음으로 표현된다고 가정하였다.

$$K_i^{t+\Delta t} (rot) = K_0 \left[ \frac{(\nabla \times v_i)}{\max((\nabla \times v_i) \cdot i)} \right] (tr(D : D))^{1/2} \quad (14)$$

식 (10)을 풀어 속도장을 구한 후 적분점에서 변형률속도텐서와 편차응력을 구한다.

벌칙법에서 압력항은 요소에서 다음의 식으로 구해질 수 있다.

$$p = -\lambda K (\nabla \cdot \bar{v}) \quad (15)$$

식 (15)의 압력값은 요소 내에서의 평균값으로 주어지며, 벌칙법의 특성 상 절점에서 연속이지 못하며 충분히 정확한 값을 가지지 못한다. 따라서 절점에서의 압력 값을 구하기 위해 최소자승법을 사용하여 압력값을 재계산하였다<sup>(10)</sup>. 압력값,  $p$ 는 식 (6)을 식 (1)에 대입한 다음의 식을 만족하여야 한다.

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} - \nabla \cdot \sigma' - \rho \bar{g} + \nabla p = 0 \quad (16)$$

식 (16)은 최소자승법의 개념을 도입하여 다음의 범함수를 최소화하는 것으로 근사될 수 있다.

$$III(P) = \int_{\Omega} \left[ \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} - \nabla \cdot \sigma' - \rho \bar{g} + \nabla p \right]^2 d\Omega \quad (17)$$

식 (17)의  $III(P)$  를 최소화하여 절점에서의 압력값을 구한다.

2-2. 상변화를 포함한 열전달에 대한 유한요소 정식화  
주어진 영역에 대해 열 평형 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{Q} \quad \text{in } \Omega \quad (18)$$

식 (18)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{자유표면에서} \quad -k\nabla T \cdot \bar{n} = h_f(T - T_f)$$

$$\text{주형과의 경계에서} \quad -k\nabla T \cdot \bar{n} = h_w(T - T_w) \quad (19)$$

$$\text{주입구에서} \quad T = T_i$$

여기서  $\bar{n}$  은 표면에 수직인 단위벡터이며,  $h_f, h_w$  는 각각 자유표면과 주형벽에서의 상당열전달계수이며,  $T_f, T_w$  는 각각 자유표면과 주형벽에서의 외부온도이다. 자유표면에서는 식(19)로 표시되는 자연대류만을 고려하였으며, 복사나 유동에 의한 대류는 고려하지 않았다. 일반적인 유한요소정식화 과정을 통해 강성방정식은

$$[C]\{\dot{T}\} + [D]\{T\} = \{Q\} \quad (20)$$

이 되며, Newmark method를 사용하여 시간적분을 수행하여 매 시간 대에서의 온도분포를 구한다<sup>(9)</sup>.

응고시 상변화 문제를 해결하기 위해, 잠열효과(Latent heat effect)를 고려할 수 있는 수치해법이 필요하다. 유한요소법을 상변화문제에 응용할 때의 문제점은 열용량의 효과적인 근사화인데, 가장 일반적이고 안정된 기법은 엔탈피법이다. 시간의 함수인 열용량은 상변화 온도 근처에서 불연속적인 함수가 되어 수치적인 어려움이 발생한다. 이를 해결하기 위해 온도에 대한 열용량의 적분 물리량, 엔탈피를 다음과 같이 정의하여 사용한다<sup>(1,2,11,12)</sup>.

$$H(T) = \int_{T_0}^T \rho c \, dT \quad (21)$$

절점에서의 열용량  $\rho c$  는

$$\rho c = \frac{\partial H}{\partial T} = \frac{[(\partial H / \partial x)^2 + (\partial H / \partial y)^2]^{1/2}}{[(\partial T / \partial x)^2 + (\partial T / \partial y)^2]^{1/2}} \quad (22)$$

로 근사되었다<sup>(2)</sup>. 응고시 재료의 미시적 변화는 포함하지 않았다.

2-3. 응고시 열응력해석에 대한 유한요소정식화

응고시 잔류 열응력을 계산하기 위해 비연계 해석기법<sup>(13)</sup>을 이용한다. 응고시 변형이 매우 미소하고 열전달과 변형과정이 비연계될 수 있다고 가정하면 온도분포가 단순한 열전달식에서 구해질 수 있으며, 구해진 온도장에 의한 초기응력의 작용에 의한 변형을 구할 수 있다.

응고시 재료를 단순한 등방성 탄성모델로 가정하였으며 재료의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma = D_e \varepsilon - \sigma^i \quad (23)$$

여기서  $D_e = D_e(T)$  는 온도의 함수로 주어지는 탄성계수행렬,  $\varepsilon$ 는 총변형률,  $\sigma^i$  는 초기응력이다. 초기응력은 변형 전에 주어진 응력으로 열에 의한 효과에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma^i = \frac{E\alpha(T - T_0)}{(1 - 2\nu)} I \quad (24)$$

일반적인 유한요소 정식화 과정에 따라 다음과 같은 유한요소 강성방정식을 얻을 수 있다.

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (25)$$

여기서 K는 강성행렬, R은 하중벡터로서

$$[K] = \int_{\Omega_e} B^t D_e B d\Omega_e$$

$$\{R\} = \int_{\Omega_e} B^t \sigma^i d\Omega_e + \int_{\Omega_e} f^t N d\Omega_e$$

이며,

$$u = \sum_i N_i(\xi, \eta) U_i$$

$$u = \sum_i B_i(\xi, \eta) U_i$$

이다.

2-4. 격자재구성기법(Remeshing technique)

용탕주입시 Lagrangian 유한요소법은 격자의 찌그러짐(distortion)이 심할 경우 해의 질저하가 일어나고 이에 따른 효율적인 격자재구성기법이 요구된다. 본 연구에서는 삼각분할법중 가장 대표적인 Delaunay 삼각분할법<sup>(14-16)</sup>을 이용하여 구격자(old mesh)의 경계절점(boundary node)으로부터 새로운 격자를 생성하는 방법을 이용하였다.

매 시간단계에서 대변형에 의해 요소의 자코비안 값이 음의 값을 갖게 되거나, 주형과 접촉하여 현재의 격자가 경계를 정확히 구현하지 못하고 간섭이 생기는 경우 격자재구성을 수행하였다. 격자재구성의 과정은 우선 주어진 경계절점이 정확한 경계를 표현할 수 있도록 기존의 경계에서 경계절점의 조정을 수행하고, Delaunay 삼각분할 과정에 따라 내부격자를 생성하고 필요한 격자 정보를 계산한 다음, 아래 식에 따라 구격자에서 신격자로 상태변수의 이동을 행한다.

$$S(X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{N_b} \frac{S(X_o^i)}{d(X_n; X_o^i)}}{\sum_{i=1}^{N_b} \frac{1}{d(X_n; X_o^i)}} + 1 \tag{26}$$

여기서  $X_o^i (i=1, N)$ 는 새로운 요소망의 절점  $X_n$ 에 인접한 구요소망의 절점,  $N_b$ 는 인접한 절점갯수,  $d(X_n; X_o^i)$ 는  $X_n$ 과  $X_o^i$  사이의 거리이다.

본 기법에서는 요소의 점침의 문제는 아직 해결되지 않은 상태이며, 이를 위한 이론 및 알고리즘은 추후로 연구되어야 한다.

2-5. 유동과 열전달이 연계된 문제의 계산순서

주조공정의 해석은 용탕의 유동과 유동 중의 열전달과 상변화가 서로 연계된 열-유동 문제이다. 이를 효과적으로 해결하기 위하여 단계별로 유동과 열전달을 분리하여 해석을 수행하였으며, 그 계산 순서는 다음과 같다

용탕의 주입공정의 매 시간단계에 대해

- 1) 단계의 초기시간,  $t$ , 에 대해 열적, 기계적 물성치

를 계산한다.

- 2) 속도장에 대한 강성방정식, (8) 또는 (10)을 풀어 다음 시간대,  $t + \Delta t$ 에서의 속도장을 구한다.

- 3) 식 (11)에 의해 새로운 영역을 계산한다.

- 4) 변형을 속도, 편차응력을 계산한다.

- 5) 식(17)을 풀어 절점에서의 압력값을 계산한다.

- 6) 온도장에 대한 강성방정식, (20)을 풀어 시간  $t + \Delta t$ 에서의 온도장을 구한다.

- 7) 상변화 여부를 결정하고 필요한 기계적, 열적 물성치를 계산한다.

- 8) 요소망재구성 여부를 결정하여, 필요시 요소망을 재구성한다.

위의 과정을 충전이 완료될 때까지 시간단계에 따라 반복적으로 수행한다. 주입완료시의 최종 온도분포는 데이터전달에 의해 응고해석의 초기치로 사용된다.

응고공정에 대해

- 1) 단계의 초기시간,  $t$ , 에 대해 열적, 기계적 물성치를 계산한다.

- 2) 온도장에 대해 강성방정식, (20),을 풀어 온도장을 구한다.

- 3) 주어진 온도장에 대하여 열응력을 구하고, 이에 따른 변위량을 구한다.

위의 과정을 응고가 완료될 때까지 시간단계에 따라 반복적으로 수행한다.

3. 수치결과 및 고찰

3-1. 유동해석 프로그램 검증에 위한 예제

본 재료 유동에 대한 유한요소 수식화와 프로그램의 타당성을 검증하기 위해 평행한 두 판 사이의 유체 유동에 대한 해석을 실시하였다. 경계조건은 점성유체에 대해 고착(Stick) 조건을 사용하였으며, 해석해와의 비교를 통해 프로그램을 검증하였다.

Fig. 2 에 주어진 초기 형상의 유체에 대해 해석을 수행하였다. 주어진 재료 물성치는 동점성 계수(kinematic

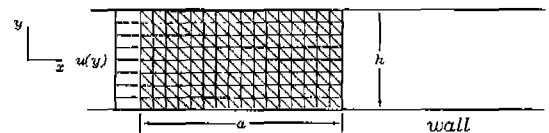


Fig.2 Initial material shape of Poiseuille flow problem

viscosity) 가 0.001 m<sup>2</sup>/sec으로 주어지며 자유표면에서의 대기압은 0 Pa으로 주어졌다. 주입면에서의 속도는 중앙에서 0.5 m/sec로 주어지는 다음과 같은 2차 함수의 형태로 주어졌다.

$$U(y) = U_o(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}), \quad U_o = 0.5m/s \quad (27)$$

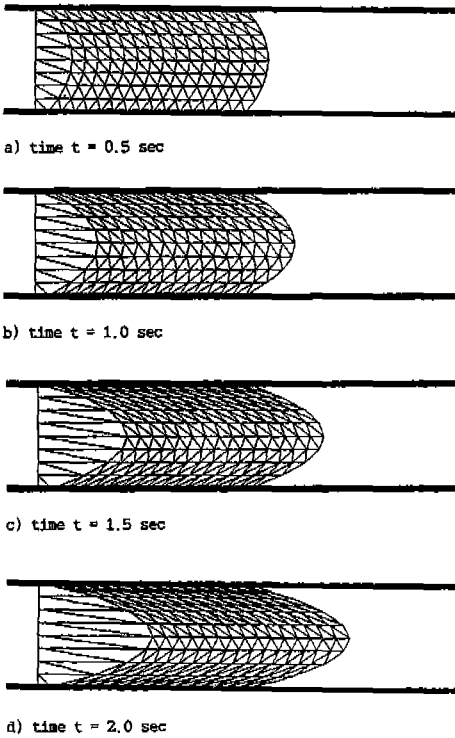


Fig.3 Deformed shape of material at various filling time of a)t=0.5, b)1.0,c)1.5,and d)t=2.0sec. (case of Poiseille flow using stick condition)

Fig. 3에 시간에 따른 유체의 변형 형상이 보여지고 있다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 유동장은 중앙에 대해 대칭인 정상상태의 값을 취하고 있으며 벽에서 유체가 고정되어 시간 변화가 지속되어도 유체가 벽을 따라 진행하지 못하는 양상을 볼 수 있다. Fig. 4에서 시간에 따른 압력장의 값을 볼 수 있으며 재료의 선단(자유표면) 과 주입면을 제외하고 선형변화의 형태를 취하고 있어 유동장의 형태가 정상상태의 일차원 유동형태를 취하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 5에서 1 차원 정상상태에서의 압력구배(dp/dx)의 해석치와 본 수치계산값을 비교하였다. 해석치와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

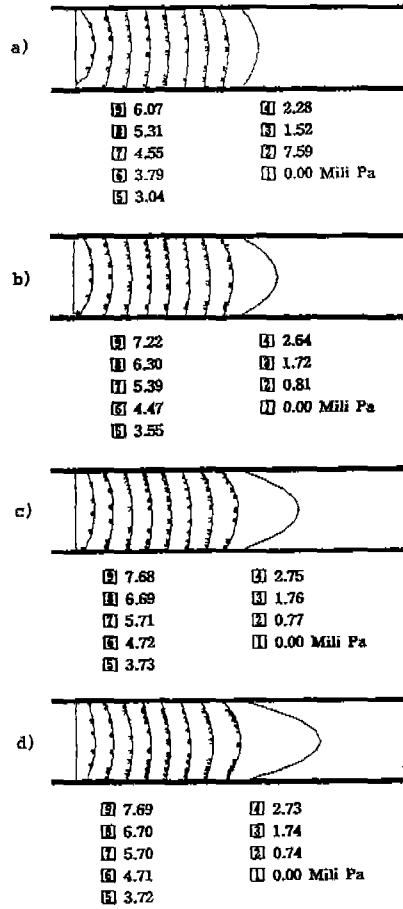


Fig.4 Variation of pressure distribution with various filling time of a) t=0.5, b)1.0, C)1.5, and d)t=2.0 sec. (case of Poiseille flow using stick condition)

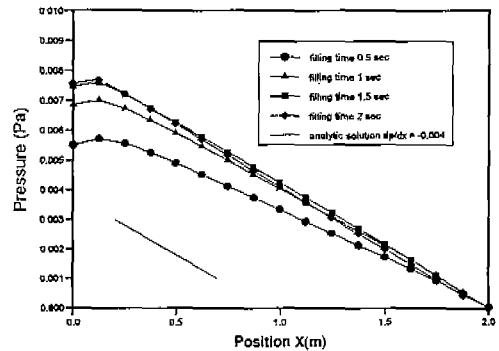


Fig.5 Variation of pressure distribution showing that the pressure gradient approaches to the analytic solution for steady state (case of Poiseille flow using stick condition)

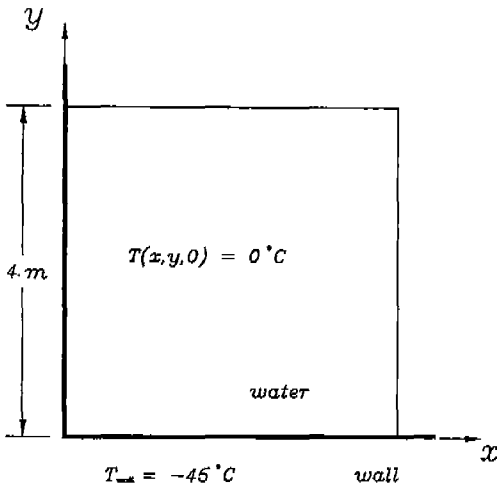


Fig. 6 Initial configuration of two-dimensional Stefan problem

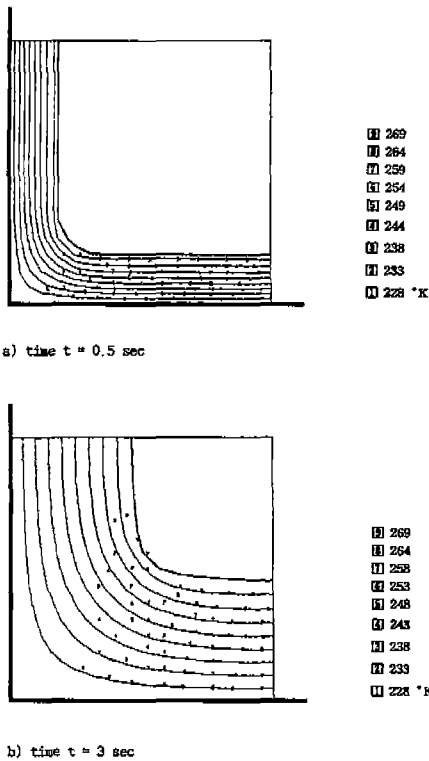


Fig. 7 Temperature distribution and solidus line at time step of a)  $t = 0.5$  and b) 3 sec. (2-D Stefan problem)

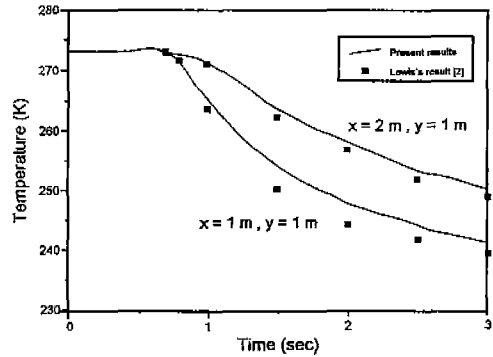


Fig. 8 Temperature distributions at  $x=1, y=1$  and  $x=2, y=1$  (2-D Stefan problem)

### 3-2 상변화 열전달 해석 프로그램 검증을 위한 예제

전술한 상변화 열전달 유한요소 프로그램의 타당성을 검증하기 위해 응고해석의 대표적인 문제인 2 차원 Stefan 문제를 본 프로그램을 이용하여 해석을 수행하였다.

스테판문제는 응고해석의 가장 기초가 되는 문제로서 얼음과 물 사이의 상변화 현상에 관한 문제이다. Fig. 6에서 볼 수 있듯이 초기온도  $0^{\circ}\text{C}$ 의 사각형 형상의 물기둥이  $x = 0$  면과  $y = 0$  면의 온도가  $-45^{\circ}\text{C}$ 로 냉각될 때의 응고과정에 대해 해석을 수행하였다. 이때 사용된 재료 물성치는 Lewis<sup>[2]</sup>의 결과와 비교하기 위해 Lewis의 물성치를 그대로 사용하였고, 그 값은 고상, 액상 두 상에 대해 열용량  $\rho C$ 는  $1\text{J/m}^3$ 이고 열전도도  $k$ 는  $1.08\text{W/m}^{\circ}\text{K}$ 이며 잠열  $L$ 은  $70.26\text{J/m}^3$ 이다. 실제 스테판 문제는 특정한 온도  $0^{\circ}\text{C}$ 에서 상이 변하지만, 수치상 처리의 어려움 때문에 어느 정도의 작은 온도 구간에서 상이 변화한다고 가정하여 계산하였는데 상변화의 온도구간이 너무 적으면 수치적 불안정이 증가하고 너무 크면 정확한 상변화 현상을 표현하기 어렵게 된다. 본 해석에서는 상변화구간  $\Delta T$ 은  $1^{\circ}\text{C}$ 로 주었다. Fig. 7에서 시간 0.5 초, 3 초에서의 온도 분포와 상변화면을 살펴볼 수 있다. 시간의 경과에 따라 고상선(solidus line)이 모서리로 접근해 가는 양상을 살펴 볼 수 있으며 온도분포도 완만한 곡선을 띠고 있어 매우 안정한 결과임을 보여주고 있다. Fig. 8에서는 위치  $x = 2, y = 1$ 과  $x = 1, y = 1$ 에서의 온도분포를 보여주고 있으며 Lewis의 결과와 비교하였다. 약간의 오차를 보이지만 거의 일치함을 볼 수 있으며 본 프로그램이 상변화 문제의 해결에 좋은 적용성을 갖고 있음을 보여주고 있다.



### 3-3. Aluminum semi-solid casting

개발된 주조공정 해석용 유한요소 프로그램의 적용성을 보이기 위해 Fig. 9에 보인 알루미늄 주조시 주입과 응고를 동시에 고려한 공정해석을 수행하였다. 주입시 유동 해석과 상변화 열전달 해석이 수행되었으며 해석을 통하여 유동 특성과 주입시간 및 주입시 용융금속의 온도분포, 액상선, 고상선의 위치, 그리고 주입 완료시의 주물의 온도분포를 구하여 응고해석의 초기조건으로 사용하였다. 또한 응고시 상변화 열전달 해석과 탄성 열응력 해석이 수행되었으며 이를 통하여 정확한 고상선의 위치 및 응고 완료 시간과 응고 완료시 재료의 수축과 잔류 열응력에 대한 정보를 구하였다. 용탕의 주입을 고려하지 않고 단순한 응고 해석을 수행하였을 때의 응고시간 및 온도분포를 전 공정해석의 결과와 비교하였으며 주입시 주형의 열적 조건이 용융금속의 온도분포에 미치는 영향에 대해 살펴보았다. 해석에 사용한 재료는 알루미늄 합금으로 물성치는 참고문헌<sup>[17]</sup>에 있다.

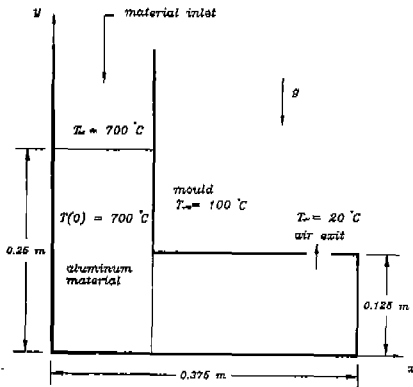


Fig. 9 Configuration of aluminum alloy casting

#### 3-3-1. 주입과 응고를 고려한 전 공정해석

Fig. 10, 11, 12는 시간에 따른 재료의 주입과정과 속도장, 온도장을 보여주고 있다. Fig. 10에서 보듯이 시간증가에 따라 재료주입이 이루어지고 있음을 볼 수 있으며, 각 시간 단계에서의 재료의 변형형상을 보여주고 있다. 또한 자유표면의 위치변화를 알 수 있는데 이는 격자 재구성기법을 이용한 Lagrangian 유한요소법이 주조시 재료유동문제에 적용 가능함을 보인다. Fig. 11에서는 각 시간단계에서의 속도장을 나타내고 있어 주입시 유동양상을 살펴볼 수 있다. Fig. 12는 각 시간단계에서의 온도

장을 나타내고 있는데, 주형과의 열전달로 인하여 재료의 온도강하가 이루어지고 있음을 볼 수 있다. 그러나 그 영향은 빠른 주입시간으로 인하여 그다지 크지 않음을 알 수 있다. 재료 주입이 완료될 때까지의 시간은 3.16 sec이다. Fig. 12의 온도장 분포에서 볼 수 있듯이 주형부위에서의 온도강하를 볼 수 있으며, 이는 순차적으로 이루어지는 응고해석에 영향을 미치고 있었다. 주입 완료시의 최종 온도분포는 데이터 전달을 통하여 응고 해석의 초기조건으로 사용되었다.

주입이 완료된 후 상변화를 고려한 열전달 해석과 열응력 해석이 수행되었다. 재료의 주입면은 더 이상 존재하지 않으며, 왼쪽 상단은 공기와의 열전달이 이루어지게 된다. 주형의 온도와 공기의 온도, 각각의 대류열전달 계

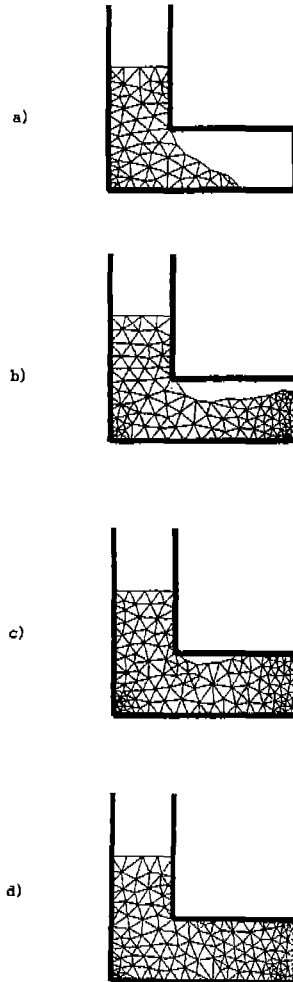


Fig. 10 Mold filling of material in various time steps : a)  $t = 0.25$ , b)  $1.0$ , c)  $1.75$ , and d)  $3.0$  sec

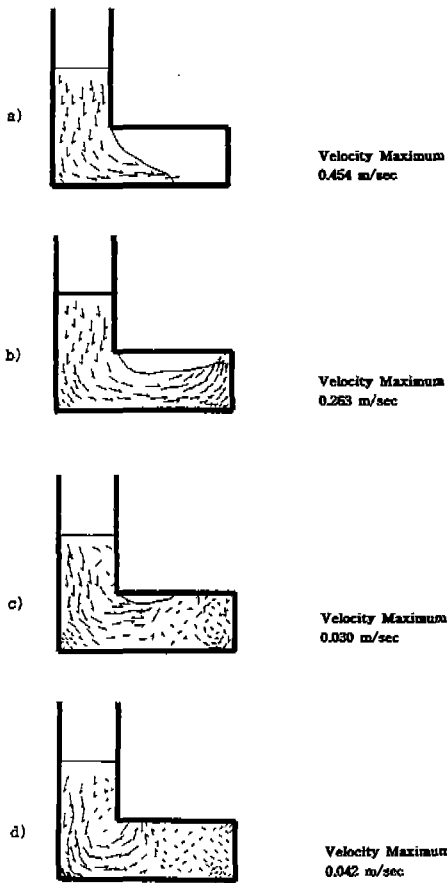


Fig. 11 Velocity fields of material in various time steps :  
a)  $t=0.25$ , b) 1.0, c) 1.75, and d) 3.0 sec

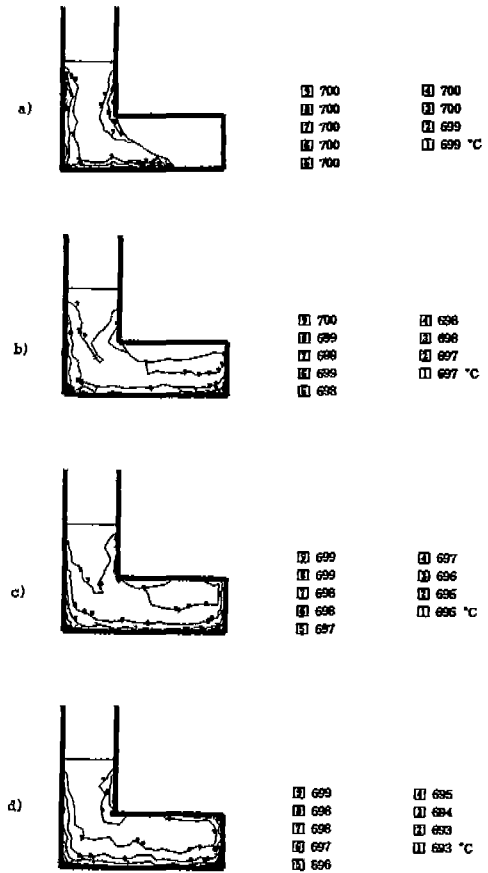


Fig. 12 Temperature fields of material in various time steps : a) 0.25 b) 1.0 c) 1.75 d) 3.0 sec

수는 주입시와 동일하다. Fig. 13은 응고해석을 통해 얻어진 주물의 온도분포이다. 주형으로부터 열전달이 이루어져 응고가 외부에서 내부로 이루어지고 있음을 볼 수 있다. 그림에서 보여지는 굵은 선은 액상선과 고상선을 나타내고 있으며 액상선이 외곽부위는 고상과 액상이 공존하는 mushy 영역이다. 고상선이 점차적으로 주물 내부로 진행하여 시간 2133.16 초에 응고가 완료되어, 그 이후에는 순수한 고상에서의 열전달만 이루어지게 된다. 이 응고 시간은 재료의 주입 완료시간을 합산한 시간으로 전 공정 완료시간이다.

Fig. 14는 응고 완료시의 재료 형상과 주응력의 분포를 보여주고 있다. 왼쪽 상단과 중앙 상단의 재료가 열전달과 중력에 의해 수축되고 있으며 특히 중앙상단에서는 주형과의 변위 조건에 의해 큰 압축응력이 작용하고 있

며, 그 양쪽으로는 양끝 단에서의 x 방향 변위 구속으로 인해 대칭적인 인장응력으로 바뀌고 있음을 볼 수 있다. 계산결과에서 알 수 있듯이 응력수치는 이미 항복응력을 초과하고 있어 최종 응고 완료 전에 소성역에 도달하고 있음을 알 수 있으며, 이는 본 해석에 사용된 탄성모델이 현실적인 잔류응력을 예측하기에는 부족하며 실제 응고 시 발생가능한 점소성거동을 표현할 수 있는 정확한 모델링이 요구되며 이는 추후로 연구되어야 할 사항이다.

주입과 공정을 모두 포함한 공정 소요 시간이 2133.16 초이고 주입에 소요된 시간은 3.16초이므로 실제적으로 주입 완료시간은 전 공정에 비해 상당히 작으며, 이와 같은 짧은 주입시간으로 인하여 주물의 온도분포도 용융시 재료온도에서 큰 폭으로 변하지 않기 때문에 응고해석에도 크게 영향을 주지 않음을 알 수 있다. 하지만 기존의

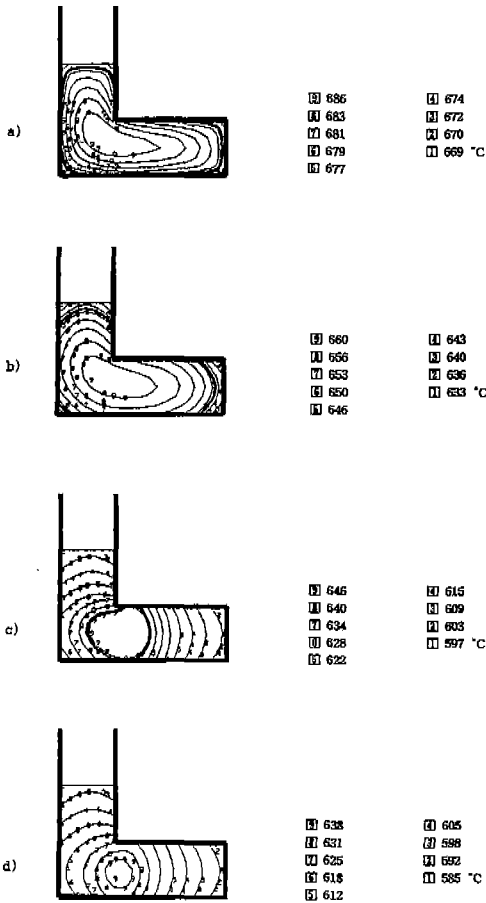


Fig.13 Temperature distribution of aluminum casting in various time steps : a) 103.16 b)1403.16 c) 2003.16 d) 2133.16 sec

단순한 응고해석에서 고려하지 않은 주입시의 유동 및 열의 연계 해석과 이에 기초한 응고과정의 공정해석은 전체적인 구조공정을 보다 정확히 구현하였다는 점에서 우선 그 의미가 크며, 실 공정 설계시 정확한 설계를 가능케 할 수 있는 해석도구로서 그 활용도도 클 것으로 생각된다. 또한 실 주조시 주형의 재질이나 주위 조건에 따라 대류 열전달 계수나 냉각변수등과 같은 주형의 열적조건의 변화에 따라 주입시 재료의 온도가 용융시와 크게 달라질 수도 있으므로 본 도구가 정확한 공정해석과 설계에 유용한 도구가 될 수 있으리라 생각된다. 하지만 개발된 CAE 시스템의 검증은 아직 미비한 상태이며 적절한 실험모델과의 비교를 통해 본 시스템의 한계와 보완 부분에 대한 연구가 추후로 더 진행되어야 할 것이다.

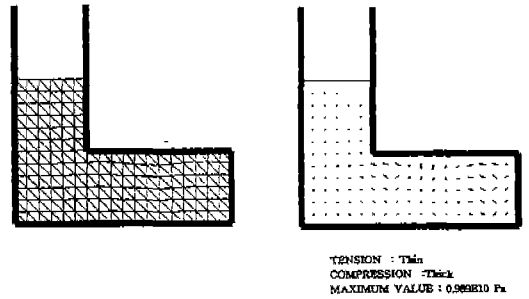


Fig.14 Deformation of casted part and distribution of principal stress after completion of solidification.

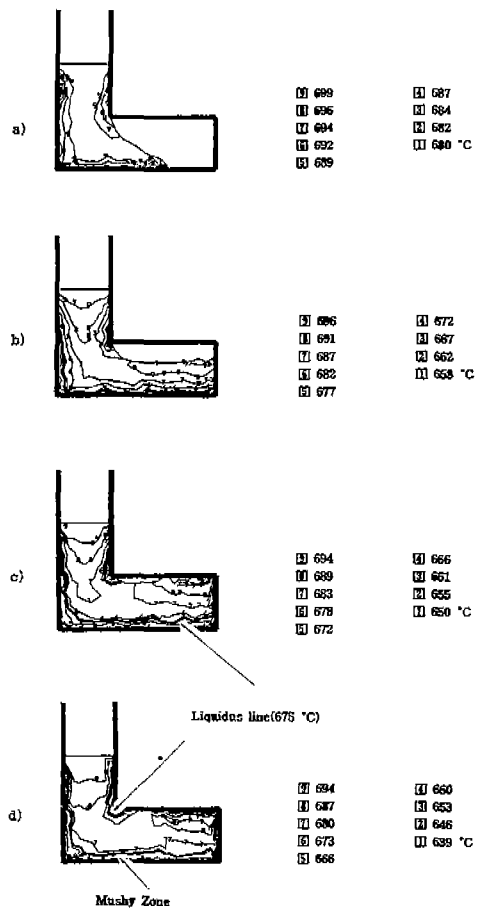


Fig.15 Temperature distribution of casting analyzed at the effect of die heat convection coefficient at time of a) 0.25, b) 1.0, c) 1.75, and d) 3.0 sec.

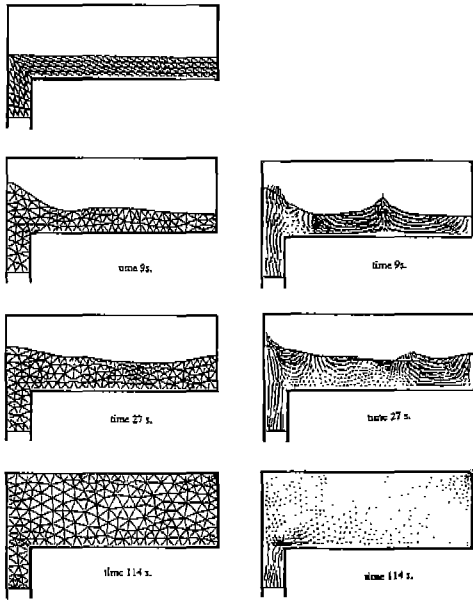


Fig.16 Variation of FE mesh and velocity profiles at different filling time for the steel plate casting problem.

3-3-2 주형의 열적 조건의 영향

주형의 열적 조건에 따라 주입시 용탕의 온도분포의 변화 및 주입완료시 주물의 온도분포를 살펴보았다. Fig. 9에 주어진 것과 같은 형상, 같은 재료물성치를 사용하였고, 주형의 열적 조건을 달리하여 주형의 대류 열전달 계수를  $10000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  으로 설정하여 주형과의 열전달 효과를 증가시켰다.

Fig. 15에 해석결과를 보였다. 그림에서 볼 수 있듯이 열전달 효과가 상당히 크게 나타나고 있어, 주입 완료 전에도 이미 주형 부근에서는 고상으로의 상변화가 일어나고 있으며 이는 재료 유동에도 영향을 미치고 있었다. 실제적으로 주형의 조건에 따라 3-1의 결과와는 달리 주입 중에 상변화가 일어날 수 있으며 주입완료 시의 용탕의 온도분포는 용융상태와는 큰 차이를 갖고 있어서 주입을 무시한 응고해석이 부적당하며, 본 해석과 같이 주입과 응고를 순차적으로 해석해야 할 필요성을 말해 주고 있다<sup>[3]</sup>.

3-4. 대형 강판의 주조시 용탕유동

또 하나의 응용예로 대형 강판의 주조시 재료의 유동을 해석하였다. 최초 주형은 가로 2.0m x 세로 0.7m의

빈 공간이며,  $t=0\text{s}$ 에서 용융금속이 주형하단의 폭 0.2m의 주입구에서  $v_1=0.05\text{m/s}$ 의 균일한 속도로 공급된다. 재료는 용융강이며, 점도는  $10^3\text{N/m}^2$ , 비중은  $7800 \text{ kg/m}^3$ , 중력가속도는  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $\beta=0.5$ 로 하였으며, 자유표면 상에는 표면장력이 작용하는 것으로 가정하였다. 용탕이 주형을 완전히 채울 때까지 96번의 격자재구성을 수행하였다. Fig. 16에 주입시간에 따른 요소망과 속도장의 변화를 보였다. 표면장력의 영향으로 원만한 자유표면을 얻을 수 있었으며, 주형 내에서 여러 개의 파형이 생겨 서로 교차함을 알 수 있다.

4. 결 론

효율적인 주조공정 해석 시스템을 구축하기 위하여 유체유동, 열전달 및 상변화를 모두 포함하여 수식화를 수행하고 그에 대한 유한요소 프로그램을 개발하여 종합적인 CAE 시스템을 구성하였다. 몇 가지 응용 예를 통하여 개발된 시스템의 타당성을 검토하였으며, 그 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 주입과 응고를 포함하는 유한요소 해석도구를 통하여 주조 공정해석을 수행할 수 있었으며 이를 통해 각 공정시 공정변수에 대한 정보를 얻을 수 있었다.
- 2) 주입과정시 열적 연계된 유동해석을 통하여 정확한 유동특성과 주입시간을 예측할 수 있었으며 주입완료시 주물의 온도분포 및 상(고상, 액상)변화를 예측할 수 있었다.
- 3) 주입완료시 주물의 최종 온도분포를 응고해석의 초기조건으로 사용하여 실 공정에 근사한 공정해석을 수행하였다.
- 4) 응고과정시 엔탈피법에 기초한 상변화 열전달해석을 통하여 정확한 응고선 변화 및, 응고시간을 예측할 수 있었고, 탄성모델을 이용한 응력해석을 통하여 주물의 수축과 잔류응력을 예견할 수 있었다.
- 5) 격자 재구성기법을 이용한 Lagrangian 유한요소법이 주조시 유동문제와 같이 자유표면을 갖는 유체 유동문제에 효과적으로 적용될 수 있음을 보였으며 독자적인 유체 유동문제에도 적용가능성을 갖고 있음을 보였다. 그러나 그 적용범위에서 한계가 있으며 이를 위해 보완하기 위해 추후로 더 연구가 진행되어야 한다.

본 연구는 종합적인 주조공정해석용 CAE 시스템의 방향을 제시하고, 수식화를 제안하고자 하는 데 그 목적이 있다. 본 연구에서 개발된 해석시스템을 실제 현장에

적용하기 위해서는 실험과의 비교를 통한 보다 많은 프로그램의 검증이 필요로 하며, 수치적인 측면에서도 요소의 겹침을 해결할 수 있는 기법의 개발과 추후 3차원에서의 확장이 요구된다.

#### 후 기

본 연구는 한국과학재단의 핵심전문연구의 지원(931-0800-020-2)으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

1. G. Comini, S. Del Guidice, R.W. Lewis, and O.C. Zienkiewicz, 1974, "Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 18, pp. 613-624.
2. K.Morgan, R.W. Lewis and O.C. Zienkiewicz, 1978, "An improved algorithm for heat conduction problems with phase change", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 12, pp. 1191-1195.
3. 김 용환, J. L. Chenot, 1993, "금속 주조공정에서 열전달과 상변화를 고려한 재료유동의 유한요소해석" *한국소성가공학회지*, 2 권 1 호, pp. 73-82.
4. F. Mampaey and Z. A. Xu, 1992, "An experimental and simulation study of mould filling combined with heat transfer", *Computational Fluid Dynamics*, Vol. 1, pp. 421-428.
5. F.Muttin, Y.H.Kim, T.Coupez, M. Bellet, J.L. Chenot, 1992, "Lagrangian finite-element analysis of low viscous and inviscid free-surface fluid flow: Application to metal casting flow using a remeshing technique", *Computational Fluid Dynamics*, Vol. 1, pp. 429-434.
6. A. S. Usmani, J. T. Cross and R. W. Lewis, 1992, "A finite element model for the simulation of mould filling in metal casting and the associated heat transfer", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 35, pp. 787-806.
7. G.Dhatt, D. M. Gao and A. Ben Cheikh, 1990, "A finite element simulation of metal flow in moulds", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 30, pp. 821-831
8. O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor, 1989, *The Finite Element Method*, Vol.1/2, 4th ed., McGraw Hill, New York.
9. B.E. Launder and D.B. Spalding, 1972, *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press.
10. T. Liszka and J. Orkisz, 1980, "The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics", *Comput. Struct.*, Vol. 11, pp.83-95.
11. F. Cesari, 1992, "An enthalpy formulation of the conduction problems with phase changes", *Comput. Struct.*, Vol. 44, No. 5, pp. 983-987.
12. K.K. Tamma and R.R. Namburu, 1980, "Recent advances, trends and new perspectives via enthalpy-based finite element formulations for applications to solidification problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 30, pp. 803-820.
13. N. Kikukchi, 1986, *Finite Element Methods in Mechanics*, Cambridge, pp. 181-203.
14. S.H. Lo, 1989, "Delaunay triangulation of non-convex planar domains", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 2695-2707.
15. W.J. Schroeder and M.S. Shephard, 1988, "Geometry-based fully automatic mesh generation and the Delaunay triangulation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 2503-2515.
16. 정 현석, 김 용환, 1996, "Delaunay 삼각분할법을 이용한 유한요소망의 자동생성과 격자재구성에의 응용", *대한기계학회논문집*, 20권 2호, 인쇄중.
17. N. Soris, 1990, *Modelisation Tridimensionnelle du Couplage Thermique en Forgeage*, Thesis for L'Ecole Nationale Superieure des Mines de Paris.