

〈논 문〉 SAE NO. 96370117

## 굽힘 효과를 고려한 자동차 판넬 성형 공정의 2차원 유한 요소 해석

### 2-Dimensional Finite Element Analysis of Forming Processes of Automotive Panels Considering Bending Effects

김 준 보\*, 김 영 탁\*\*  
J. B. Kim, Y. T. Keum

#### ABSTRACT

A two-dimensional FEM program, which considers bending effects in the membrane formulation, was developed under plane strain assumption for analyzing forming processes of an arbitrarily shaped draw-die of automotive panels. For the evaluation of bending effects with membrane elements, the bending equivalent forces and stiffnesses are calculated from the bending moment computed using the changes in curvature of the formed shape of two membrane elements(called super element) during time increment, and are added to the membrane ones. The curves depicted with 3 nodes are described by a circle, a quadratic equation, and a cubic equation, respectively, and in the simulation of the stretch/draw sections of an automotive inner panel, three different description results are compared each other. Also, the bending results are compared with membrane results and measurements in order to verify the validity of the developed program.

주요기술용어 : Bending effects(굽힘효과), Plane strain(평면변형), Super element(중첩요소), Curvature(곡률), Automotive inner panel(자동차 내부 판넬)

기 호 설 명			
C	$t=t+\Delta t$ 일 때의 곡률	$F_E$	외부 접촉력 벡터
$C_0$	$t=t$ 일 때의 곡률	$F^{MEM}$	박막에 의한 내부 저항력
$\delta C$	시간증분에 따른 곡률변화값	$F^{BEND}$	굽힘에 의한 내부 저항력
$F_i$	내부 저항력 벡터	$F$	굽힘영향에 의하여 요소 I에 작용하는 내부 저항력
		$F^J$	굽힘영향에 의하여 요소 J에 작용하는 내부 저항력
		$[K]_i$	내부 강성행렬
		$[K]_E$	외부 강성행렬

\* 한양대 대학원(현재 삼성전자(주))

\*\* 정회원, 한양대 정밀기계공학과

$[K]^{MEM}$	박막에 의한 내부 강성행렬
$[K]^{BEND}$	굽힘에 의한 내부 강성행렬
$l$	I번째 요소의 길이
$J$	J번째 요소의 길이
$M$	굽힘 모우먼트
$h_x$	요소 I에 수직인 단위 벡터의 x성분
$h_z$	요소 I에 수직인 단위 벡터의 z성분
$h_x$	요소 J에 수직인 단위 벡터의 x성분
$h_z$	요소 J에 수직인 단위 벡터의 z성분

## 1. 서 론

대부분의 박막모델에 의한 박판 성형 해석에서는 박판재의 두께가 얇기 때문에 굽힘에 의한 영향이 무시된다. 이러한 박막모델은 효율적인 해석 수행시간을 갖고 있어 실제 금형 설계에 적용하기 적당하고, 넓은 범위의 박판 성형 해석에 이용하기 편리한 것으로 알려져 있다. 그러나, 굽힘효과를 고려할 수 없기 때문에 작은 곡률반경을 갖는 성형 해석에서 굽힘에 의한 국부적인 영향을 계산하는데는 어려움이 있다. 이에 반해, 굽힘효과를 고려할 수 있는 쉘 요소는 정밀하게 해석을 할 수 있으며, 편치나 다이 구석 부분에서 박판이 굽혀질 때 굽힘력을 고려한 성형 해석을 할 수 있으나, 쉘 이론에 의한 해석은 방대한 데이터량과 많은 해석 시간이 소요된다. 따라서, 효율적인 해석 수행 시간을 갖고 있어 실제 금형 설계에 적용하기 적당한 박막모델에 의한 굽힘효과를 고려하기 위하여 Zhou<sup>1)</sup>는 평면변형 상태의 박막모델에 굽힘을 첨가하여 성형 해석 하였고, Yoo와 Yang<sup>2)</sup>은 회전 강성, 즉, 요소와 요소를 연결하는 절점에 절점 스프링을 부가, 회전 모멘트를 구하여 굽힘을 고려하였다. 또한, Kubli와 Reissner<sup>3)</sup>는 요소 재분할 기법에 기하학적으로 굽힘효과를 도입하므로써 그 효율성을 보인 바 있으며, 박동운과 오수익<sup>4)</sup>은 Zienkiewicz와 Onate<sup>5)</sup>에 의해 제시된 2절점 선형 요소와 Nagtegaal과 Veldpaus의 변형률식을 사용하여 2차원 판재 성형 문제를 해결할 수 있는 강소성 쉘 프로그램을 개발하였다.

본 논문에서는 박막이론에 의한 성형 공정 해

석에서 기하학적으로 굽힘효과를 고려하기 위하여 곡률부에서 세 절점을 지나는 곡선을 원, 이차, 삼차 방정식으로 묘사하고, 곡률변화에 의한 굽힘력을 계산하여 박막력에 부가하였다. 그리고, 자동차 판넬 단면들에 대하여 성형해석하고, 박막이론 및 쉘이론에 의한 해석치와 비교하였다.

## 2. 유한 요소 수식화

### 2.1 힘 평형 방정식

힘 평형 방정식은 가상일의 원리로부터 유도된다. 최소에너지 경로를 따라 미소한 시간  $\Delta t$  동안 이루어진 소성일량  $\Delta W_F$ 은 다음과 같다.

$$\Delta W_F = \int_V \int_{\bar{\epsilon}_0}^{\bar{\epsilon}_0 + \Delta \bar{\epsilon}} \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} dV_0 \quad (1)$$

여기서,  $\bar{\epsilon}_0$ 는  $t_0$ 에서 유효변형률이고,  $\Delta \bar{\epsilon}$ 는 미소한 시간  $\Delta t$  동안 증가한 유효변형률 중분으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \bar{\epsilon} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \dot{\bar{\epsilon}} dt \quad (2)$$

식(1)에 가상일의 원리를 적용하고, 절점의 가상 변위값은 공간좌표 파라미터의 함수가 아닌 절점의 가상 변위값( $\Delta u$ )을 고려할 때 힘 평형 방정식은 다음과 같이 유도된다.<sup>6)</sup>

$$F_I(\Delta u) = F_E(\Delta u) \quad (3)$$

여기서,  $F_I$ 는 소성변형에 의한 내부 저항력 벡터로

$$F_I = \int_{V_0} \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta u} dV_0 \quad (4)$$

이고,  $F_E$ 는 금형과의 접촉에 의한 외부 접촉력 벡터로

$$F_E = \int_{A_c} f_d A_c \quad (5)$$

이다.

평면변형으로 가정된 단면해석에서 평형방정식 식(3)과 기하학적 구속조건식을 포함하는 통합방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} {}^{n+1}F_I &= {}^{n+1}F_E \\ {}^{n+1}X^S &= {}^{n+1}X^P \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,  ${}^{n+1}X^S$ 는  $t=t+\Delta t$ 에서 유한요소 절점의 위치벡터이고,  ${}^{n+1}X^P$ 는 이 절점에서 유한요소 기초 법선벡터 방향으로 편치면과 만나는 점의 위치벡터이다.

미지의 종속벡터  $r$ 을 도입하면,

$$r = \begin{bmatrix} u \\ P \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,  $u$ 는 절점변위이고  $P$ 는 법선방향성분의 외력을 나타낸다. 종속벡터  $r$ 을 사용하여 식(6)을 간략히 표현하면 다음과 같다.

$${}^{n+1}R_I(\Delta t) = {}^{n+1}R_E(\Delta t) \quad (8)$$

여기서, 일반화된 내력벡터  $R_I$ 와 일반화된 외력벡터  $R_E$ 는 다음과 같다.

$$R_I = \begin{bmatrix} {}^{n+1}F_I(\Delta t) \\ {}^{n+1}X^S \end{bmatrix}, \quad R_E = \begin{bmatrix} {}^{n+1}F_E(\Delta t) \\ {}^{n+1}X^P \end{bmatrix} \quad (9)$$

비선형 방정식인 식(8)을 수치적으로 풀기 위하여 뉴턴랩슨 과정이 도입되었다. 구하는 종속벡터의 증분  $\Delta r$ 은 시간에 따라서 축적되므로 뉴턴랩슨과정의 종속벡터의 시도증분  $\Delta r^*$ 과 종속벡터의 수정증분  $\delta r$ 의 합으로 보면 다음과 같다.

$$\Delta r = \Delta r^* + \delta r \quad (10)$$

식(6)을 종속벡터의 시도증분  $\Delta r^*$ 에 관하여 테일러(Taylor) 급수로 전개하고, 선형화를 위하여 2차 이상의 미분항들을 무시하면, 다음과 같은 뉴턴랩슨 방정식을 얻을 수 있다.

$${}^{n+1}K \cdot \delta r = {}^{n+1}R_L + {}^{n+1}R_C - {}^{n+1}R_I \quad (11)$$

식(11)를 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n+1}F_C \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{n+1}F_L \\ {}^{n+1}X^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{n+1}F_I \\ {}^{n+1}X^S \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서,  $K$ 는 시도 변위증분( $\Delta u^*$ )으로 표현되는 강성행렬로서

$$K = [K]_I - [K]_E = \left( \frac{\partial F_I}{\partial \Delta u} - \frac{\partial F_E}{\partial \Delta u} \right) \Big|_{\Delta u = \Delta u^*} \quad (13)$$

이다. 식(12)에서  $\delta u$ 는 평형상태에서 "0"인 값을 갖는 수정변위 증분벡터이고,  $F_I$ 와  $F_E$ 는 시도 변위 증분의 항으로 나타내진다.<sup>4)</sup> 또한  $C$ 와  $\Gamma$ 는 다음과 같이 각각 표현된다.

$$\begin{aligned} C &= -\frac{\partial D_p}{\partial \Delta u} \\ &= -\frac{\partial (W_p/ZN)}{\partial \Delta u} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{Z_x}{ZN} + (Z_x Z_{xx}) W_p / ZN^3 \\ -\frac{1}{ZN} + (Z_x Z_{xz}) W_p / ZN^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\frac{\partial (F_E - F_I)}{\partial P} = -\frac{\partial F_E}{\partial P} \\ &= -\frac{\partial}{\partial P} [(n - \mu \phi \cdot t) P] = -(n - \mu \phi \cdot t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,  $Z_{xx}$ ,  $Z_{xz}$ 는 변위증분  $\Delta u$ 에 관한  $Z_x$ 의 미분값들이다.

## 2.2 내부 저항력과 강성행렬

굽힘효과를 고려할 수 없는 박막형 모델에 굽힘효과를 고려하기 위하여 다음과 같은 가정을 하였다. 첫째, 중립면에서는 굽힘에 의한 유효변형률이 "0"이라고 가정하였으며, 그 중립면은 박판두께의 가운데 부분에 위치한다고 가정하였다. 둘째, 박판의 실제 성형에서는 박판의 인장과 굽힘은 서로 연성되어서 발생된다. 그러나, 기하학적으로 굽힘효과를 고려한 이론에 내부 저항력과 강성행렬은 인장에 의한 내부 저항력과 강성행렬, 굽힘에 의한 내부 저항력과 강성행렬이 서로 연성되지 않고, 각각 개별적으로 취급되어진다고 가정한다. 즉, 굽힘에 의한 내부 저항력과 강성행렬을 구성하여, 인장에 의한 내부 저항력과 강성행렬에 첨가되어 진다. 따라서, 내부 저항력과 강성행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_1 = F^{MEM} + F^{BEND} \quad (16)$$

여기서,  $F_1$ 는 굽힘효과와 박막의 인장에 의한 전체 시스템의 내부저항력이고,  $F^{MEM}$ 과  $F^{BEND}$ 는 인장에 의한 내부 저항력과 굽힘에 의한 내부 저항력을 의미한다. 전체 시스템의 내부 강성행렬도 내부 저항력과 마찬가지로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[K]_i = [K]^{MEM} + [K]^{BEND} \quad (17)$$

여기서,  $[K]$ 는 굽힘효과와 박막의 인장에 의한 전체 시스템의 강성행렬이고,  $[K]^{MEM}$ 과  $[K]^{BEND}$ 는 인장에 의한 강성행렬과 굽힘에 의한 강성행렬을 의미한다.

### 1) 인장에 의한 내부 저항력과 강성행렬

내부 저항력은 시도변위 증분( $\Delta u$ )에 의해 생성된 유효변형률 증분으로부터 정의된다. Hill의 새로운 항복이론을 평면변형률 상태의 선요소(plane-strain line element)에 적용하면 다음과 같은 내부 저항력 백터를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{V_0} \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \epsilon}{\partial \Delta u} \Big|_{\Delta u = \Delta u'} dV_0 \quad (18) \\ &= t_0 L_0 \bar{\sigma} D_1 (D_2 + 1) \frac{M-1}{M} \\ &S \frac{1}{L^2} [x_1 - x_2, z_1 - z_2, x_2 - x_1, z_2 - z_1]^T \end{aligned}$$

여기서,  $t_0$ 와  $L_0$ 는 각각 변형전 박판두께 및 요소 길이이고,  $L$ 은 다음단계의 요소 길이이다.  $S$ 는 요소가 인장시 +1을 갖고 압축될 때 -1의 값을 갖는 변수이며,  $T$ 는 행렬연산의 전치를 의미한다. 또한,  $D_1$ 과  $D_2$ 는 유한요소 수식화에 도입된 Hill의 비2차 이방성 항복조건의 계수들이며,  $M$ 은 비2차 항복함수 파라미터이다.<sup>4)</sup>

평면변형 선요소에 대한 내부강성행렬  $K_i$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [K]_i &= \frac{\partial F_1}{\partial \Delta u} \Big|_{\Delta u = \Delta u'} \quad (19) \\ &= \int_{V_0} \left\{ \bar{\sigma} \frac{\partial^2 \Delta \epsilon}{\partial \Delta u^2} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \epsilon} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial \Delta \epsilon}{\partial \Delta u} \cdot \frac{\partial \Delta \epsilon}{\partial \Delta u} \right\} \Big|_{\Delta u = \Delta u'} dV_0 \end{aligned}$$

여기서,  $\frac{\partial \Delta \epsilon}{\partial \Delta u}$ 와  $\frac{\partial^2 \Delta \epsilon}{\partial \Delta u^2}$ 는 Keum<sup>4)</sup>의 식을 인용하였다.

### 2) 굽힘영향에 의한 강성행렬과 내부 저항력

기하학적으로 굽힘효과를 고려하기 위해 인접하는 두 요소의 세 절점을 지나는 곡선의 방정식을 구하고, 그 가운데 절점에서 시간증분에 따른 곡률변화를 구할 수 있다. 시간이  $t$ 에서  $t + \Delta t$ 로 증가함에 따라 가운데 절점에서의 곡률변화는 곧 굽힘모우먼트가 작용하는 것이라고 할 수 있다. 이때 시간증분에 따른 곡률변화( $\Delta C$ )는 다음과 같다.

$$\Delta C = C - C_0 = \delta C \quad (20)$$

여기서,  $C$ 는  $t=t+\Delta t$ 일때 가운데 절점에서의 곡률을 의미하고,  $C_0$ 는  $t=t$ 일때의 곡률을 의미한다. 이러한 곡률변화를 이용하여 굽힘모우멘트를 구할 수 있다. 굽힘모우멘트는 다음과 같다.

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_1 \cdot z dz \quad (21)$$

홀로몬 법칙을 따르는 재료의 경우 유효응력 (effective stress)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\sigma} = K(\bar{\epsilon}_p + \bar{\epsilon}_b)^n \quad (22)$$

여기서,  $\bar{\epsilon}_p$ 는 인장과 굽힘에 의한 이전단계에서의 유효변형률을 나타내고,  $\bar{\epsilon}_b$ 는 순수 굽힘에 의한 유효변형률을 나타낸다. 식(22)의 유효변형률을 평면변형 상태의 주변형률로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_1 \quad (23)$$

또한, 유효응력을 주응력으로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_1 \quad (24)$$

순수 굽힘에 의한 주변형률( $\epsilon_b$ )은 중립면에서 "0"이고, 곡률반경의 차이와 중립면으로부터의 거리  $z$ 에 비례한다고 가정하면, 시간증분에 따른 주변형률은 다음과 같은 식으로 유도할 수 있다.

$$\epsilon_b = z \cdot \Delta C = z \cdot \delta C \quad (25)$$

식(22)와 식(25)를 식(24)에 대입하면 주응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} K(\bar{\epsilon}_p + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot z \cdot \delta C)^n \quad (26)$$

식(26)에서 구한 주응력을 식(21)에 대입하므로써 굽힘모우멘트를 구할 수 있다. 따라서, 곡률변화에 의한 굽힘모우멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_1 \cdot z dz \quad (27)$$

$$= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot K(\bar{\epsilon}_p + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot z \cdot \delta C)^n \cdot z dz$$

식(27)를 이용하여 구한 굽힘모우멘트를 이용하여, 각각의 요소에 작용하는 등가우력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$|F| = \left| \frac{M}{L} \right| \quad (28)$$

$$= \left| \frac{M}{\sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (z_{i-1} - z_i)^2}} \right|$$

여기서,  $F$ 는 요소 I에 작용하는 등가력이고,  $L$ 는 요소 I의 길이이다. 등가력  $F$ 의 방향은 요소 I에 대하여 수직이다. 여기서, 요소 I에 수직인 단위 벡터는 다음과 같다.

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} z_1 - z_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

따라서,  $F$ 는 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = -\frac{M}{L} \begin{bmatrix} n_x \\ n_z \end{bmatrix} \quad (30)$$

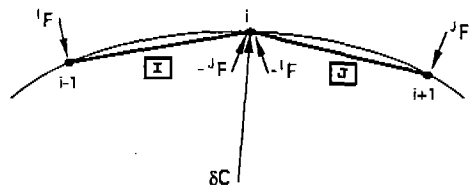


Fig.1 The direction of bending force due to the curvature change after a time increment, from time  $t$  to  $t+\Delta t$ .

같은 방법으로 요소 J에 작용하는 적힘  $\mathcal{F}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_x \\ \mathcal{F}_z \end{bmatrix} = -\frac{M}{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} h_x \\ h_z \end{bmatrix} \quad (31)$$

식(30)과 식(31)에서 구한 모든 등가우력들은 내력으로써 다루어질 수 있다. 따라서, 잔유력 벡터는 다음과 같이 6개의 성분으로 나타낼 수 있다.(Fig.1 참조)

$$[F]^{BEND} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ -F_x - F_x \\ -F_z - F_z \\ F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (32)$$

굽힘에 의한 잔유력은 박막의 인장에 의한 잔유력과 접촉에 의한 잔유력이 함께 평행을 이룬다. 일반적으로 각각의 절점에는 세 종류의 힘이 작용한다. 그 세 종류의 힘은 굽힘영향에 기인하는 요소에 수직하게 작용하는 내력과 박막이론에 의해 요소에 평행하게 작용하는 내력과 접촉력, 그리고, 마찰에 기인하는 외력이 있다. 그러한 각각의 힘들은 Iteration 마지막 단계에서 다른 두 힘에 의하여 균형이 이루어진다.

굽힘에 기인하는 강성행렬은 굽힘에 의한 잔유력을 미분하므로써 구할 수 있다. 따라서, 굽힘 강성행렬은 다음과 같다.

$$[K]^{BEND} = \frac{\partial [F]^{BEND}}{\partial \Delta u} = \frac{\partial}{\partial \Delta u} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ -F_x - F_x \\ -F_z - F_z \\ F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (33)$$

식(33)에 식(30)과 식(31)를 대입하면 다음과 같은 굽힘에 의한 강성행렬을 구할 수 있다.

$$[K]^{BEND} = -\frac{\partial}{\partial \Delta u} \begin{bmatrix} \frac{M}{\mathcal{L}} h_x \\ \frac{M}{\mathcal{L}} h_z \\ \frac{M}{\mathcal{L}} h_x - \frac{M}{\mathcal{L}} h_x \\ \frac{M}{\mathcal{L}} h_z - \frac{M}{\mathcal{L}} h_z \\ \frac{M}{\mathcal{L}} h_x \\ \frac{M}{\mathcal{L}} h_z \end{bmatrix} \quad (34)$$

식(34)의 첫번째 행을 더욱 상세하게 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \left( -\frac{M}{\mathcal{L}} h_x \right)}{\partial \Delta u} = \frac{h_x}{\mathcal{L}} \frac{\partial M}{\partial (\delta C)} \frac{\partial (\delta C)}{\partial \Delta u} - M \frac{\partial \left( \frac{h_x}{\mathcal{L}} \right)}{\partial \Delta u} \quad (35)$$

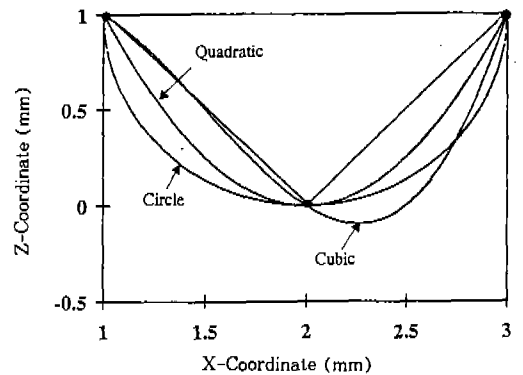


Fig.2 Comparison of curvatures among circle, quadratic and cubic descriptions with three nodes.

Table 1 Comparison of curvatures among circle, quadratic and cubic descriptions with three nodes at the second node.

	원	이차 방정식	삼차 방정식
곡률	1	2	1.14

### 3. 곡률모사 방법

식 (27)에서 알 수 있는 바와 같이 굽힘모우멘트는 곡률변화값  $\delta C$ 에 의하여 계산되어진다. 따라서, 곡선을 묘사하는 방법에 따라 곡률변화 값  $\delta C$ 는 다른 값을 나타낸다. 그러므로, 본 연구에서는 세 절점을 지나는 곡선을 외접원, 2차 방정식, 3차 방정식으로 묘사하고 그 수치해석 결과를 비교하였다. Fig.2는 같은 세 절점을 지나는 곡선을 외접원, 2차 방정식, 3차 방정식으로 묘사하였을때를 비교한 그림이다. Table 1은 Fig.2의 가운데 절점에서의 곡률을 나타낸 표이다. Table 1과 Fig.2에서 본 바와 같이 곡선의 표현 방법에 따라 다른 곡률값과 곡선의 모양을 갖는 것을 알 수 있다.

#### 3.1 외접원

세 절점을 지나는 곡선을 외접원으로 표현할 수 있다. 세 절점을 외접원으로 표현하므로써 각각의 절점에서 같은 곡률 반경을 가진다. 그러나, 다른 고차방정식으로 곡선을 표현하는 것보다는 실제 곡선의 모양을 표현하는데 있어서 차이가 나고 더욱 근사한 곡률을 묘사할 수 없다는 단점이 있다.

세 절점을 지나는 외접원의 곡률은 다음과 같이 구할 수 있다.(Fig.3 참조)

$$C = \frac{4 \cdot S}{a \cdot b \cdot c} \quad (36)$$

여기서, a, b, c는 세 절점이 이루는 삼각형의

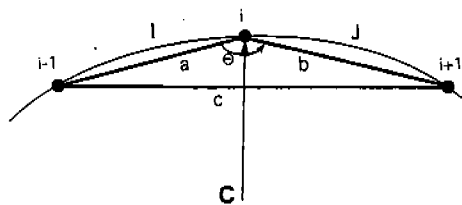


Fig.3 The circumcircle radius for triangle with nodes i-1, i, i+1

각변의 길이를 나타내고, S는 세 절점이 이루는 삼각형의 면적을 의미하고, 그 면적은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta \quad (37)$$

여기서,  $\theta$ 는 요소 I에서 J까지의 각도를 의미하며,  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  일때는 양수,  $180^\circ < \theta < 360^\circ$  일때는 음수의 값을 갖는다. 여기서, 부호는  $C_0$ 가 "0"이라고 하였을 때 굽힘모우멘트 M의 작용 방향과 같다. 따라서, 곡률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C = \frac{2 \cdot \sin \theta}{c} \quad (38)$$

또한, 곡률에 대한 각 절점의 편미분은 다음과 같이 연쇄법칙을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{\partial C}{\partial \Delta u} = \frac{\partial C}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \Delta u} + \frac{\partial C}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \Delta u} \quad (39)$$

#### 3.2 이차 방정식

보의 한 끝단이 고정되고 다른 끝단에 일정한 굽힘모우멘트가 작용할 경우, 보의 굽곡 현상은 x좌표에 대하여 2차 방정식의 형태를 취한다. 따라서, 세 절점을 지나는 곡선을 2차 방정식으로 가정하면 다음과 같다.

$$f(x, z) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + z \quad (40)$$

여기서, a, b, c는 세 절점에 의해서 구해지는 상수이다.

세 절점의 좌표에 의하여 구해진 2차 방정식의 가운데 절점에서의 일·이차 미분값을 이용하여 임의의 곡선에 대해 곡률을 구하는 식에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 현단계에서의 곡률을 구할 수 있다.

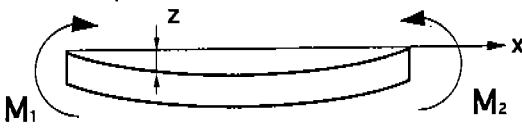


Fig.4 The beam deflection caused by the moment acting on beam.

$$C = \frac{2 \cdot a}{[(2ax_2 + b)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \quad (41)$$

또한, 곡률에 대한 각 절점의 편미분은 연쇄법칙(chain rule)을 이용하여 구할 수 있다.

### 3.3 삼차 방정식

Fig.4에서와 같이 보의 양끝단에 굽힘모멘트  $M_1$ 과  $M_2$ 가 작용할 경우 보의 굴곡 현상은  $x$  축에 대하여 3차 방정식의 형태를 취한다. 그러므로, 인접한 두 요소를 지나는 곡선을 3차 방정식으로 가정할 수 있다. 따라서, 세 절점을 지나는 3차 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$f(x, z) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + z \quad (42)$$

여기서,  $a, b, c$ 는 세 절점의 좌표값에 의하여 구해지는 상수이다. 여기서도 2차 방정식의 경우와 동일한 방법으로 가운데 절점에서의 일·이차 미분값을 이용하여 임의의 곡선에 대해 곡률을 구하는 식에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 현 단계에서의 곡률을 구할 수 있다.

$$C = \frac{6 \cdot a \cdot x_2 + 2 \cdot b}{[(3ax_2^2 + 2bx_2 + c)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \quad (43)$$

또한, 곡률에 대한 각 절점의 편미분은 2차 방정식과 같이 연쇄법칙을 이용하여 구할 수 있다.

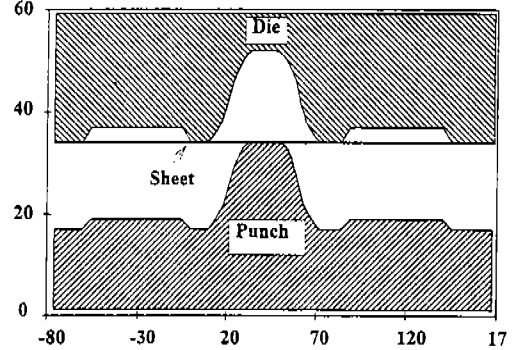


Fig.5 Geometry of tooling for forming operation of stretch section of hood panel.

Table 2 Material Properties of DQSK Steel Sheet.

Properties	Value
Strength of material, K(MPa)	503
Strain rate hardening exponent, n	0.2
Pre-strain, $\epsilon_0$	0.004
Plastic anisotropy parameter, r	1.46
Hill's yield function parameter, M	2.0
Coulomb friction coefficient, $\mu$	0.09
Thickness of sheet, t(mm)	0.64

## 4. 수치 해석

박막이론에 기하학적인 굽힘을 고려한 유한요소 프로그램의 타당성을 입증하기 위하여 후드 내부 판넬 단면에 대하여 성형해석을 수행하였다. 또한, 곡률을 표현하는 방법(원, 이차, 삼차)에 따른 해석 결과의 차이를 관찰하였다.

### 4.1 스트레치 단면

스트레치 단면에 대하여 굽힘이론 해석과 박막이론 해석을 비교하기 위하여 평면변형으로 가정된 후드 내부 판넬의 한 단면에 대하여 성형해



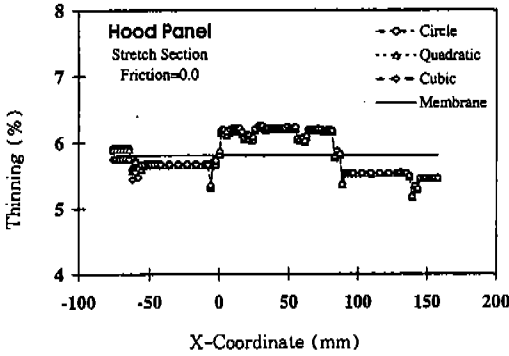


Fig.6 Bending effects in the simulation of a stretch section of hood-panel. ( $\mu=0.0$ )

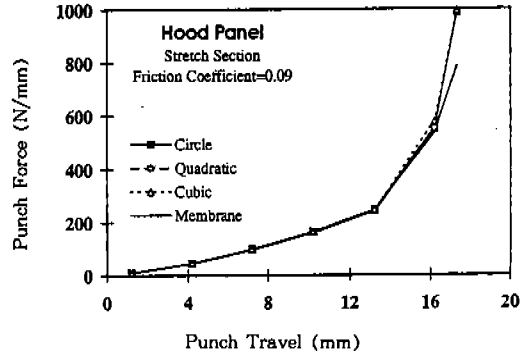


Fig.8 Comparison of punch force among bending(circle, quadratic, cubic) and membrane simulations in a stretch section of hood-panel. ( $\mu=0.09$ )

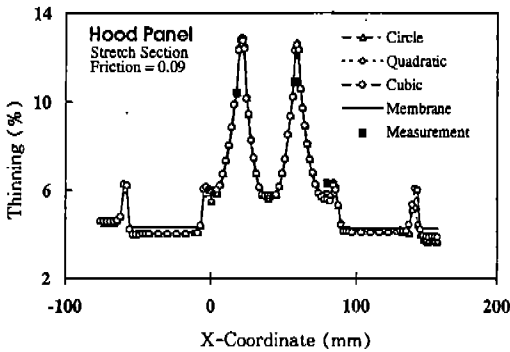


Fig.7 Comparison of thinning distribution among FEM simulations and measurement in a stretch section of hood-panel. ( $\mu=0.09$ )

Fig.6은 마찰이 없을 때 ( $\mu=0.0$ ) 굽힘을 고려한 해석치와 박막이론에 의한 해석치에 대하여 두께변형을 분포를 비교한 그림이다. 박막이론은 전 구간에서 같은 변형을 분포를 가지나, 굽힘을 고려한 해석의 경우 굴곡진 부분에서 다른 변형을 분포를 보여주고 있다. 즉, 굴곡진 부분에서 굽힘력이 마찰력과 같은 효과를 나타내는 것을 알 수 있다.

Fig.7은 마찰이 있을 경우( $\mu=0.09$ ) 수치해석 결과와 실험치에 대한 비교를 보여주고 있다. Fig.7에서도 알 수 있듯이 박막이론에 의한 해석과 굽힘이론에 의한 해석이 대부분의 위치에서 일치하고 있다. 이는 곡률과 판두께의 비가 커서 굽힘효과가 적을 뿐만 아니라, 우수한 스트레치용 판재인 데서 기인된 것으로 추측된다. 그러나, 굽힘력을 고려한 해석이 -5mm부근과 87mm부근, 그리고 가운데 굴곡진 부근에서 박막이론 보다 다소 높은 변형률 분포를 보이고 있으나, 원, 이차, 삼차에 의한 해석 결과는 비슷한 경향을 나타내고 있다. 이는 원, 이차, 삼차에 의한 곡률이 미소 변위에 대해서 거의 같은 곡률을 갖기 때문인 것으로 추측된다. Table 3은 각각의 경우에 대한 N-R 반복횟수와 실행시간을 비교한 표이다. Table 3에서도 알 수 있듯이 실행시간에서는 이차에 의한 해석이 원, 삼차에 의한 해석보다 더욱 적게 걸리는 경향을 보이고 있다.

Table 3 Comparison of N-R iteration and execution time in the stretch section.

	원	이차	삼차	박막
Iteration 수	161	164	129	113
실행시간(sec.)	210	158	310	42

석을 하였다. 단면의 형상은 Fig.5와 같고, 박판의 재질은 DQSK(Draw Quality Specially Killed)로 기계적 물성치는 Table 2와 같다.<sup>4)</sup> 또한, 수치해석에 사용된 유한요소 모델의 절점수는 101개로 하여 성형해석을 수행하였다.

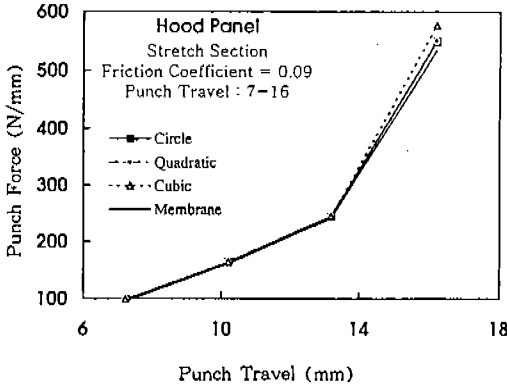


Fig.9 Comparison of punch force among bending(circle, quadratic, cubic) and membrane simulations in a stretch section of hood-panel at punch travel between 7 and 16. ( $\mu=0.09$ )

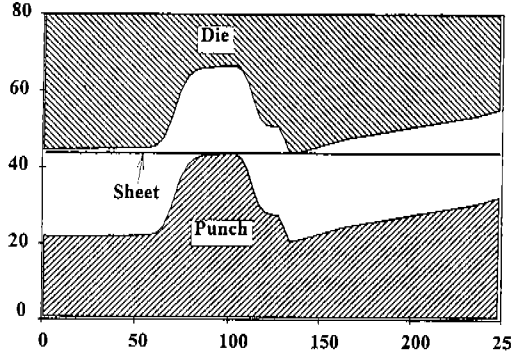


Fig.10 Geometry of tooling for forming operation of draw section of hood panel.

즉, 요소 길이가 작고 미소 변위로 증가하는 점들을 2차 방정식으로 표현하는 것이 원, 삼차에 의한 묘사보다 효율적인 측면에서 가장 타당한 것을 알 수 있다. 그리고, 이때의 펀치력에 대한 비교는 Fig.8에 나타나 있다. Fig.8에서도 알 수 있듯이 굽힘력을 고려한 해석이 최종 성형 단계에서 박막보다 더욱 높은 펀치력을 보이고 있다. 그러나, 낮은 펀치 행정에서는 큰 차이를 나타내지 않고 있다. 이는 박막형 모델에 기하학적으로 굽힘모멘트를 부가하므로 인하여 낮은 펀치행정에서는 전반적으로 굴곡이 완만한 박판의 변형 형상을 나타내므로 인하여 인장에 의한 영향력이 굽힘에 의한 영향력보다 더욱 크게 나타나지만, 최종 성형단계에서는 박판의 최종 성형이 이루어지므로 다이의 굴곡진 부분에서 강제적으로 성형되므로써 굽힘영향이 인장에 의한 영향력보다 더욱 크게 나타나는 것으로 추측된다. Fig.9는 Fig.8의 펀치행정이 7~16mm까지의 펀치력을 확대한 그림이다. Fig.9에서도 알 수 있는 바와 같이 굽힘력을 고려한 이론과 고려하지 않은 이론이 높은 펀치행정으로 가면서 굽힘영향의 증가로 인하여 펀치력의 차이가 점점 커지는 것을 알 수 있다.

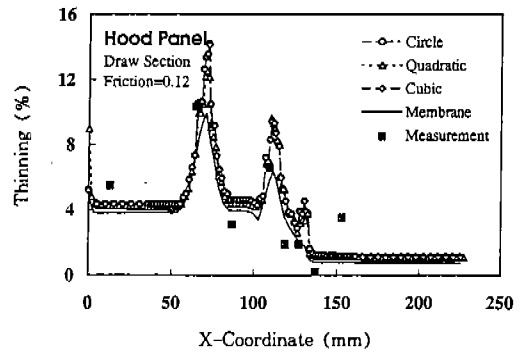


Fig.11 Comparison of thinning distribution among FEM simulations and measurement in a draw section of hood-panel. ( $\mu=0.12$ )

Table 4 Material Properties of a Hood Inner Panel.

Properties	Value
Strength of material, K(MPa)	503
Strain rate hardening exponent, n	0.2
Pre-strain, $\epsilon_0$	0.004
Plastic anisotropy parameter, r	1.46
Hill's yield function parameter, M	2.0
Coulomb friction coefficient, $\mu$	0.12
Thickness of sheet, t(mm)	0.6

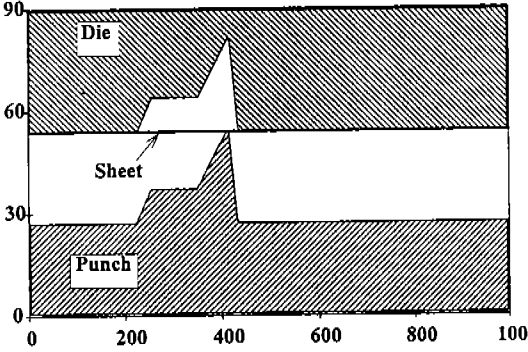


Fig.12 Geometry of tooling for forming operation of sharp corner, stretch section of hood panel.

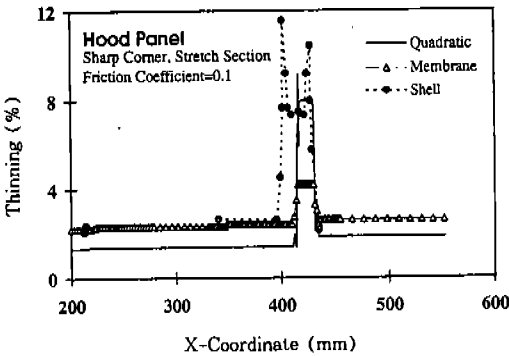


Fig.13 Comparison of thinning distribution between bending and shell simulations in a sharp corner, stretch section.

Table 5 Material Properties of the Mild Steel Sheet.

Properties	Value
Strength of material, K(MPa)	507
Strain rate hardening exponent, n	0.215
Pre-strain, $\epsilon_0$	$0.523 \times 10^{-3}$
Plastic anisotropy parameter, r	1.25
Hill's yield function parameter, M	2.0
Coulomb friction coefficient, $\mu$	0.1
Thickness of sheet, t(mm)	0.7

#### 4.2 드로우 단면

다음은 드로우가 일어날 때 굽힘효과가 주는 영향을 고찰하기 위하여, 평면변형으로 가정되면서 드로우가 일어나는 단면에 대하여 성형해석하였다. 단면의 형상은 Fig.10과 같다. 단면을 대칭형으로 하여 우단에는 드로비이드력을 140N/mm로 부여하였고, 좌단은 고정 조건을 부여하였다. 해석에 사용된 박판 재료는 DQSK(Draw Quality Specially Killed)로 재료의 기계적 물성치는 Table 4와 같다.<sup>6)</sup>

유한요소 모델의 절점수는 원과 삼차의 경우 103개로 하였고, 이차의 경우는 121개, 그리고 박막은 71개로 하여 수치해석을 하였다. Fig.11은 마찰계수가  $\mu=0.12$ 일때, 곡률 표현 방법에 따른 굽힘이론에 의한 해석과 박막이론에 의한 해석, 그리고 측정치를 서로 비교한 것으로, 각각의 해석 결과가 실험치와 전반적으로 잘 일치하고 있다. 그러나, 굽힘효과를 고려한 해석의 경우, X-좌표 75mm 부근과 115mm 부근에서 bending, unbending 현상에 의하여 박막이론보다 더욱 높은 변형률 분포를 보이고 있으며, 굽힘을 고려한 이론이 실험치와 더욱 근사한 경향을 나타내고 있는 것을 알 수 있다.

#### 4.3 곡률 반경이 작은 단면

기하학적으로 굽힘효과를 고려한 해석과 셸이론에 의한 해석을 비교하기 위하여, Lee<sup>5)</sup>가 셸이론으로 해석한 후드 내부 판넬의 한 단면에 대하여 2차 방정식으로 굽힘효과를 고려한 해석결과와 셸이론에 의한 해석결과를 비교하여 보았다. 이 단면은 최대 성형 깊이가 28mm인 스트레치 단면으로써 굴곡진 부분의 반경이 3.5mm 정도인 단면이다.(Fig.12 참조) Table 5는 이때 수치해석에 사용된 재료의 기계적 물성치를 나타내는 표이다. 유한요소 모델의 절점수는 161개로 하여 수치해석을 하였다. Fig.13은 편치행정이 20.12mm인 경우에 셸이론 및 박막이론에 의한 수치해석 결과와 편치행정이 16.9mm일때 2차 방정식으로 굽힘을 고려한 수치해석의 변형률 분포를 보여주고 있다. 여기서 편치행정은 각각

수렴되는 높이까지 해석한 결과로 굽힘효과를 고려하는 경우에 곡률반경이 작은 단면에 대해서는 수렴성이 다소 떨어짐을 알 수 있다. Fig.13에서도 알 수 있듯이 기하학적으로 굽힘을 고려한 해석의 경우 편치행정이 16.9mm일때 최대 두께변형률이 9.2%로 편치 행정이 20.12mm일때 최대 두께변형률이 4.5%인 박막이론에 의한 해석과는 상당한 차이를 보이고 있으며, 최대 두께 변형률이 11.45%인 셸이론에 의한 해석과는 유사한 두께 변형을 분포를 보이고 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 박막형 요소에 세 절점의 곡률 변화로부터 굽힘효과를 고려하는 2차원 유한요소 프로그램을 개발하고, 자동차 내부 판넬의 성형공정에 대하여 수치해석을 수행하였다. 이러한 연구로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) 박막 기초 모델에 기하학적으로 굽힘을 고려하므로써, 굽힘효과를 규명할 수 있었다.
- 2) 곡률부에서 굽힘을 고려하기 위하여 3절점으로 부터 곡률변화를 계산할 때 곡선을 2차 방정식으로 표현하는 것이 원, 삼차에 의한 묘사보다 실행시간이 적게 걸리고, 수렴성이 좋은 것을 알 수 있었다.
- 3) 기하학적으로 굽힘을 고려한 박막이론 모델도 셸이론에 의한 해석 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 '95 핵심전문연구(951-1005-043-2)과제로서 수행되었으며 이에 관계자께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. Zhou, D., "Development and Testing of a New Algorithm for FEM of Sheet Forming", Ph. D. Dissertation, Ohio State Uni., 1993, pp. 104~132.
2. W. Kubli and J. Reissner, "Optimization of Sheet Metal Forming Processes Using the Special-Purpose Program AUTOFORM", Proceedings of The 2nd International Conference, NUMISHEET '93, 1993, pp. 271~280.
3. Yoo, D. J. and Yang, D. Y., "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes using Continuous Contact Treatment and Membrane Element incorporating Bending Effect", Int. J. Mech. Sci., 1994.
4. 금영탁, R. H. Wagoner, "프레스금형의 성형성 평가를 위한 유한요소법", 대한기계학회 논문집, 제15권, 제4호, pp. 1108~1122, 1991.
5. Lee, J. K., "Two-Dimensional Finite Element Analysis of Sheet Forming Processes including Bending Effects", Ohio State Uni., Report No. ERC/NSM-S-90-04, 1990, pp. 84~93.
6. 김종필, 금영탁, 이종문, "딥드로잉 판넬의 단면성형 해석을 위한 유한요소/기하학평형법에 관한 연구", 94년도 한국정밀공학회 추계학술대회 논문집, pp. 212~217.
7. 박동운, 오수익, "굽힘을 고려한 축대칭 판재성형 해석", 대한 기계 학회, 94년도 춘계 학회 논문집 1권, pp. 393~397.
8. Onate, E. and Ziekiewicz, O. C., "A Viscous Shell Formulation for Analysis of Thin Sheet metal Forming", Int. J. Mech. Sci., 5, pp. 305~335, 1983.