

<논 문> SAE NO. 96370057

RVM을 사용한 큰지름비 동축젯트의 비정상 수치해석

Numerical Simulation of Unsteady Flow Field behind Widely-Spaced Co-axial Jet using Random Vortex Method

류 명 석*, 강 성 모**, 김 용 모***
M. S. Lyu, S. M. Kang, Y. M. Kim

ABSTRACT

The transient incompressible flow behind the widely-spaced co-axial jet is numerically simulated using the random vortex method(RVM). This numerical approach is based on the Lagrangian approach for the vorticity formulation of the unsteady Navier-Stokes equations, utilizing vortex elements to account for the convection and diffusion processes. The effects of the mass flow rate of an annular air jet and a central fuel jet on the co-axial jet flow dynamics is investigated. To validate the present procedure, the numerical results are compared with the available experimental data in terms of the centerline and off-centerline profiles of the mean axial velocity. Discrepancies between the RVM results and the measurements are discussed in detail.

주요기술용어 : Random Vortex Method(랜덤와동해법), Co-axial Jet(동축젯트), Vortical Flow(와류유동), Transitional Flow Regime(천이유동영역)

1. 서 론

난류유동장에 대한 수치해석에서는 난류모델을 수반하는 시간평균된 Navier-Stokes방정식에 대한 유한차분법이나 유한요소법을 통상적으로 사용하고 있다. 그러나 이러한 Averaging-closure방법은 난류 correlation항들에 대한 난

류모델을 필요로 하고 모델상수들은 문제의존적이며 특히 비정상 난류유동 및 응집유동구조(coherent structure)를 예측할 수 없는 결점을 가지고 있다. 그러므로 시간평균하지 않은 본래의 N-S방정식을 사용하여 와류유동에서의 급격한 유동특성의 변화와 유동의 발달을 정확히 예측할 수 있도록 유동장내의 얇은 전단층에 국한되어 있는 속도구배에 따라 계산요소를 밀집시킬 수 있는 이산화를 통해 수치효율과 정확도를 높일 수 있는 수치방법을 고안하는 것이 바람직하다. 랜덤와동해법(Random Vortex Method, RVM)

* 정회원, 고등기술연구원, 자동차기술연구소

** 한양대 기계공학과 대학원

*** 정회원, 한양대 기계공학과

은 그러한 수치방법 중의 하나로서 시간평균을 하지않은 N-S방정식을 기반으로 하기 때문에 물리모델에 관련된 상수들의 세밀한 조정이나 유동특성에 대한 사전정보를 필요로 하지 않으며 난류 유동장에서의 비정상 와류유동 특성을 용이하게 예측할 수 있다. 또한 와도의 구배가 큰 영역으로 와도가 밀집하는 자가적응적(self adaptive)인 특성 때문에 불안정한 전단유동에서의 큰 와류유동에 관련된 비정상 유입(entrainment)과정을 효율적으로 해석할 수 있는 수치적 장점도 가지고 있다.

Helmholtz(1858)로부터 시작된 와동연구는 19세기에는 Lord Kelvin에 의해 그리고 금세기 초반에는 Prandtl과 그의 Gottingen학파에 의해 지속되었고, 지난 30년동안 물리, 수학, 공학 분야에서 계속적인 발전을 하였다. Rosenhead¹⁾는 초기($t=0$)의 연속적인 와도장을 이산화된 점들에서의 델타함수의 합으로 나타낸 점와동해법(point vortex method)을 처음으로 유동장 해석에 적용하여 2차원 와동면(vortex sheet)의 거동을 점와동들의 수송으로 근사시켰다. 점와동법은 중심에서 무한대의 고립와도로 인하여 두 점와동간의 거리가 0으로 접근할 수록 속도가 무한대로 되는 비물리적(근접한 거리에서의 가상적인 와동의 작용)인 특이해²⁾를 포함하지만 Rosenhead의 결과에서는 상대적으로 적은 수의 점와동을 사용했거나 계산의 정확도를 제한했기 때문에 나타나지 않았다³⁾. 점와동법의 이러한 문제점을 극복하기 위해 Chorin⁴⁾은 유한한 단면적(와핵, vortex core)내부에서 일정한 와도분포를 가지는 와요소(vortex element; vortex blob/ring/sheet)를 와도매체로 사용하는 방법을 제시하였다. 더불어 이 와요소를 가지고 와동의 상호작용을 해석하여 Euler방정식을 근사시킨 후에 컴퓨터에서 발생하는 난수(random number)를 이용한 랜덤성분을 와동의 거동에 중첩시켜 점성확산을 고려한 랜덤와동해법을 제시했다. 그후에 Chorin⁵⁾은 Prandtl의 경계층이론과 경계층방정식을 랜덤와동해법에 적용하여 영역경계에서의 수렴속도를 향상시키려고 와동면(vortex sheet) 개념을 도입했다.

본 연구의 랜덤와동해법은 계산영역을 내부영역과 경계층영역으로 구분하고 각 영역에 대한 와도전달방정식을 대류방정식과 점성확산방정식으로 나누는 점성항 분리해법⁶⁾을 사용하였다. 이때 와도수송의 매체인 와요소로서 내부영역에서는 와환(vortex ring)요소를 사용하였고 경계층영역에서는 와동면(vortex sheet)을 사용하였다. 이 두방정식의 해를 결합해서 고려중인 영역에 대한 해를 구하고 경계층 유동영역과 내부 유동영역의경계면에서는 두영역의 해가 일치되게 와요소를 변환시켰다. 수치해법에서는 랜덤와동해법을 이용하여 벽면에서의 점성부착 조건을 만족시키고 유동장의 회전속도 성분을 예측하였으며 대류와 확산에 의한 와도수송에서 연속방정식을 만족시키는 포텐셜속도 성분을 구하기 위해 기하학적으로 복잡한 경계면에서 용이하게 Neumann 경계조건을 부과할 수 있는 Galerkin 유한요소법⁷⁾을 결합하였다. 와도수송단계에서는 대류에 의한 와도수송을 Lagrangian 유동해법으로 고려하여 수치격자의 사용으로 인한 수치확산의 영향을 제거하였으며 확산에 의한 와도수송을 Lagrangian 유동해법에 적합하게 모델링 될 수 있는 random walk 기법에 의해 통계적으로 처리하였다. 영역경계에서는 Neumann경계조건을 가지는 Laplace방정식의 해로부터 얻어지는 포텐셜 속도성분을 유동장에 더해서 법선경계조건을 만족시켰고, 벽면에서의 점선속도(slip velocity)를 상쇄시키기 위해 일정한 강도의 순환(circulation)을 가진 와동면을 발생시켜 점성부착(no-slip) 경계조건을 부과하였다.

본 연구에서는 랜덤와동해법을 중앙제트유동과 환상유동의 전단층에서 발생된 큰 와동의 출력, 붕침으로 인한 강한 비정상성을 가지는 큰지름비의 동축제트(widely-spaced coaxial jets)¹⁶⁾의 천이영역내에서 두 경우의 다른 속도비에 따른 비정상 유동구조를 이룩하기 위해 적용하였다.

2. 랜덤와동해법의 수치모델

축대칭, 비압축성, 점성유동에 대한 지배방정

식은 다음과 같다.⁸⁾:

$$\frac{\partial(rv)}{r\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla v \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $\vec{u} = (u, v)$ 는 속도벡터, u 와 v 는 각각 반경방향과 축방향 속도성분이고, t 는 시간 그리고 p 는 압력이다. 모든 변수들은 유로 지름(D_0)과 원주를 따른 입구유동속도(U_0)의 적당한 조합으로 무차원화시켰다. Reynolds 수는 $R_e = U_0 D_0 / \nu$ 로 정의되며 ν 는 동점성계수이다. 와도전달 방정식은 식(2)와 (3)에 curl을 취해서 유도된다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \omega - u \frac{\omega}{r} = \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (4)$$

여기서 $\omega = \partial u / \partial z - \partial v / \partial r$ 는 방위각방향으로의 와동이고 $u\omega/r$ 는 와환요소의 반경방향으로의 신장(stretching)이나 수축에 관계된 와동신장항이다. 연속방정식은 아래에 정의된 Stokes 유동함수를 사용해서 만족된다.

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \text{and} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (5)$$

식(5)를 와도의 정의에 대입하면 와도와 유동함수간의 잘 알려진 관계식을 얻는다.

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\Psi}{r} \right) = -\omega(\vec{x}, t) \quad (6)$$

축대칭 유동장에 대해 랜덤와동해법은 와도장을 유한 단면적을 가진 아주 얇은 N 개의 와환요소로 식(7)처럼 이산화시키고 입자궤적에 따라 와환요소를 수송시키는 방식을 기본적으로 이용하였다.

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\vec{x} - \vec{X}_i) \quad (7)$$

Γ_i 는 벡터 \vec{X}_i 에 위치한 와환요소의 순환이고 $\delta(\cdot)$ 는 Dirac delta함수이다. 식(7)을 식(6)에 대입하여 구해지는 유동함수를 식(5)에 따라 미분하면 아래의 식과 같은 다수의 와환요소의 분포로 인하여 임의의 점 $\vec{x} = (r, z)$ 에서 유도되는 속도성분을 얻는다⁹⁾.

$$\begin{aligned} u\omega(\vec{x}, t) &= \sum_{i=1}^N u_i(\vec{x}, t), \\ \text{and } v\omega(\vec{x}, t) &= \sum_{i=1}^N v_i(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}, t) &= \frac{-\Gamma_i (z - \zeta_i)(s_{1i} + s_{2i})}{2\pi r s_{1i}s_{2i}} \\ & \quad \left[K(\lambda_i) - \frac{E(\lambda_i)}{2} \left(\frac{s_{2i}}{s_{1i}} + \frac{s_{1i}}{s_{2i}} \right) \right] \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} v_i(\vec{x}, t) &= \frac{\Gamma_i}{2\pi r} \left[\left(\frac{r - \rho_i}{s_{1i}} + \frac{r + \rho_i}{s_{2i}} \right) \right. \\ & \quad \left. (K(\lambda_i) - E(\lambda_i)) + \frac{s_{2i} - s_{1i}}{2} E(\lambda_i) \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{r + \rho_i}{s_{2i}} - \frac{r - \rho_i}{s_{1i}} \right) \right] \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} s_{2i/i} &= \sqrt{(z - \zeta_i)^2 + (r - / - \rho_i)^2}, \\ \lambda_i &= (s_{2i} + s_{2i} + s_{1i}) \end{aligned}$$

여기서 $\vec{X}_i = (\rho_i, \zeta_i)$ 는 와환요소의 중심좌표, Γ_i 는 순환이며 $K(r)$ 과 $E(r)$ 은 각기 제1종, 2종 타원형 적분을 나타낸다. 와환요소에 의한 유도속도는 두 와환요소 간의 중심거리가 0에 가까워질 수록 무한대로 근접한다. 비물리적인 이러한 불연속성을 피하기 위해

유한한 단면적(와핵, vortex core)을 가지는 와환요소로 와도장을 이산화시켰다⁴⁾. 와핵의 모델로서 자연에서 쉽게 관찰되는 Rankine형 와핵¹⁰⁾을 가정하였고 와핵 내부에서의 유도속도는 와핵의 중심에서의 유한한 값과 와핵 반지름에서 식(8a, b)를 이용하여 계산된 값 사이에서 선형적으로 변한다고 가정하였다. 와환요소 중심부 ($|\vec{x} - \vec{X}_i| = 0$)에서의 자기유도속도(self induced velocity, v_s)는 아래의 Kelvin의 공식¹¹⁾으로 부터 계산하였다.

$$u_s = 0,$$

$$v_s = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \left(\ln \frac{8\rho}{\delta} - 0.25 \right) \quad \text{for } \delta/\rho < 1 \quad (9)$$

벡터 $\vec{X}_i = (\rho_i, \zeta_i)$ 에 위치한 와핵을 가진 와환요소가 임의의 점 $\vec{x}(r, z)$ 에 대해 유도하는 속도를 아래와 같이 계산하였다.

$|\vec{x} - \vec{X}_i| > \delta$ 이면 (u_w, v_w)는 식(8a, b)에서 구해지고

$|\vec{x} - \vec{X}_i| \leq \delta$ 이면 (u_w, v_w)는 \vec{X}_i 에서 속도 ($0, v_s$)와 $\vec{u}(\vec{X}_i + \delta\vec{e})$ 를 보간해서 구해지며 \vec{e} 는 $(\vec{x} - \vec{X}_i)$ 방향의 단위벡터이다.

영역경계에서의 법선경계조건을 만족시키기 위해 포텐셜유동 속도성분을 속도장 \vec{u}_w 에 중첩시켰다¹²⁾. 이 포텐셜유동 속도성분은 $\vec{u}_{pot} = \nabla\phi$ 로 주어지고 ϕ 는 아래와 같은 Neumann 경계조건을 가지는 Laplace 방정식을 만족시켜서 계산하였다.

$$\nabla^2\phi = 0, \quad \frac{\partial\phi(s)}{\partial n} = (\vec{u}_p - \vec{u}_w(s)) \cdot \vec{n} \quad (10)$$

여기서 s 는 유동장의 경계(∂D)를 따라 정의되는 원호길이이고 경계층영역에서의 중요한 모든 변수들을 벽면좌표계로 나타내었다. 유동장의 경계에서 지정된 경계속도 \vec{u}_p 값을 가지고 Galerkin 유한요소법을 사용해서 식(10)의 해를 구하면 중첩된 유동장의 속도장은 $\vec{u} = \vec{u}_w + \vec{u}_{pot}$ 로 나타낼 수 있다. 와환요소의 수송은 대류와 확산

의 두 성분으로 구분된다. 대류단계에서 와환요소는 순환의 변화없이 입자의 궤적을 따라 움직이고 아래와 같은 일련의 상미분 방정식을 적분해서 와환요소의 수송을 수행하였다.

$$\frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{u}(\vec{X}_i, t) \quad (11)$$

이때 궤적에 대해 1차정확도의 시간적분을 사용하면 수치오차로 인하여 과도한 와환요소의 수송과 와동의 분산(spreading)을 예측한다. 본 연구에서는 이러한 오류확산을 줄이기 위해 2차정확도를 가지는 Heun의 시간적분법¹³⁾을 이용하여 와환요소의 수송을 결정하였다. 확산과정은 random walk와 직접적인 수송¹⁴⁾의 두 단계⁹⁾로 이루어 진다. 첫 단계에서는 각 와환요소의 궤적에서 각각 평균치와 표준편차($\sigma = \sqrt{2\Delta t/R_c}$)를 가지는 두개의 랜덤변수(η_1, η_2)의 Gaussian분포로부터 아래식의 해를 통계적으로 계산하였다^{4), 15)}.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{R_c} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (13)$$

두번째 단계에서는 식(13)을 MOC방식에 의해 계산하였으며 아래식으로 주어지는 부가적인 증분항만큼 와환요소를 반경방향으로 변위시켰다.

$$\rho^2_i(t + \Delta t) = \rho^2_i(t) - 2\Delta t/R_c \quad (14)$$

점성부착 경계조건은 고체경계를 따라 h 간격으로 분포시킨 점들에서의 접선속도 u_s 를 계산해서 $\Gamma = -u_s h$ 의 순환을 가진 와동면(vortex sheet)을 발생시켜서 만족시켰다⁵⁾. 이 와동면은 유동의 내부로 확산된 후에는 와환요소로 변환된다. 이 때의 확산 경계층의 두께는 random walk의 표준편차 크기 정도이다.

3. 결과 및 토론

랜덤와동해법을 $D_a/D_j=29$ 의 큰 지름비를 가지는 비정상 동축젯트 유동장의 천이유동영역¹⁶⁾에 속하는 $U_a/U_j=1/0.7, 1/1.7$ 의 속도비에 대해 수행하였다. Fig.1에 수치계산영역과 기하학적 스케임을 나타내었다. 수치계산에서 사용된 수치관련상수와 유동조건은 다음과 같다. 무차원 시간증분 $\Delta t=0.009$, 각 고체 경계면에서 점성 부착 경계조건을 만족시키기 위해 사용된 와동면 길이 $h=0.009\sim 0.05$, 경계층 유동 정확도 지수 $BLRP=2\sim 16$, 각 와도면에서 주어지는 최대순환의 절대치 $\Gamma_m=h/BLRP$ 그리고 각 고체벽에서 와도면 아경계층(sublayer)의 수직두께 $\Delta_s=2\sigma$ 를 사용하였고 입구와 출구에서는 유동방향으로 일정한 속도성분을 포텐셜유동을 가정하였다. 수치해석의 첫단계로서 각 시간증분마다 고체벽을 제외한 영역에서의 포텐셜유동장을 계산하였다. 각 고체벽에서는 시간이 진행되면서 점성부착 경계조건을 만족시키기 위해 일정한 순환을 가지는 와동면의 형태로 와도를 발생시켰다. 발생초기에 와동면은 벽에서 수직방향으로만 확산된 후에 국부속도에 따라 벽에 평행하게 대류와 확산과정을 거치며 내부영역과 벽영역의 경계면에서 와동면을 와환요소로 교환시켰다. 각 영역에서 유동장의 출구를 벗어난 와요소는 배열에서 제거하였다.

3.1 $U_i=0.7$

Fig.2는 천이영역 동축젯트 후류에서의 중앙젯트유동과 환상유동으로 인한 큰 와동들의 형성(formation), 뭉침(merging), 흘림(shedding)의 과정을 거치는 혼합와동 형성의 한 주기를 시간에 따라 와요소의 속도장으로 보여주고 있다. Fig.3는 bluffbody 바깥 반지름부에 인접한 위치에서의 시간에 따른 순간 축방향 속도성분을 나타내며 Fig.4는 이러한 순간속도성분을 가지는 1,500시간증분의 샘플을 시간평균한 등유선도를 나타낸다. 이 시간평균된 등유선도는 환상유동재순환영역의 끝부분과 중앙젯트 유동의 정체를 나타내는 두 개의 정체점을 보여주며 이 속도비에서의 동축젯트 유동장이 천이영역임을 나타낸다. Fig.5는 축중심선과 축중심선에 평행한 위치에서의 축중심선을 따른 시간평균한 축방향 속도성분의 수치결과와 실험치와의 비교를 나타낸다. 수치해석과 실험조건 간의 밀도비, 속도비, 입구에서의 제트속도 분포, Reynolds 수에서의 약간의 차이 그리고 3차원성 영향 등으로 인한 정량적인 차이를 가지고 있지만 정성적인 유동구조를 잘 예측함을 알 수 있다.

3.2. $U_i=1.7$

Fig.6은 중앙 젯트속도가 증가함에 따른 천이영역 동축젯트 후류에서의 혼합와동 형성의 한 주기를 시간에 따라 와요소의 속도장으로 보여주

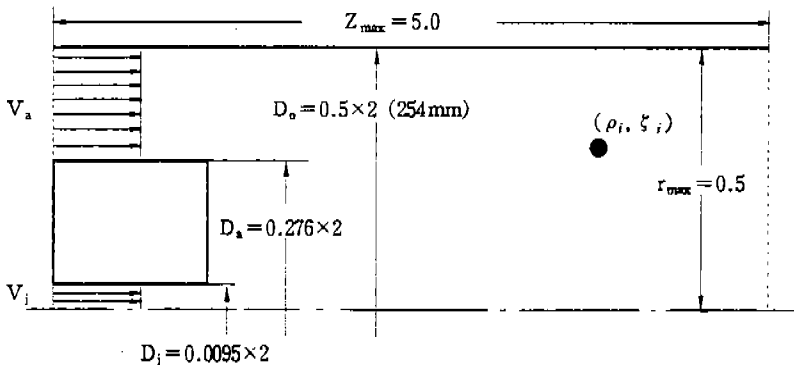


Fig.1 The computational domain of coaxial jet combustor

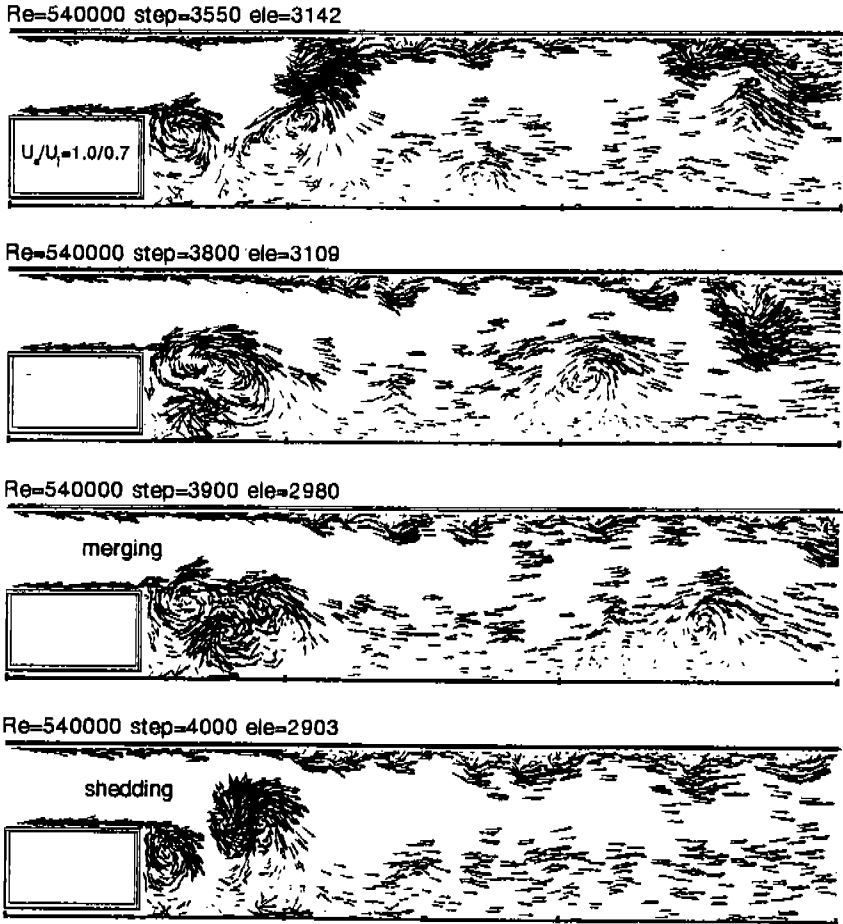


Fig.2 A sequence of time frames showing the flowfields in terms of vortex elements and their instantaneous velocity vectors

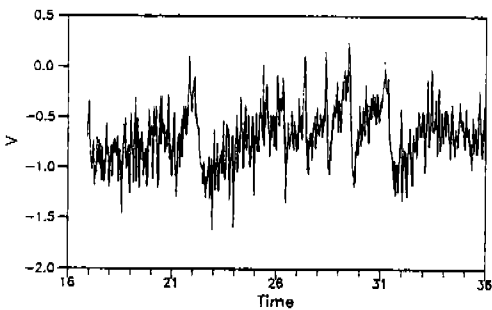


Fig.3 Trace of the instantaneous axial velocity at a point located at $(r, z) = (0.279, 4.4)$

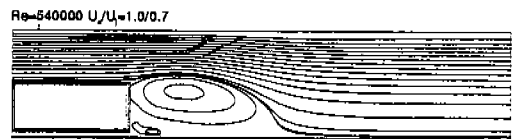


Fig.4 Mean streamline(ave.=25000—4000)

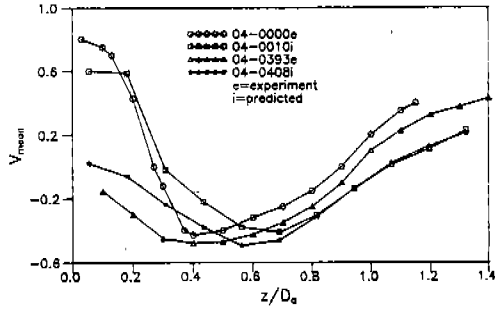


Fig.5 Comparison of mean axial velocities with experimental data along the centerline and 1cm off-centerline¹⁶⁾.

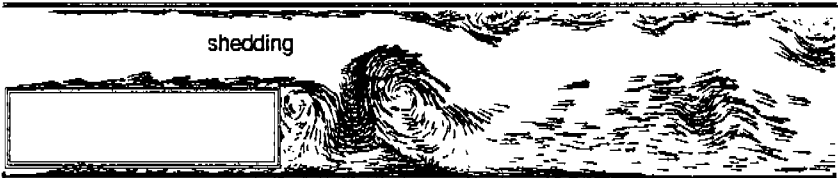
Re=540000 step=100 ele=2476



Re=540000 step=120 ele=2750



Re=540000 step=130 ele=2940



Re=540000 step=150 ele=3211



Fig.6 A sequence of time frames showing the flowfields in terms of vortex elements and their instantaneous velocity vectors

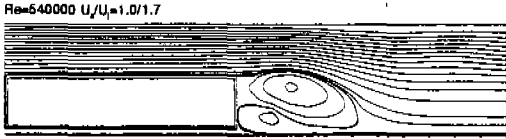


Fig.7 Mean streamline (ave. = 140~178)

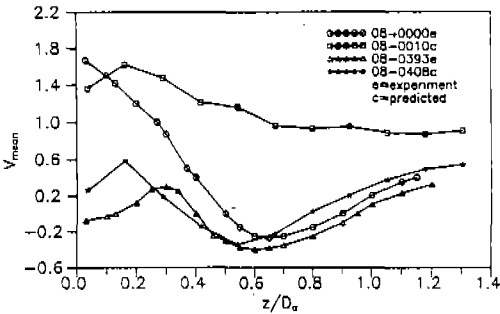


Fig.8 Comparison of mean axial velocities with experimental data along the centerline and 1cm off-centerline¹⁶⁾.

고 있다. 앞의 낮은 속도비의 경우처럼 천이영역 유동구조를 나타내며 동시에 중앙젯트의 속도증가에 따른 과도한 와도발생과 강해진 젯트유동에 의한 와동의 형성을 볼 수 있다. 중앙젯트의 입구근방에서의 와도발생 특성은 상대적으로 작은 노즐지름부를 가진 중앙젯트의 유량과 중앙젯트의 입구영역에서 발생시킨 와핵의 크기에 밀접한 관련이 있음을 알 수 있다. Fig.7은 근접와도들의 가상적인 와도작용으로 인하여 중앙젯트유동이 환상유동의 재순환영역을 뚫고 나가는 중앙젯트지배 현상을 보여주고 있다. Fig.8은 축중심선과 축중심선에 평행한 위치에서의 축중심선을 따른 시간평균한 축방향 속도성분의 수치결과와 실험치와의 비교를 나타낸다. 가상적인 와도작용의 영향으로 인하여 축중심선을 따라 정량적인 오차를 가지고 있지만 축중심선에 평행한 위치에서는 정성적인 유동구조를 잘 예측하였다.

4. 결 론

본 연구에서 사용한 랜덤와동해법이 천이유동

영역에서 동축젯트의 정성적인 유동구조를 잘 예측하였다. 수치해석 결과로부터 중앙젯트 속도가 증가할 때 과도한 와도발생과 강해진 중앙젯트 유동에 의한 와동의 형성으로 인한 천이유동영역이 형성되며 중앙젯트 입구근방에서의 와도발생 특성은 중앙젯트의 유량과 중앙젯트의 입구영역에서 발생시킨 와핵의 크기에 밀접한 관련이 있음을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Rosenhead, L., "The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity," Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, vol. 134, pp. 170~192, 1931
2. Kuwahara, K. and Takami, H., "Numerical Studies of Two-dimensional Vortex Motion by a System of Point Vortices," J. of the Phys. Soc. of Japan, vol. 34, pp. 247~253, 1973.
3. Leonard, A., "Review : Vortex Methods for Flow Simulation," J. of Comput. Phys., vol. 37, pp. 289~335, 1980
4. Chorin, A. J., "Numerical Study of Slightly Viscous Flow," J. Fluid Mech, Vol. 57, pp. 785~796, 1973
5. Chorin, A. J., "Vortex Sheet Approximation of Boundary Layers," J. Comput. Phys., Vol. 27, pp. 428~442, 1978
6. Beal, J. T., and Majda, A., "Rates of Convergence for the Viscous Splitting of the Navier-Stokes Equations," Math. of Computation, Vol. 37, pp. 243~259, 1981
7. Chung, T. J., Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, McGraw-Hill, 1978
8. A. F. Ghoniem, and L. F. Martins, "The dispersion of the jet fluid due to the large-scale motion in bluff body flows" AIAA-91-1861, 27th joint propulsion conference, 1991.

9. Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th Edition, dover Publications, 1945
10. Milinazzo, F. and Saffman, P. G., "The Calculation of Large Reynolds Number Fluid Flow Using Discrete Vortices with Random Walk," *J. of Comp. Phys.*, vol. 23, pp. 380~392, 1977
11. Leonard, A., "Computing Three-dimensional Incompressible Flow with Vortex Filaments," in *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 17, pp. 523~559, 1985
12. Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, 1967
13. Gerald, G. F. and Wheatley, P. *Applied Numerical Analysis*, Addison Wesley, 1984
14. Sod, G. A., "Automotive Engine Modeling with a Hybrid Random Choice Method II," SAE Paper 790242, SAE Congress, Detroit, MI, 1979
15. Ghoniem, A. F., and Sherman, F. S., "Grid-free Simulation of Diffusion Using Random Walk Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 61, pp. 1~37, 1985
16. Lightman, A.J., et al., "Velocity Measurements in a Bluff-Body Diffusion Flame," AIAA 15th Thermo-physics Conference, July 14~16, 1980