

유한요소법과 운동방정식의 결합에 의한 운동체의 특성 해석

김영선 · 이준호 · 이기식

단국대학교 전기공학과

서울시 용산구 한남동 산 8번지, 140-714

이복용

대우공업전문대학 전기과

경기도 성남시 수정구 복정동 425, 461-714

(1996년 10월 7일 받음, 1996년 11월 28일 최종수정본 받음)

전기 기계의 운동 특성을 정확히 해석하기 위해서는 해석모델의 전자장방정식과 운동방정식이 함께 고려되어야 한다. 본 논문에서는 자장내에서 두 개의 스프링에 의해 진동 운동을 하는 도체를 해석함에 있어 순차적인 결합방법을 채택하였다. 한 시점에서 속도가 주어지면 전자장해석 및 유도전류 계산은 유한요소법을 이용하였고, 그때마다 전자력을 계산하였다. 또한 전자장방정식이 풀린다음 4차 runge-kutta 미분방정식 해법을 이용하여 운동방정식과 결합하였다. 위의 과정을 순차적으로 계속 반복함으로써 시간에 대한 위치, 속도, 유도전류 및 전자력을 알아내어 운동체의 운동특성을 알아보았다. 계산된 결과는 에너지보존 법칙에 적용하여 제한한 순차적인 결합방법의 유용성을 검증하였다.

I. 서 론

전자장내에서 운동을 하고 있는 전기 기계의 정확한 해석을 위해서는 전자장방정식과 운동방정식을 함께 고려하여 해석하여야 한다. 전자장방정식과 운동방정식의 결합에는 동시결합방법과 순차적인 결합방법이 있다. 기존의 연구들은 모두 순차적인 결합이며, 오일펌프의 전자력 해석을 한 정용화의 경우 운동체의 속도를 고려하지 않는 가정을 하였고[1], B. Bendjima의 경우 외부 회로가 없는 경우 운동방정식과 결합을 하였다[2]. 또는 전자장내에서의 운동체를 해석할 때 물체의 속도를 등속도로 가정하고 있다[3, 4].

본 연구에서는 전자장 해석을 위해 수치 해석의 일종인 유한요소법을 이용하여 운동체의 운동 특성을 해석하고, 이를 운동방정식과 결합하였다. 해석모델로 전자장내에서 스프링 시스템과 연결되어 진동 운동을 하는 물체를 선택하고, 이 운동체에 전류가 유기되어 운동방향과 반대되는 전자력을 발생하는 효과를 보았다. 유기된 전류에 의해 저항에서 에너지의 손실이 일어나고 그 결과 시스템의 기계적에너지 감소를 가져왔다. 그리고 계산된 결과를 에너지 보존 법칙에 적용하여 에너지가 보존됨을 확인하고 제안한 결합방법의 유용성을 검증하였다.

II. 본 론

1. 모델 설정

Fig. 1은 균등 자장 $B [T]$ 속에서 상하 진동 운동하는 길이 $l [m]$ 인 도체를 나타내고 있다. 이 도체는 스프링 상수가 $k [N/m]$ 인 두 개의 스프링에 의해 매달려 상하 운동하고 있으며, 또한 외부저항 $R_{ext} [\Omega]$ 에 의해 폐회로를 구성하고 있어서 유기기전력에 의한 전류를 흘릴 수

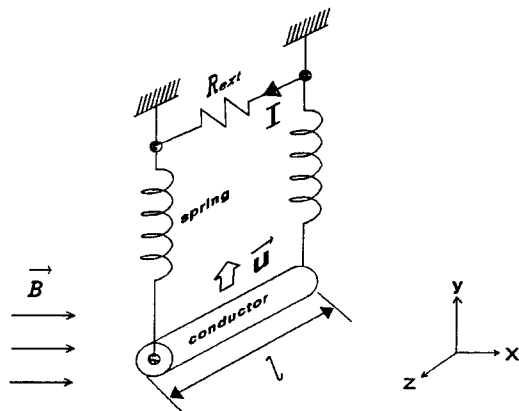


Fig. 1. 해석 모델

있게 되어 있다. 운동을 하는 도체는 유도된 전류에 의해 운동방향과 반대되는 방향의 전자력을 발생한다. 본 논문의 해석영역은 가로 세로 1 [m]의 자유공간에서 단면적이 1.6×10^{-3} [m²]인 도체의 운동을 해석하였다.

2. 해석 이론

해석모델은 z-축 방향으로 변화가 없다고 가정한 2차원 장으로 해석하기로 한다. 따라서

$$A(x, y, z, t) = A(x, y, t) \hat{z} \quad (1)$$

과 같이 자기벡터포텐셜 A [Wb/m]를 표현할 수 있으며, 변위전류를 무시한 Maxwell 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times H = J_o + J_i \quad (2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times (u \times B) \quad (3)$$

여기서, H : 자계의 세기 [A/m]
 E : 전계의 세기 [V/m]
 B : 자속밀도 [T]
 J_o : 전원 전류 밀도
 J_i : 유도 전류 밀도

또한, 유도전류밀도 J_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$J_i = \sigma E \quad (4)$$

여기서, σ : 도전율 [S/m]

자속은 연속성을 가지고 있어 그의 발산량은 항상 '0'이 된다. 또 벡터항등식을 이용하여 자기벡터포텐셜 A 를 다음과 같이 정의한다.

$$B = \nabla \times A \quad (5)$$

도체에 유기되는 기전력 E 는 식(3)과 식(5)에 의해 다음과 같이 자기벡터포텐셜 A 와 전기스칼라포텐셜 ϕ 에 의해 표현된다.

$$E = -\nabla\phi + u \times (\nabla \times A) \quad (6)$$

여기서, u : 운동체의 속도

스칼라포텐셜은 도체내에서 등전위이고 축방향으로 선형함수가 되므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi = \phi_1 z + \phi_0 \quad (7)$$

$$\nabla\phi = \phi_z \quad (8)$$

여기서, ϕ : 전기스칼라 포텐셜 [V]

ϕ_z : 전기스칼라포텐셜의 편도함수 [V/m]

해석모델의 운동체는 y축 방향으로만 움직이므로 Maxwell 방정식은 도체 영역에서

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 A + \sigma \left(\phi_z - u \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

여기서, y : 운동체의 y좌표 [m]

$u = \frac{dy}{dt}$: 도체의 속도 [m/s]

μ : 재료의 투자율 [H/m]

과 같고, 위의 식(9)는 전기스칼라포텐셜 ϕ 가 포함되어 있으므로 한 개의 수식이 더 필요하다. 또 하나의 지배방정식은 도체 영역에서 ϕ_z 를 구하기 위한 전류의 연속방정식을 추가하여 풀 수 있다. 즉, 외부회로에 흐르는 전류는 도체에 유기된 전류의 양과 같으므로 식(10)으로부터 식(11)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\phi_z}{R_{ext}} l = \int_s J_i ds \quad (10)$$

$$\frac{\phi_z}{R_{ext}} l + \int_c \sigma \left(\phi_z - u \frac{\partial A}{\partial y} \right) ds = 0 \quad (11)$$

여기서, c : 도체의 전영역

식(10)의 좌변은 운동도체의 양단에 나타나는 단자전압을 외부저항 R_{ext} 로 나눈 것이며, 우변은 도체 각 부분의 유도전류를 도체의 단면에 대해 적분한 것이다. 도체 영역이 아닌 공기부분은 단순히

$$\nabla^2 A = 0 \quad (12)$$

와 같은 Laplace 방정식이 자기벡터포텐셜 A 에 대하여

성립한다. 스프링에 의해 진동하고 있는 도체의 운동방정식은 스프링의 감쇠효과를 무시하면 식(13)과 같다.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky + F_{em} \quad (13)$$

여기서, m : 도체의 질량 [K_g]
 k : 스프링의 탄성계수 [N/m]
 F_{em} : 전자력 [N]

이 계의 운동을 해석하기 위해서는 시간 영역에서 도체의 위치 y 와 속도 u 를 묘사하면 되는데, 이는 식(13)의 미분방정식을 풀면 된다. 그러나 전자력 F_{em} 이 자장과 도체에 흐르는 전류의 곱으로 표현되고 있어, 자장과 전류의 값을 먼저 식(9)와 식(11)로부터 알아야 풀이가 가능하게 된다. 그런데 식(9)와 식(11)에서 자장과 전류는 위에서와 마찬가지로 식(13)의 해인 위치와 속도가 주어져야 풀이될 수 있다. 따라서 이들은 서로 결합된 연립방정식인 것이다. 이 연립방정식은 우선 속도를 지정하고 전류를 구하고, 그들에 작용되는 힘을 계산한 다음 운동방정식에서 다음 시간의 속도와 위치를 구하여 나가는 순차적인 방법을 본 논문에서는 채택하여 계산하기로 한다.

3. 유한요소정식화

식(9), (11) 및 (12)로 표현되는 전자장방정식을 갤러킨법을 적용하여 해석영역을 유한개의 삼각형 요소로 분할하고 요소내의 미지의 포텐셜을 1차 함수로 근사시켜 유한요소정식화 하면 식(14)와 같은 계행렬을 얻을 수 있다[5, 6].

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서,

$$[S_{11}]_{ij} = \sum_{el} \int_{se} \left[\frac{1}{\mu^e} \nabla N_i^e \cdot \nabla N_j^e + \sigma^e u N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] ds \quad (15)$$

el : i 를 포함한 요소 j : 요소 e 의 3절점

$$[S_{12}]_i = \sum_{em} \int_{se} \sigma^e N_i^e ds \quad (16)$$

em : 절점 i 를 포함한 요소

$$[S_{21}]_j = \sum_{en} \int_{se} \sigma^e u \frac{\partial N_j^e}{\partial y} ds \quad (17)$$

en : 절점 j 를 포함한 요소

$$[S_{22}] = \sum_{ec} \int_{se} \sigma^e ds + \frac{l}{R_{ext}} \quad (18)$$

ec : 도체내의 요소

N_i, N_j : 형상함수

4. 전자력 계산

도체에 발생하는 전자력 밀도는 유기된 전류밀도와 자속밀도의 곱이며 y 성분만 존재하게 된다. 요소내에서 단위 길이 당의 전자력은

$$F_{em}^{(e)} = \int_{se} -\sigma \left(\phi_z + u \frac{\partial A}{\partial y} \right) \frac{\partial A}{\partial y} ds [N/m] \quad (19)$$

과 같으며 전체 전자력은

$$F_{em} = l \sum_e F_{em}^{(e)} [N] \quad (20)$$

로써 계산할 수 있다. 여기서 e 는 도체내의 요소이다.

5. 운동방정식 계산

식(13)에서 $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{du}{dt}$ 이므로 식(13)의 2계 선형 미분방정식은

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} y \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{em}}{m} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

와 같이 연립 1계 선형 미분방정식으로 표현된다. 이 식의 우변 두 번째 항에 식(20)에서 계산된 결과를 대입하여 미분방정식 해법중에 runge-kutta 방법을 적용하여 풀면 다음 시간의 위치와 속도가 계산되어진다.

III. 검증 및 적용례

본 장에서는 제시한 알고리즘을 적용하여 운동하는 도체의 변위, 속도, 유도전류 및 전자력을 구하고 에너지 보존 법칙을 통한 검증을 하였다. 본 논문의 해석모델은 외부

에서의 균등 자장이 각각 3 [T]와 5 [T]로 가해졌을 때 자장내에서 질량 3 [kg], 단면적이 $1.6 \times 10^{-3} [m^2]$ 인 도체의 운동을 고찰하였다. 도체의 도전율은 $5.8 \times 10^{-7} [S/m]$ 이고 외부저항이 0.1 [Ω]인 외부 회로와 직렬로 연결되어 있다. 이 때 병렬 연결된 스프링의 합성 탄성계수는 473.741 [N/m] 이고 스프링 자체의 감쇠효과와 공기저항은 무시하였다. 외부에서의 자장이 없을 때와 있을 때를 각각 0.025초 간격으로 한 주기를 20등분하여 계산하였다.

해석모델의 경계조건은 무한한 균등자장이기 때문에 해석영역의 상하경계에는 고정경계조건으로 주었고 경계면에서 자기벡터포텐셜의 수직성분의 변화는 없다는 자연경계조건을 주었다.

Fig. 2(a)와 Fig. 2(b)는 외부 자장이 각 3 [T]와 5 [T] 일 경우 해석한 결과 시간에 따른 위치와 속도의 관계를 나타낸 것이다. 그리고 외부자장이 없을 경우의 도체의 위치에 대한 결과도 첨가하였다. Fig. 3(a)와 Fig. 3(b)는 위와 같은 서로 다른 자장속에 도체에 유기되는 전류와 그 유기전류가 자장내에서 받는 전자력을 도시하였다. 외부의 자장이 5 [T] 일 경우 3 [T] 보다 감쇠효과가 크고 유도전류와 전자력이 큰 것을 볼 수 있으며,

유도전류와 전자력은 비례하는 것을 볼 수 있다. 기존의 전자력 계산 방법은 균등자장속에서 전체전류와의 관계로 전자력을 계산하였으나, 본 논문에서는 유기전류에 의한 자장의 일그러짐을 모두 고려하고 도체내의 유기전류도 요소별로 계산하였다. Fig. 4(a)와 Fig. 4(b)는 유도전류에 의한 외부저항에서의 에너지손실과 역학적에너지 및 전체 에너지를 나타낸 것이다.

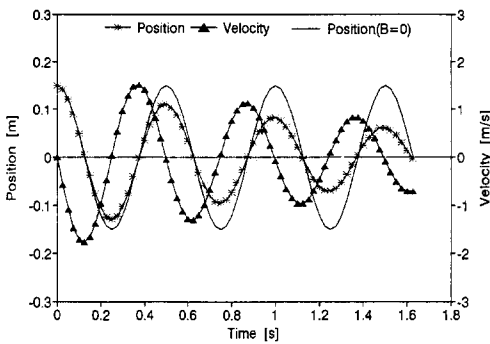


Fig. 2. (a) 3[T] 자장내에서 운동체의 위치와 속도

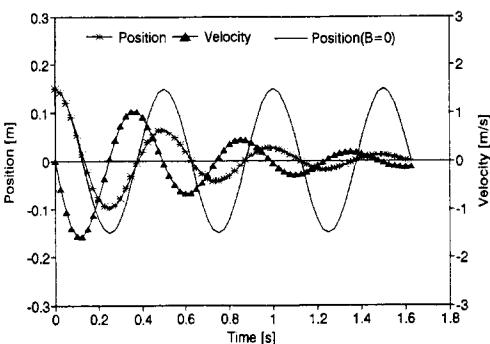


Fig. 2. (b) 5[T] 자장내에서 운동체의 위치와 속도

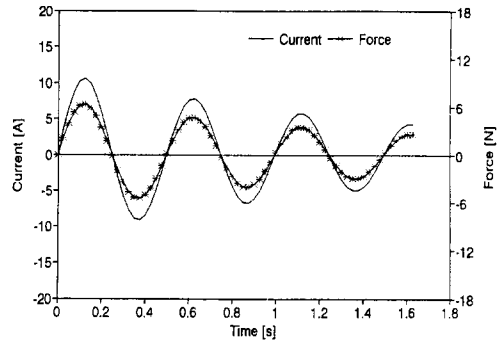


Fig. 3. (a) 3[T] 자장내에서 운동체의 유도전류와 전자력

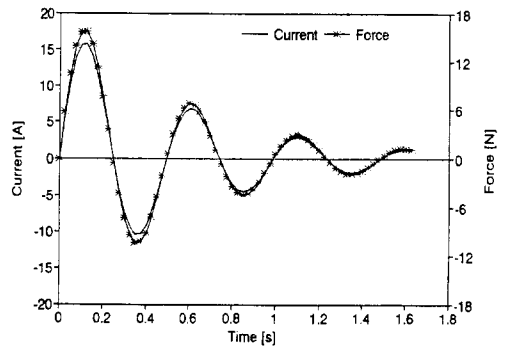


Fig. 3. (b) 5[T] 자장내에서 운동체의 유도전류와 전자력

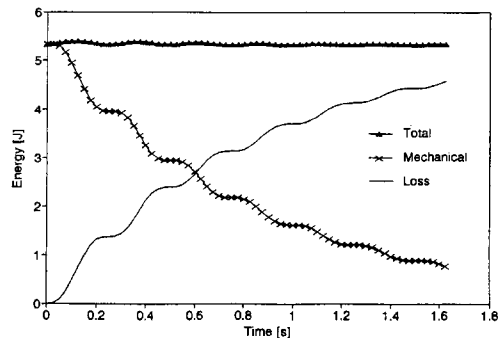


Fig. 4. (a) 3[T] 자장에서 역학적 에너지와 전자력에 의한 에너지 손실 및 시스템 전체 에너지

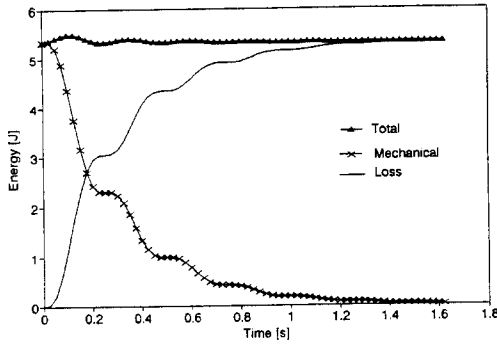


Fig. 4. (b) 5[T] 자장에서의 역학적 에너지와 전자력에 의한 에너지 손실 및 시스템 전체 에너지

그리고 운동체의 에너지는 항상 보존된다는 에너지 보존 법칙에 의해서 해석결과를 검증하였고, 에너지 손실, 역학적 에너지 및 전체 에너지의 상관관계는 다음과 같다.

$$W_{Loss} = \int_0^t I(t)^2 (R_{ext} + R_{con}) dt \quad (22)$$

$$W_M = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} k y^2 \quad (23)$$

$$W_T = W_{Loss} + W_M \quad (24)$$

여기서, R_{con} : 도체의 저항
 W_{Loss} : 에너지 손실
 W_M : 역학적 에너지
 W_T : 전체 에너지

IV. 결 론

본 논문에서는 유한요소법과 운동방정식의 결합방법을 제시하였다. 3 [T]와 5 [T]의 자장내에서 운동하는 물체를 유한요소법과 운동방정식을 결합하여 일정 시간 동안의 도체의 위치, 속도, 전류 및 전자력 등의 운동 특성을 보았다. 도체가 자장내에서 운동을 함으로써 도체에 전류가 유기되어 운동방향과 반대되는 전자력을 발생시

켰다. 유기된 전류는 외부 회로의 저항에서 손실을 가져 오므로 시스템 전체의 에너지를 감소시켜 진동을 감쇠시킨다. 도체에 유기된 전류는 다시 자장을 형성하여 기존의 자장과 합성되어 균등 자장을 이루지 않는다. 또한 도체내에서도 유기전류의 밀도도 고르게 분포되어 있지 않아 기존의 전자력계산방법으로는 불가능하다. 본 알고리즘은 유한요소법과 운동방정식을 이용하여 전자장방정식과 운동방정식이 연립되어 있는 연립미분방정식을 계산하여 운동도체의 특성을 해석하였다. 매 스텝마다 역학적 에너지와 전류에 의한 외부저항에서의 에너지 손실을 계산함으로써 그 합인 전체 에너지가 보존됨을 확인하고 이로써 알고리즘의 유용성을 검증하였다. 실제의 전기기계에 있어서 기동특성 및 모든 운동특성 해석에 효과적으로 활용될 수 있으리라 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] Yong-Haw Jeong and Chang-Hoi Ahn, "Dynamic Characteristic Analysis of Electromagnetic Oil Pump System", Proceeding of the 7th IEEE CEFC '96, pp. 340, March 1996.
- [2] B. Bendjima, K. Srairi and M. Feliachi, "A Coupling Model for Analysing Dynamical Behaviours of an Electromagnetic Forming System", Proceedings of the 7th IEEE CEFC '96, pp. 296, March 1996.
- [3] 이향범, "스큐효과를 고려한 유도전동기의 유한요소 해석", 박사학위논문, 서울대학교, 1995.
- [4] 이기식, "유한요소법에 의한 운동체내의 전자장 해석", 박사학위논문, 서울대학교, 1984.
- [5] 김창업, "유한요소법을 이용한 편축식 선형유도전동기의 동특성 해석에 관한 연구", 박사 학위논문, 한양대학교, 1995.
- [6] K. Srairi, M. Feliachi and Z. Ren, "Electromagnetic Actuator Behavior Analysis Using Finite Element and Parametrization Methods" IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 6, pp. 3497-3499, November 1995.

Analysis of Moving Body Characteristics by Coupling Finite Element Method and Motion Equation

Young-Sun Kim, Joon-Ho Lee and Ki-Sik Lee

*Department of Electrical Engineering, Dankook University .
8, Hannam-Dong, Yongsan-Ku, SEOUL 140-714*

Bok-Yong Lee

*Department of Electric Engineering, Daeyeu Technical College
425, Bokjung-Dong, Sujung-Ku, Sungnam, Kyeonggi-Do 461-714*

(Received 7 October 1996, in final form 28 November 1996)

For the accurate analysis of motional characteristics of electrical machines, it is needed to solve the motion equations together with the electromagnetic field equations. In this paper the sequential coupling of systems, the spring mass system and the electromagnetic system, is adopted. The induced current and the magnetic fields are calculated by finite element method(FEM) with given speed. And then, with the computed electromagnetic force, the mechanical equations are solved by the Runge-Kutta method. The above two processes are repeated sequentially to obtain the time domain solutions. The resultant values are applied to the energy conservation law to prove the usefulness of the proposed sequential method.

Keyword : Finite element method (유한요소법)
Motional characteristic (운동 특성)
Motion equation (운동방정식)
Sequential coupling (순차적 결합)
Energy conservation law (에너지 보존법칙)