쉘 구조물의 비선형 동적응답 해석을 위한 Algorithm에 관한 연구

崔 燦 文
釜山水産大學校
(1996년 4월 10일 접수)

A Study on the Algorithm for Nonlinear Dynamic Response Analysis of Shell Structure

Chan - Moon CHOI
National Fisheries University of Pusan,
(Received April 10, 1996)

Abstract

The main intention of this paper is to develop and compare the algorithm based on finite element procedures for nonlinear transient dynamic analysis which has combined effects of material and geometric nonlinearities. Incremental equilibrium equations based on the principle of virtual work are derived by the finite element approach. For the elasto - plastic large deformation analysis of shells and the determination of the displacement - time configuration under time - varying loads, the explicit, implicit and combined explicit - implicit time integration algorithm is adopted. In the time structure is selected and the results are compared with each others. Isoparametric 8 - noded quadrilateral curved elements are used for shell sturcture in the analysis and for geometrically nonlinear elastic behaviour, a total Lagrangian coordinate system was adopted. On the other hands, material nonlinearity is based on elasto - plastic models with Von - Mises yield criteria. Thus, the combined explicit - implicit time integration algorithm is benefit in general case of shell structure, which is the result of this paper.

기호정의

σ : 응력
σ_e : 탄성 응력
σ_p : 소성 응력
σ_y : 항복 응력
τ_{xy}, τ_{rz} : 전단 응력
ε : 변형률
ε_e : 탄성 변형률
ε_p : 소성 변형률
ε_{vp} : 점소성 변형률
μ : 점성 계수
γ : 유동성 계수
Ω : 대상 영역
Γ : 경계 영역
Ψ : Residual 힘 벡터
α : 감쇠 계수의 매개 변수
θ : 변위의 변화율

ξ, η : 요소 좌표계
δ : 가상변위
u, v, w : x, y, z방향 변위
$\boldsymbol{D}$: 탄성 계수 행렬
r, z : 반경 및 길이 방향 변위
E : 탄성 계수
$\boldsymbol{E}_T$: 접선방향 탄성 계수
ρ : 질량 밀도
E_n : Green 변형률 매트릭스
a : Flow 벡터
$\boldsymbol{B}$: 변형률 매트릭스
$\boldsymbol{K}$: 강성률 매트릭스
$\boldsymbol{J}$: Jacobian 매트릭스
Q : 소성 퍼텐셜

서 론

선박 및 항공기 등 복잡한 구조물에 널리 사용되는 축대칭 쉘 부재는 그 형상이 복잡하고, 변형되는 모양이 하중이나 경계조건에 따라 민감하게 반응할 뿐만 아니라, 동적 하중에 대한 보다 엄밀한 거동 해석은 여전히 공학에 있어 주요 연구 과제로 대두되고 있다. 이러한 쉘 구조에 대한 해석은 탄성한도 내의 안정성 위주의 해석으로부터 시작되었으나, 그 계산 결과가 실험으로 확인된 값과는 상당한 차이를 보이게 된다. 그 원인을 규명하기 위한 많은 연구가 거듭되어 왔다. 그 결과 Von Karman과 Tsien[1)-3)]에 의해 쉘 구조의 변형 거동은 비선형적이며, 초기변형에 의한 오차임이 밝혀졌다. 그 이후에 쉘의 대변형 및 재료 비선형성에 대한 많은 연구가 이루어졌으나, 그 지배 방정식이 고차의 비선형 편미분 방정식으로 표시되어, 극히 간단한 경우에 있어서도 해석적인 완전해를 얻기가 어려워 Galerkin과 Ritz법, 급수해법 등의 근사해석을 위한 노력이 꾸준히 진행되어 왔다. 그러나, 근래에 들어 대용량의 고성능 컴퓨터의 출현으로 수치해석법의 개발에 박차를 가하게 되었고, R. Courant[4)]이 유한요소법(F. E. M)의 수학적인 기초이론을 확립한 이후, Turner[5)] 등이 구조물의 비선형 해석에 이 방법을 적용하면서 더욱 발전하게 되었다. 그리하여 Argyris[6)], Khojasteh - Bakht[7)], Marcal[8)] 등이 유한요소법을 이용한 탄 · 소성 해석을 위해 보다 정확도가 높고 경제적인 해법을 개발하였으며, Yaghmia[9)], Larsen[10)], Yamada[11)], Ebecken[12)] 등은 탄 · 소성 대변형 문제를 유한요소법으로 해석하기에 이르렀다. 이와 같은 비선형 구조해석에서는 증분법을 널리 적용하고 있으며, 이 경우 구조물의 공작상의 초기변형 및 잔류응력 등을 완전히 피할 수 없으므로 이들을 고려한 강도해석이 필수적이다. 특히, 충돌, 폭발, 충격 또는 지진과 같은 시간에 따라 변하는 불규칙 하중을 구조물이 받을 때의 과도상태에 있어서의 비선형 응답해석은 많은 반복 계산에도 불구하고 그 결과를 신뢰할 수 없다. 이와 같이 구조물의 기하학적 모양과 초기변형, 재료의 이상화, 그리고 시간적분의 방법에 따른 결과의 비교, 관찰은 탄성 이론만으로는 해결이 불가능하므로 소성 이론에 의한 반복 계산의 수행이 요구되어진다.

본 논문에서는 이러한 문제점들에 대한 보다 안정된 해법을 찾는 데 주안점을 두었으며, 해석에 필요한 주요변수나 시간 적분법, 재료 이상화에 따른 모델링 기법의 차이에 따른 결과를 비교, 검토한다. 10개의 요소로 모델링하고, 작용하중은 축대칭의 충격하중을 받는 해석대상 축대칭 쉘 구조물에 대한 과도상태 동적응답을 해석하고 이를 비교, 검토한다. 또, 재료 비선형성에 대한 모델링 기법은 재료의 탄성과 소성거동을 고려한 탄 · 소성 모델을 채택하였다. 한편, 시간의 변화에 따른 응답의 검토를 위해 쉘 구조물의 고유진동수로부터 적분시간의 임계치를 결정하고, 그 범위 내에서 Explicit, Implicit, 그리고 Combined Explicit - Implicit 시간적분 방식[14)]을 채택하여 그 결과를 비교 검토하였다.

이론 해석

1. 축대칭 요소의 응력과 변형률

임의의 축대칭 구조물에 있어, 변위 $\boldsymbol{u}$ 및 변형률 $\boldsymbol{\varepsilon}$은 Fig. 1과 같다.

여기서,

$$\boldsymbol{u} = [u, w]^T \tag{1}$$

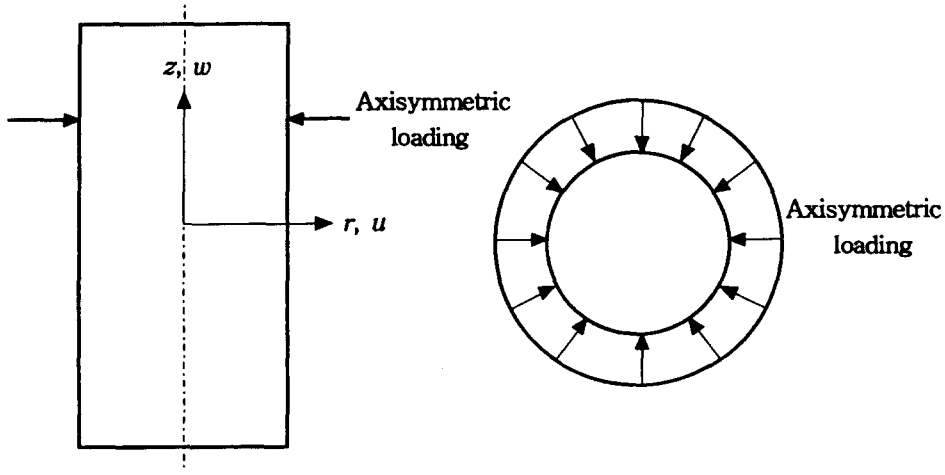


Fig. 1. A typical axisymmetric solid

$$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}]^T \tag{2}$$

로 되며, 변형률의 법선 성분과 전단 성분은 (3)식과 같다.

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}, \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3-1}$$

$$\gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r} \tag{3-2}$$

따라서, 가상변위 $\delta\boldsymbol{u}$와 가상변형률 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta\boldsymbol{u}=[\delta u, \delta w]^T \tag{4}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial r}, \frac{\delta u}{r}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial z}+\frac{\partial(\delta w)}{\partial r}\right]^T \tag{5}$$

한편, 선형 탄성계에서 응력 - 변형률 사이의 관계는 (6)식과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}]$이므로, 응력 - 변형률 관계 매트릭스 $\boldsymbol{D}$는 아래와 같다.

$$\boldsymbol{D}=\frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}(1-\nu) & \nu & 0 & 0\\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0\\ 0 & \nu & (1-\nu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2}\end{bmatrix} \tag{7}$$

또한, 물체력 $\boldsymbol{b}$와 경계 표면력 $\boldsymbol{t}$는 각각 (8), (9)식과 같으며,

$$\boldsymbol{b}=[b_r, b_z] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{t}=[t_r, t_z]^T \tag{9}$$

요소 체적 $d\Omega$는 (10)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$d\Omega=2\,\pi\, r\, dr\, dz \tag{10}$$

2. 동적 평형 방정식

임의의 시간 t_n에서의 가상일의 원리[15]를 이용한 구조물의 동적 평형 방정식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_\Omega[\delta\boldsymbol{\varepsilon}_n]^T\boldsymbol{\sigma}_n d\Omega-\int_\Omega[\delta\boldsymbol{u}_n]^T (\boldsymbol{b}_n-\rho_n\ddot{\boldsymbol{u}}_n-c_n\dot{\boldsymbol{u}}_n)d\Omega-\int_{\Gamma_t}[\delta\boldsymbol{u}_n]^T\boldsymbol{t}_n\, d\Gamma=0 \tag{11}$$

한편, 임의 시간 t_n에서의 변위와 변형률, 또 그에 대응하는 가상변위와 가상변형률은 아래와 같다.

$$\boldsymbol{u}_n=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i[\boldsymbol{d}_i]_n \qquad \delta\boldsymbol{u}_n=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i[\delta\boldsymbol{d}_i]_n \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{B}_i[\boldsymbol{d}_i]_n \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_n=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{B}_i[\delta\boldsymbol{d}_i]_n \tag{13}$$

여기서, 첨자 i는 절점번호를, m은 전체 절점의 수를 의미한다. 또, $[\boldsymbol{d}_i]_n$는 절점 변위 백터를, $\boldsymbol{N}_i=N_i\,\boldsymbol{I}_2$는 전체 좌표계에 대한 절점 i에서의 형상

함수 매트릭스를, $\boldsymbol{B}_i$는 전체 좌표계에 대한 절점 i에서의 변형률-변위 관계 매트릭스를 각각 나타낸다. 이 때, 식(12), (13)을 식(11)에 대입하면, 임의의 가상변위 $[\delta \boldsymbol{u}_i]_n$에 대해서 결과식은 만족되어질 수 있고, 절점 i에 대한 계의 평형방정식은 아래와 같이 된다.

$$\int_\Omega [\boldsymbol{B}_i[\delta \boldsymbol{d}_i]_n]^T \boldsymbol{\sigma}_n \, d\Omega - \int_\Omega [\boldsymbol{N}_i[\delta \boldsymbol{d}_i]_n]^T (\boldsymbol{b}_n - \rho_n \ddot{\boldsymbol{u}}_u - c_n \dot{\boldsymbol{u}}_n) d\Omega - \int_{\Gamma_i} [\boldsymbol{N}_i[\delta \boldsymbol{d}_i]_n]^T \boldsymbol{t}_n \, d\Gamma = 0 \tag{14}$$

이 식은 가상변위 $[\delta \boldsymbol{d}_i]_n$에 대해 언제나 만족되어지므로,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [\boldsymbol{B}_i]^T \boldsymbol{\sigma}_n \, d\Omega - \int_\Omega [\boldsymbol{N}_i]^T \boldsymbol{b}_n \, d\Omega \\ &+ \int_\Omega [\boldsymbol{N}_i]^T \rho_n [N_1, N_2, \cdots, N_m] \\ &\{[\ddot{\boldsymbol{d}}_1]_n, [\ddot{\boldsymbol{d}}_2]_n, \cdots, [\ddot{\boldsymbol{d}}_m]_n\}^T d\Omega \\ &+ \int_\Omega [\boldsymbol{N}_i]^T c_n [N_1, N_2, \cdots, N_m] \\ &\{[\dot{\boldsymbol{d}}_1]_n, [\dot{\boldsymbol{d}}_2]_n, \cdots, [\dot{\boldsymbol{d}}_m]_n\}^T d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_i} [\boldsymbol{N}_i]^T \boldsymbol{t}_n \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

로 되고, 이것을 간단히 아래의 (16)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\boldsymbol{p}_i]_n - [\boldsymbol{f}_{Bi}]_n + [\boldsymbol{f}_{Ii}]_n + [\boldsymbol{f}_{Di}]_n - [\boldsymbol{f}_{\Gamma i}]_n = 0 \tag{16}$$

Isoparametric 유한요소를 사용하여, 임의의 한 요소에 대한 국소 변위를 고려하면, 식(12)의 첫 번째 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\boldsymbol{u}^{(e)}]_n = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{N}_i^{(e)} [\boldsymbol{d}_i^{(e)}] n \tag{17}$$

여기서, 상첨자 (e)는 임의의 요소를 나타내며, $\boldsymbol{N}_i(e)$는 그 요소에 대한 국소 좌표계의 형상함수를 나타낸다. 또, r은 한 요소당 절점수이다.같은 방법으로, 한 요소에 대한 변형률은 식(13)의 첫 번째 식에서

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}]_n = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{B}_i^{(e)} [\boldsymbol{d}_i^{(e)}]_n \tag{18}$$

과 같이 나타낼 수 있고, 이 때 $\boldsymbol{B}_i^{(e)}$는 국소 좌표계에 대한 한 요소의 변형률-변위 매트릭스이다. 또, 개별 요소의 체적 $d\Omega^{(e)}$는

$$d\Omega^{(e)} = h^{(e)} \, det \, \boldsymbol{J}^{(e)} \, d\xi \, d\eta \tag{19}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 $det \, \boldsymbol{J}^{(e)}$는 Jacobian 매트릭스의 행렬식이고, $h^{(e)}$는 축대칭 구조물의 경우 $2\pi r^{(e)}$로 정의된다.

이제 Gauss-Legendre product rules에 의한 수치적분을 사용하여, 임의의 한 요소에 작용하는 각각의 힘들을 나타내면 아래와 같다.

- 내부반력 :

$$[\boldsymbol{p}_i^{(e)}]_n = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [\boldsymbol{B}_i^{(e)}]^T \boldsymbol{\sigma}_n^{(e)} h^{(e)} \, det \boldsymbol{J}^{(e)} d\xi \, d\eta \tag{20}$$

- 물체력 :

$$[\boldsymbol{f}_{Bi}^{(e)}]_n = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [\boldsymbol{N}_i^{(e)}]^T \boldsymbol{b}_n^{(e)} h^{(e)} det \boldsymbol{J}^{(e)} d\xi \, d\eta \tag{21}$$

- 관성력 :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{f}_{Ii}^{(e)}]_n &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [\boldsymbol{N}_i^{(e)}]^T \rho_n^{(e)} [\boldsymbol{N}_1^{(e)}, \boldsymbol{N}_2^{(e)}, \cdots, \boldsymbol{N}_r^{(e)}] \\ &\quad h^{(e)} det \boldsymbol{J}^{(e)} d\xi \, d\eta \{[\boldsymbol{d}_1^{(e)}]_n, [\boldsymbol{d}_2^{(e)}]_n, \cdots, [\boldsymbol{d}_r^{(e)}]_n\}^T \\ &= \sum_{j=1}^{r} [\boldsymbol{M}_{ij}^{(e)}]_n [\ddot{\boldsymbol{d}}_j^{(e)}]_n \end{aligned} \tag{22}$$

- 감쇠력 :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{f}_{Di}^{(e)}]_n &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [\boldsymbol{N}_i^{(e)}]^T c_n^{(e)} [\boldsymbol{N}_1^{(e)}, \boldsymbol{N}_2^{(e)}, \cdots, \boldsymbol{N}_r^{(e)}] \\ &\quad h^{(e)} det \boldsymbol{J}^{(e)} d\xi \, d\eta \{[\boldsymbol{d}_1^{(e)}]_n, [\boldsymbol{d}_2^{(e)}]_n, \cdots, [\boldsymbol{d}_r^{(e)}]_n\}^T \\ &= \sum_{j=1}^{r} [\boldsymbol{C}_{ij}^{(e)}]_n [\dot{\boldsymbol{d}}_j^{(e)}]_n \end{aligned} \tag{23}$$

- 경계표면력 :

$$[\boldsymbol{f}_{Ti}^{(e)}]_n = \int_{\Gamma_i^{(e)}} [\boldsymbol{N}_i^{(e)}]^T \boldsymbol{t}_n^{(e)} \, d\Gamma \tag{24}$$

3. 비선형 이론

3-1. 재료 비선형성

탄·점소성 재료 모델의 변형률 속도(strain rate)는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n &= [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e]_n + [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}]_n \\ &= [\boldsymbol{D}]^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_n + \gamma \langle \Phi_n(F) \rangle \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_n} \end{aligned} \tag{25}$$

여기서, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$, $[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e]_n$, $[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}]_n$과 $\boldsymbol{F}$는 각각 임의 시간구간 $\boldsymbol{t}_n$에서 전체 탄성, 점·소성 변형률 속도 성분과 항복 함수를 의미하며, 응력과 변형률의 관계는 다음 식들로 정의된다.

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{\varepsilon}_e]_n \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = [\boldsymbol{\varepsilon}_e]_n + [\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}]_n \quad (27)$$

$<\Phi_n(F)> = 0$; 항복이 일어나지 않을 경우

$= 1$; 항복이 일어날 경우 (28)

따라서, 내부저항력은,

$$\boldsymbol{p}_n = \int_\Omega [\boldsymbol{B}]^T \boldsymbol{D}\{\boldsymbol{\varepsilon}_n - [\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}]_n\}\, d\Omega \quad (29)$$

점 · 소성 변형률을 결정하는 방정식의 이산화는 Δt 이산화 시간구간에서의 다음 함수관계의 가정에 기초를 두고 있다.

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}]_n = \gamma < \Phi_n(F) > \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_n} \quad (30)$$

여기서, Euler 적분법을 적용하면,

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}]_{n+1} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}]_n + [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}]_n \, \Delta t \quad (31)$$

시간증분 Δt에 대한 안정성은 'flow rule'에서 적용되는 점 · 소성 퍼텐셜의 특정한 형에 의해서 결정된다.

3-2. 기하학적 비선형성

기하학적 비선형 탄성 거동을 나타내기 위해서 본 논문에서는 Total Lagrangian을 사용한다. 중앙차분법에 의한 기하학적 비선형 효과를 고려하기 위한 수정 사항은 아래와 같다.

(1) 변형률-변위 매트릭스 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{d}_n)$의 수정

(2) 변형 Jacobian 매트릭스 $\boldsymbol{J}_D(\boldsymbol{d}_n)$을 이용한 변형률 계산

만약, 임의의 구조물에 있어 한 요소의 초기의 위치가 $\boldsymbol{x}_0$이고, 시간 t_n에서의 총 변위 벡터가 $\boldsymbol{u}_n$이라면 그 요소의 좌표는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_n \quad (32)$$

Green 변형률을 사용한 Total Lagrangian 정식화는 (33)식과 같다.

$$\boldsymbol{E}_n = \frac{1}{2}\left[[\boldsymbol{J}_D]_n^T [\boldsymbol{J}_D]_n - \boldsymbol{I}\right] \quad (33)$$

여기서, 변형률 성분을 선형과 비선형 성분으로 나타내면 (34)식과 같이 되고, 이들 각각은 (13)식과 (35)식으로 정의된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = [\boldsymbol{\varepsilon}_L]_n + [\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}]_n \quad (34)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}]_n = \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}_\theta]_n \, \theta_n \quad (35)$$

따라서, 가상 Green 변형률은 (40)식으로 된다.

$$[\delta\boldsymbol{\varepsilon}]_n = [\delta\boldsymbol{\varepsilon}_L]_n \, [\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}]_n = [\delta\boldsymbol{\varepsilon}_L]_n \, [\boldsymbol{A}_\theta]_n \, \delta\theta_n \quad (36)$$

그러므로 식(11)을 다시 써보면 (37)식으로 표현된다.

$$\int_\Omega [\delta\boldsymbol{\varepsilon}_n]^T \boldsymbol{\sigma}_n d\Omega - \int_\Omega [\delta\boldsymbol{u}_n]^T (\boldsymbol{b}_n - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_n - c\dot{\boldsymbol{u}}_n) d\Omega - \int_{\Gamma_t} [\delta\boldsymbol{u}_n]^T \boldsymbol{t}_n d\Gamma = 0 \quad (37)$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}_n$은 Piola-Kirchhoff 응력이다.

이 때, 유한요소 이산화법을 이용하여 변위의 변화율 θ_n을 절점변위로 나타내면 (38)식과 같이 된다.

$$\theta_n = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{G}_i \, [\boldsymbol{d}_i]_n \quad (38)$$

여기서, $\boldsymbol{G}_i$는 직교 형상함수의 도함수를 나타낸다.

같은 방법으로, θ_n의 가상성분은 (39)식과 같이 된다.

$$\delta\theta_n = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{G}_i \, [\delta\boldsymbol{d}_i]_n \quad (39)$$

한편, 변형률-변위의 선형 및 비선형 성분은 각각 (40), (41)식과 같이 나타낼 수 있으므로, Green 변형률의 벡터 성분 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$은 (42)식과 같이 표현된다.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_L]_n = \sum_{i=1}^{m} [\boldsymbol{B}_{Li}]_n \, [\boldsymbol{d}_i]_n \quad (40)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}]_n = \sum_{i=1}^{m} [\boldsymbol{B}_{NLi}]_n \, [\boldsymbol{d}_i]_n \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^{m} \{[\boldsymbol{B}_{Li}]_n + \frac{1}{2}[\boldsymbol{B}_{NLi}]_n\} \, [\boldsymbol{d}_i]_n \quad (42)$$

여기서, 비선형 변형률-변위 매트릭스와 가상 변형률은 각각 (43) 및 (44)식으로 표현된다.

$$[\boldsymbol{B}_{NLi}]_n = [\boldsymbol{A}_\theta]_n \, \boldsymbol{G}_i \quad (43)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^{m} [\boldsymbol{B}_i]_n \, [\delta\boldsymbol{d}_i]_n \quad (44)$$

여기서, $[\boldsymbol{B}_i]_n = [\boldsymbol{B}_{Li}]_n + [\boldsymbol{B}_{NLi}]_n$이다.

이 때, (44)식을 (11)식에 대입하여 정리한 결과

식은, 임의의 가상변위에 대하여 언제나 만족되어야 하므로, 결국 식(16)과 같은 꼴로 됨을 알 수 있다. 그런데 이 경우 식(16)의 $[\boldsymbol{B}_i]^T$은 $[\boldsymbol{B}_i]_n^T$로 되어, 기하학적 비선형을 고려하면 변형률이 시간에 따라 변해감을 알 수 있다.

4. 시간 적분법

4-1. Implicit 알고리즘

비선형 동적 과도상태의 문제를 결정하는 준 이산계(semi-discrete system)의 방정식을 적분하기 위해 Newmark β법의 예측-수정 형식을 사용한다. 일반적으로 임의의 시간구간 $t_n+\Delta_t$에서의 계의 운동방정식은

$$\boldsymbol{M}\,a_{n+1}+\boldsymbol{p}_{n+1}=\boldsymbol{f}_{n+1} \tag{45}$$

이다. 여기서, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{a}_{n+1}$, $\boldsymbol{p}_{n+1}$, $\boldsymbol{f}_{n+1}$은 각각 질량 매트릭스, 가속도 벡터, 내력 벡터 및 외력 벡터를 나타낸다. 이 때 내력 벡터는 변위 $\boldsymbol{d}_{n+1}$, 속도 $\dot{\boldsymbol{d}}_{n+1}$, 그리고 이것들의 이력(history)에 따른 것이다. 즉,

$$[\boldsymbol{K}_T]_{n+1}=\frac{\partial \boldsymbol{p}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{d}_{n+1}} \text{ and } [\boldsymbol{C}_T]_{n+1}=\frac{\partial \boldsymbol{p}_{n+1}}{\partial \dot{\boldsymbol{d}}_{n+1}} \tag{46}$$

로써, 각각 접선 강성률 매트릭스와 감쇠 매트릭스를 나타낸다.

한편, Newmark β법에서는 식(48)과 함께 아래의 식을 만족시켜야 한다. 즉,

$$\boldsymbol{d}_{n+1}=\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}+\Delta t^2\beta\,\boldsymbol{a}_{n+1} \tag{47}$$

$$\boldsymbol{v}_{n+1}=\tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1}+\Delta t\,\gamma\,\boldsymbol{a}_{n+1} \tag{48}$$

여기서,

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}=\boldsymbol{d}_n+\Delta t\,\boldsymbol{v}_n+\Delta t^2\gamma(1-2\beta)\,\boldsymbol{a}_n/2 \tag{49}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1}=\boldsymbol{v}_n+\Delta t(1-\gamma)\,\boldsymbol{a}_n \tag{50}$$

로 표현된다. 또한 $\boldsymbol{d}_n$, $\boldsymbol{v}_n$ 및 $\boldsymbol{a}_n$은 각각 $\boldsymbol{d}(t_n)$, $\dot{\boldsymbol{d}}(t_n)$ 및 $\ddot{\boldsymbol{d}}(t_n)$에 대응하는 근사치이고, β와 γ는 임의의 변수로써 해의 정확도와 안정성을 좌우한다. 또, $\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1}$은 예측치이고, $\boldsymbol{d}_{n+1}$, $\boldsymbol{v}_{n+1}$은 수정치이다. 또, 초기치로 변위 $\boldsymbol{d}_0$와 속도 $\boldsymbol{v}_0$가 주어지고, 아래 식에 따라 가속도 $\boldsymbol{a}_0$를 구할 수 있다. 즉, (51)식으로부터 $\boldsymbol{M}$이 대각선 행렬이 아니라면, $\boldsymbol{a}_0$는 인수의 분해, 전방축소 그리고 후방대입 등을 통해 얻어진다.

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{f}_0+\boldsymbol{p}(\boldsymbol{d}_0,\boldsymbol{v}_0) \tag{51}$$

그러므로 식(45)에서 (50)까지를 Newton-

Table. 1. Implicit algorithm

1	Set iteration counter $i=0$.	
2	Begin predictor phase in which we set	
	$d_{n+1}^{(i)}=\tilde{d}_{n+1}=d_n+\Delta t v_n+\Delta t^2(1-2\beta)a_n/2$	(1)
	$v_{n+1}^{(i)}=\tilde{v}_{n+1}=v_n+\Delta t(1-\gamma)a_n$	(2)
	$a_{n+1}^{(i)}=[d_{n+1}^{(i)}-d_{n+1}]/(\Delta t^2\beta)=0.$	(3)
3	Evaluate residual forces using the equation	
	$\Psi^{(i)}=f_{n+1}-Ma_{n+1}^{(i)}-p(d_{n+1}^{(i)},v_{n+1}^{(i)}).$	(4)
4	If required, form the effective stiffness matrix using the expression	
	$K^*=M/(\Delta t^2\beta)+\gamma C_T/(\Delta t\beta)+K_T(d_{n+1}^{(i)})$	(5)
	Otherwise use a previously calculated K*.	
5	Factorize, forward reduction and backsubstitute as required to solve	
	$K^*\Delta d^{(i)}=\Psi^{(i)}.$	(6)
6	Enter corrector phase in which we set	
	$d_{n+1}^{(i+1)}=d_{n+1}^{(i)}+\Delta d^{(i)}$	(7)
	$a_{n+1}^{(i+1)}=[d_{n+1}^{(i+1)}-\tilde{d}_{n+1}]/(\Delta t^2\beta)$	(8)
	$v_{n+1}^{(i+1)}=v_{n+1}+\Delta t\gamma a_{n+1}^{(i+1)}.$	(9)
7	If $\Delta d^{(i)}$ and/or $\Psi^{(i)}$ do not satisfy the convergence conditions then set i=i+1 and go to step 3, otherwise continue.	
8	Set $d_{n+1}=d_{n+1}^{(i+1)}$	(10)
	$v_{n+1}=v_{n+1}^{(i+1)}$	(11)
	$a_{n+1}=a_{n+1}^{(i+1)}$	(12)
	for use in the next time step. Also set n=n+1, form p and begin next time step.	

Raphson법과 비슷한 해법을 사용하여 해를 얻는 '유효정적문제(effective static problem ; $\boldsymbol{K}^*\Delta\boldsymbol{d}^{[i]} = \Psi^{[i]}$' 를 통하여 풀 수 있다.

이상에서 언급한 내용을 요약하여 알고리즘을 구성해 보면 Table. 1과 같이 된다.

4-2. Explicit 알고리즘(예측자-수정자법)

Newmark법을 이용한 Explicit 예측자-수정자 알고리즘에서는 질량 매트릭스 $\boldsymbol{M}$이 대각선 행렬이라고 가정한다.

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{n+1}+\boldsymbol{p}(\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1})=\boldsymbol{f}_{n+1} \tag{52}$$

에서 수정자의 값이 그 앞 단계의 값에서 계산되어지므로 연산방식이 explicit하게 된다. 그리고, 예측자와 수정자의 알고리즘을 요약하면 Table. 2와 같다.

4-3. Implicit-Explicit 알고리즘

두 종류(Implicit, Explicit 알고리즘)의 요소가 공존하는 유한요소 매쉬에 대한 알고리즘을 검토해 보면, Implicit-Explicit 알고리즘에서는 각 시간구간내에서 아래의 식을 만족하기 위해서 반복계산을 행한다. 여기서, 상첨자 I와 E는 각각 Implicit 요소 그룹과 Explicit 요소 그룹을 의미한다.

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{n+1}+\boldsymbol{p}^I(\boldsymbol{d}_{n+1}, \boldsymbol{v}_{n+1})+\boldsymbol{p}^E(\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1})=\boldsymbol{f}_{n+1} \tag{53}$$

여기서, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^I+\boldsymbol{M}^E$이고, $\boldsymbol{f}_{n+1}=\boldsymbol{f}_{n+1}^I+\boldsymbol{f}_{n+1}^E$이다. 그리고, $\boldsymbol{M}^E$는 대각선 행렬이다. Table. 5는 Implicit-Explicit 알고리즘을 요약하여 나타낸다. Implicit-Explicit 알고리즘의 구성은 Implicit 알고리즘과 유사하다. 그러나, 강성률 매트릭스 $\boldsymbol{K}^*$의 구성에 있어, Explicit 그룹에 대응하는 영역은 대각선 행렬이고, Implicit 그룹에 대응하는 영역이 연결되어져 있는 모양이다.

■ 예측치(Predictor value)의 선택 :

Table. 5의 식(i)~(iii)은 Hughes와 Liu[17]가 제안한 근사식이고, 그 이외의 다른 경우 :

(1) Hughes와 Liu의 예측치 ;

- $\boldsymbol{d}_{n+1}^{[0]}=\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}=\boldsymbol{d}_n+\Delta t\,\boldsymbol{v}_n+\Delta t^2(1-2\beta)\,\boldsymbol{a}_n/2$
- $\boldsymbol{v}_{n+1}^{[0]}=\tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1}=\boldsymbol{v}_n+\Delta t(1-\gamma)\,\boldsymbol{a}_n$
- $\boldsymbol{a}_{n+1}^{[0]}=[\boldsymbol{d}_{n+1}^{[0]}-\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}]/(\Delta t^2\,\beta)$ (54)

(2) Alternative 예측치 ;

- $\boldsymbol{d}_{n+1}^{[0]}=\boldsymbol{d}_n$
- $\boldsymbol{v}_{n+1}^{[0]}=\boldsymbol{v}_n$
- $\boldsymbol{a}_{n+1}^{[0]}=[\boldsymbol{d}_{n+1}^{[0]}-\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}]/(\Delta t^2\,\beta)$

(여기서, $\tilde{\boldsymbol{d}}_{n+1}=\boldsymbol{d}_n+\Delta t\,\boldsymbol{v}_n+\Delta t^2(1-2\beta)/2$) (55)

Table. 2. Explicit algorithm

1	Begin predictor phase by setting	
	$d_{n+1}^{[0]}=\tilde{d}_{n+1}=d_n+\Delta t v_n+\Delta t^2(1-2\beta)a_n/2$	(1)
	$v_{n+1}^{[0]}=\tilde{v}_{n+1}=v_n+\Delta t(1-\gamma)a_n$	(2)
	$a_{n+1}^{[0]}=0.$	(3)
2	Evaluate the residual forces using the equation	
	$\Psi^{[0]}=f_{n+1}-p(d_{n+1}^{[0]}, v_{n+1}^{[0]}).$	(4)
3	If required, form the 'effective' stiffness matrix using the expression	
	$K^*=M/(\Delta t^2\beta).$	(5)
	Note that as the mass matrix M does not change K^* will be formed once only.	
4	Perform factorization, forward reduction and backsubstitution as required to solve	
	$K^*\Delta d^{[0]}=\Psi^{[0]}$	(6)
5	Enter the corrector phase in which we set	
	$d_{n+1}^{[1]}=d_{n+1}^{[0]}+\Delta d^{[0]}$	(7)
	$a_{n+1}^{[1]}=d_{n+1}^{[1]}-\tilde{d}_{n+1}]/(\Delta t^2\beta)$	(8)
	$v_{n+1}^{[1]}=v_{n+1}+\Delta t\gamma a_{n+1}^{[1]}$	(9)
6	Set $d_{n+1}=d_{n+1}^{[1]}$	(10)
	$v_{n+1}=v_{n+1}^{[1]}$	(11)
	$a_{n+1}=a_{n+1}^{[1]}$	(12)
	for use in the next time step. Also set $n=n+1$, form p and begin next time spep.	

Table. 3. Implicit - explicit algorithm

1	Set iteration counter $i=0$.	
2	Begin predictor phase in which we set	
	$d_{n+1}^{(i)}=\tilde{d}_{n+1}=d_n+\Delta t v_n+\Delta t^2(1-2\beta)a_n/2$	(1)
	$v_{n+1}^{(i)}=\tilde{v}_{n+1}=v_n+\Delta t(1-\gamma)a_n$	(2)
	$a_{n+1}^{(i)}=[d_{n+1}^{(i)}-d_{n+1}]/(\Delta t^2\beta)=0$	(3)
3	Evaluate residual forces using the equation	
	$\Psi^{(i)}=f_{n+1}-Ma_{n+1}^{(i)}-p^I(d_{n+1}^{(i)}, v_{n+1}^{(i)})-p^E(\tilde{d}_{n+1}, \tilde{v}_{n+1})$	(4)
4	If required, form the effective stiffness matrix using the expression	
	$K^*=M/(\Delta t^2\beta)+\gamma C_T^I/(\Delta t\beta)+K_T^I(d_{n+1}^{(i)})$	(5)
	Otherwise use a previously calculated K*.	
	(Note that $K_T^I=\partial p^I/\partial d$ and $C_T^I=\partial p^I/\partial v$).	
5	Perform factorization, forward reduction and backsubstitution as required to solve	
	$K^*\Delta d^{(i)}=\Psi^{(i)}$	(6)
6	Enter corrector phase in which we set	
	$d_{n+1}^{(i+1)}=d_{n+1}^{(i)}+\Delta d^{(i)}$	(7)
	$a_{n+1}^{(i+1)}=[d_{n+1}^{(i+1)}-\tilde{d}_{n+1}]/(\Delta t^2\beta)$	(8)
	$v_{n+1}^{(i+1)}=v_{n+1}+\Delta t\gamma a_{n+1}^{(i+1)}$	(9)
7	If $\Delta d^{(i)}$ and/or $\Psi^{(i)}$ do not satisfy the convergence conditions, then set i=i+1 and go to step 3, otherwise continue.	
8	Set $d_{n+1}=d_{n+1}^{(i+1)}$	(10)
	$v_{n+1}=v_{n+1}^{(i+1)}$	(11)
	$a_{n+1}=a_{n+1}^{(i+1)}$	(12)
	for use in the next time step. Also set $n=n+1$, form p and begin next time step.	

여기서, (2)의 방법은 $\gamma=1/2$일 때의 Implicit 요소만을 사용하고, 큰 시간구간을 고려한 탄소성 문제에 적당하다.

■ 안정성의 범위

만약 $\gamma\geq 1/2$이고 $\beta=(\gamma+1/2)^2/4$이면, Implicit 요소 그룹에서 무조건 안정한 해를 얻을 수 있다. 그런 다음, Explicit 요소 그룹에 의해 시간증분의 크기가 제한을 받게 되는데, $\gamma=1/2$일 경우, 임계 시간증분의 크기는 다음과 같다.

$$\Delta t_{crit}=2/\omega_{\max} \tag{56}$$

여기서, $\omega_{\max}$는 Explicit 그룹에서의 최고 주파수이다. 또한, $\omega_{\max}$는 (57)식에서 구하여지고, 이때 $\omega_{\max}^{(e)}$는 Explicit 그룹에서 e번째 요소의 최고 주파수이다.

$$\omega_{\max}\leq\max(\omega_{\max}^{(e)}) \tag{57}$$

한편, 접선 강성률 매트릭스 $\boldsymbol{K}_T$는 각 시간증분마다 변해 가므로, 엄격히 말해서 최고 주파수는 각 단계의 시작점에서 계산되어져야 한다. 탄소성 해석시, 구조물은 보다 유연해지므로, 식(57)을 사용해야 할 것이다. 그러나 임계 시간증분의 보다 나은 평가를 위해 비선형 고유치가 계산되어져야 한다.

만약 Implicit 요소만 고려되고, $\gamma\geq 1/2$, $\beta=(\gamma+1/2)^2/4$이면, 주기 연장과 진폭 감소의 여부에 대한 오차 조사를 행해야 한다. 즉, 최장 주기의 1/100로 한정된 시간구간의 정확성에 따른 시간구간의 증분을 고려해야 한다. 한편, 수치적분의 오차에 기인하는 진폭의 감소는 Houbolt와 Wilson θ법[16]에서 고차 모우드 응답이 제거되는 것으로 알려져 있다. 그러나, Newmark의 '일정평균가속도법'을 사용할 경우에는 진폭 감소가 고려되지 않으며, 고주파수 응답은 해에 존재하게 된다. 만약 Newmark법을 상용하여 진폭 감소를 고려하려면 $\gamma>1/2$일 경우를 고려해야 한다.

4 - 4. Tangential stiffness의 계산

탄 · 소성 모델에 대한 해석에는 임의의 시간 $t+\Delta t$에 대한, 정적문제에서의 응력과 접선 강성률 매트릭스의 계산이 필요하다. 이때, 기하학적인 비선형을 정의한다면, 탄성효과는 Total Lagrangian

정식화를 사용하여 고려하면 되므로 Implicit 요소에 대한 내력 벡터는 임의시간 $t_n+\Delta t$에서 (58)식과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{p}^{I}_{n+1} = \int_{\Omega}[\boldsymbol{B}^{I}]^{T}_{n+1}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\,d\Omega \tag{58}$$

따라서 접선 강성률 매트릭스는 (59)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}^{I}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{d}_{n+1}} = [\boldsymbol{K}_T{}^{I}]_{n+1} = \int_{\Omega^I}[\boldsymbol{B}^{I}_{NL}]^{T}_{n+1}\,\boldsymbol{D}_{n+1}[\boldsymbol{B}^{I}_{NL}]_{n+1}\,d\Omega + \int_{\Omega^I}[\boldsymbol{G}]^{T}_{n+1}\,\boldsymbol{S}_{n+1}\,\boldsymbol{G}_{n+1}\,d\Omega \tag{59}$$

여기서, $\boldsymbol{D}_{n+1}$은 탄·소성계수 매트릭스이고, $[\boldsymbol{B}^{I}_{NL}]_{n+1}$은 비선형 변형률-변위 매트릭스이며, 축대칭 문제에서 $\boldsymbol{S}_{n+1}$과 $[\boldsymbol{G}_i]_{n+1}$ 매트릭스는 각각 다음의 (60), (61)식과 같이 정의된다.

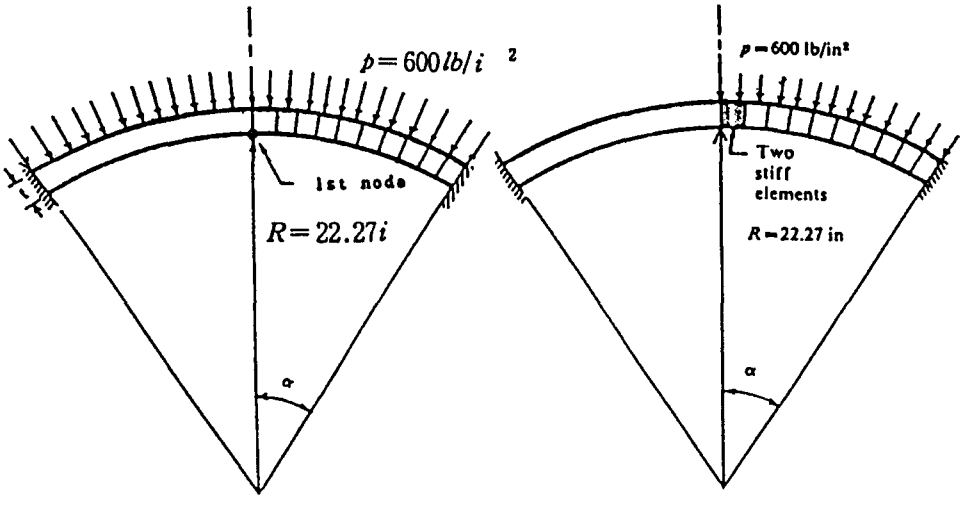
$$\boldsymbol{S}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_r I_2 & \tau_{rz} I_2 & 0 \\ \tau_{rz} I_2 & \sigma_z I_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix}_{n+1} \tag{60}$$

$$[\boldsymbol{G}_i]_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 & \frac{N_i}{r} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 \end{bmatrix}^{T} \tag{61}$$

해석 결과 및 고찰

Fig. 2와 같은 축대칭 구각(axisymmetric spherical shell)에 대하여, Table. 4와 같이 물성치 및 해석 방식(integration scheme)에 따라 크게 두 가지로 나누었으며, 하중 조건은 Fig. 3과 같이 하였다. 시간 적분 방식에 따른 두 구조물의 i) 탄성 미소변형, ii) 탄성 기하학적 비선형, iii) 탄·소성 미소변형의 각 경우에 대한 해석 결과를 검토코자 한다. 단, 미소 탄성 변형은 기하학적 비선형성을 고려하지 않고 해석하였을 경우를 나타낸다.

Fig. 4에서 Fig. 13까지의 해석 결과는 Fig. 2에 나타낸 바와 같이 절점에서의 수직 방향 변위 응답을 나타낸다. Fig. 4은 original 쉘에 Implicit법을 적용하고, 탄성 미소변형과 탄성 대변형을 가정하였을 때를 비교한 것으로서, 기하학적 비선형성을 고려한 경우의 응답이 오른쪽으로 약간 shift하고 있음을 보인다. Fig. 5은 original 쉘에 Implicit법을 적용하고, 탄.소성 미소변형의 경우를 고려할 때의 변위 응답을 나타내며, Fig. 6는 Fig. 2(b)와 같은 modified 쉘에 combined Implicit - Explicit 법을 적용하였을 때의 탄·소성 거동을 나타낸다. 또한 Fig. 7은 Fig. 5과 Fig. 6를 비교한 그림으로, combined Implicit - Explicit법과 all Implicit법



(a) Original Shell (b) Modified Shell

Fig. 2. Spherical shell finite element mesh and modified spherical shell with stiff elements

Table. 4. The properties and period of original and modified spherical shell

		Original Spherical Shell	Modified Spherical Shell
Properties :			
• Internal Radius	R	22.27 in.	22.27 in.
• Thickness of Shell	t	0.41 in.	0.41 in.
• Semi Angle	a	26.67 deg.	26.67 deg.
• Elastic Modulus	E	10.5×10^{6} lb/in^2	10.5×10^{6} lb/in^2
• Poisson's Ratio	ν	0.3	0.3
• Yield Stress	σ_y	0.024×10^{6} lb/in^2	0.5×10^{6} lb/in^2
• Tangent Hardening Modulus	E_T	0.21×10^{6} lb/in^2	0.21×10^{6} lb/in^2
• Mass Density	ρ	2.45×10^{-4} lb sec^2/in^4	0.78×10^{-4} lb sec^2/in^4
• Step Distributed Pressure	p	600 lb/in^2	600 lb/in^2
Fundamental period of shell	T_f	0.55×10^{-3} sec.	0.592×10^{-3} sec.
Smallest time period	T_h	1.38×10^{-6} sec.	0.776×10^{-6} sec.

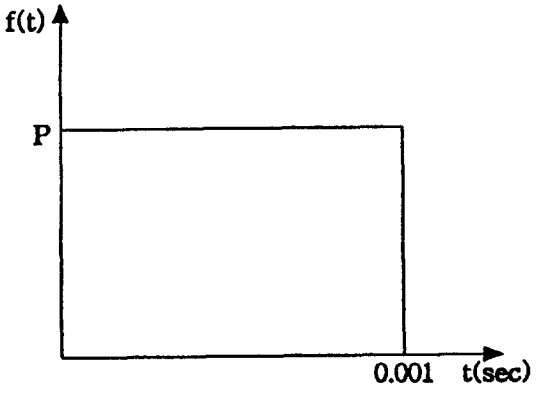


Fig. 3. The load condition
(Heavy - side function)

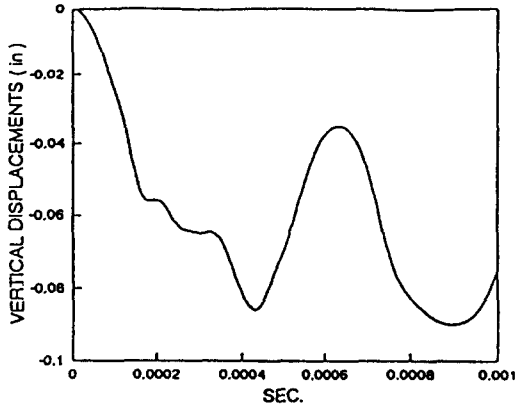


Fig. 5. Elasto - plastic small displacement all Implicit elements
$\Delta t = 0.5\times10^{-5}$ sec

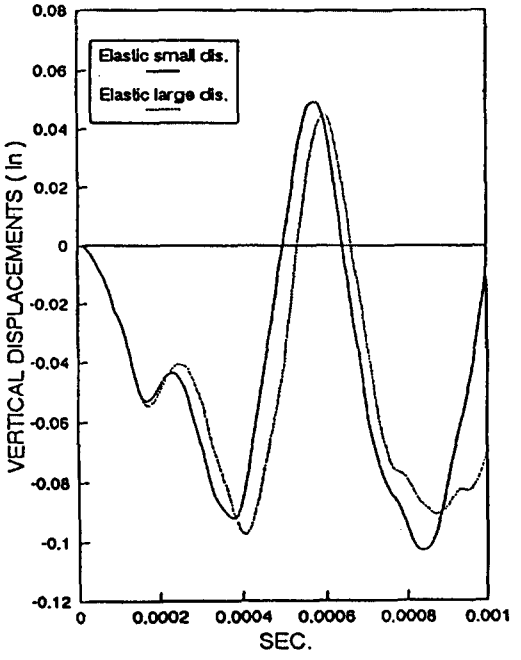


Fig. 4. Elastic small & large displacement all Implicit elements
$\Delta t = 0.5\times10^{-5}$ sec

에 의한 해석 결과가 거의 비슷한 변위 응답의 경향을 보이나 약간의 차이가 남을 보인다. Fig. 8은 original 쉘의 탄성 미소변형과 탄성 대변형 거동에 대한 Implicit법과 Explicit법을 비교한 것으로서, 계산 결과의 응답은 거의 비슷한 경향을 보이나, 계산 시간(CPU time)에 있어서 Implicit법이 훨씬 짧게 걸렸다. 이 때, Implicit법과 Explicit법

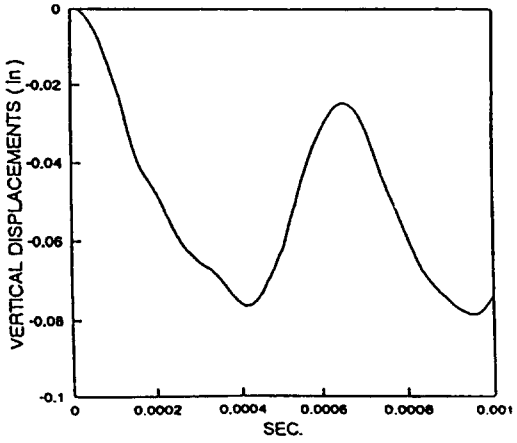


Fig. 6. Elasto - plastic small displacement combined Implicit - Explicit elements
$\Delta t = 0.4 \times 10^{-6}$ sec

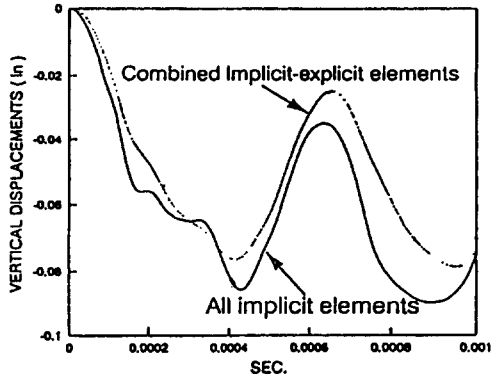


Fig. 7. Elasto - plastic small displacement all Implicit elements : Combined elements
$\Delta t = 0.5 \times 10^{-5}$ sec : 0.4×10^{-6} sec

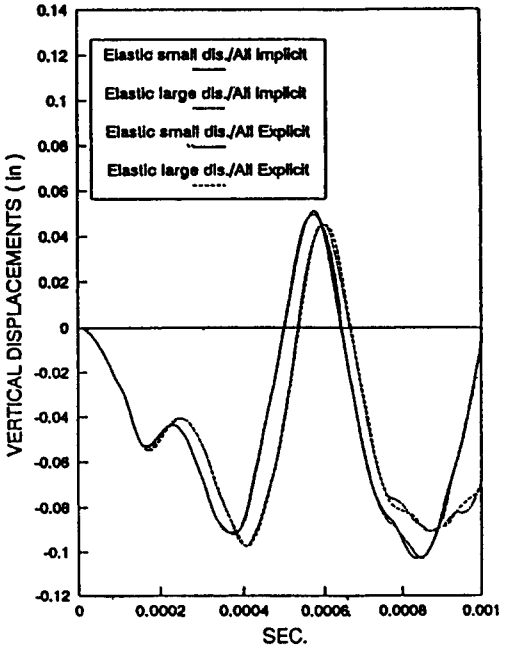


Fig. 8. Elasto - plastic small displacementall Implicit elements : All Explicit elements
$\Delta t = 0.5 \times 10^{-5}$ sec : 0.25×10^{-6} sec

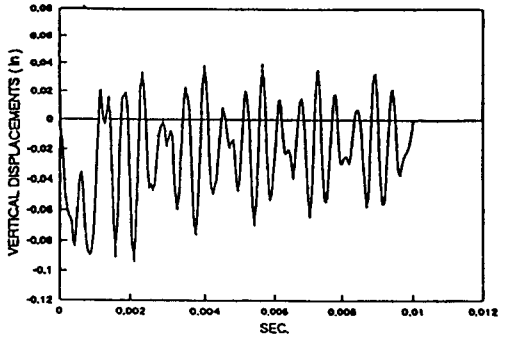


Fig. 9. Elasto - plastic small displacement all Implicit elements
$\Delta t = 0.7 \times 10^{-5}$ sec

의 안정성 확보를 위한 시간증분 Δt의 크기는 각각 0.5E-5초 및 0.25E-6초로 하였다. 비선형 과도상태 동적 응답의 문제와 같은 경우에 Implicit법이 계산 시간 면에서 Explicit법보다 훨씬 유리함이 확인되었다. 즉, 두 방법의 CPU time에 있어서 전자가 약 16.4초 정도이고 후자는 약 120.0초 정도 소요되었다. Fig. 9와 Fig. 10은 Implicit법을 적용하여, 탄·소성 미소변형의 경우에 시간증분 Δt의 크기를 충분히 크게(Δt=0.7E-5초, =0.9×10E-5초) 했을 때의 거동을 나타내며, Fig. 11는 두 경우를 비교한 그림이다. 여기서 Implicit법은 Δt의 크기를 조금 크게 해도 거의 유사한 결과를 보이나, 변위 응답의 정확도에 다소 문제가 잇음을 보임을 알 수 있다. Fig. 12는 Implicit법을 적용하고, 탄·소성 미소변형을 고려할 때, 작용 하중의 크기에 따른 거동을 나타내며, Fig. 13은 modified 쉘에 대하여 combined Implicit-Explicit법을 적용하고, Δt=0.5E-6초로 크게 했을 때 응답의 발산을 보임을 알 수 있다.

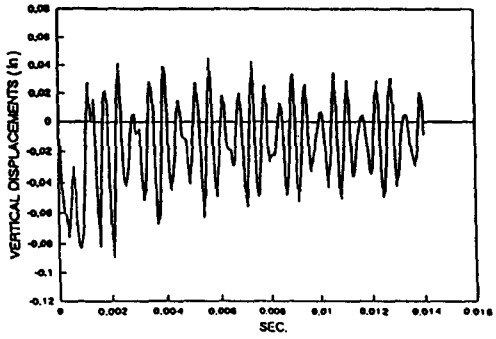


Fig. 10. Elasto - plastic small displacement combined Implicit - Explicit elements
$\Delta t = 0.9 \times 10^{-6}$sec

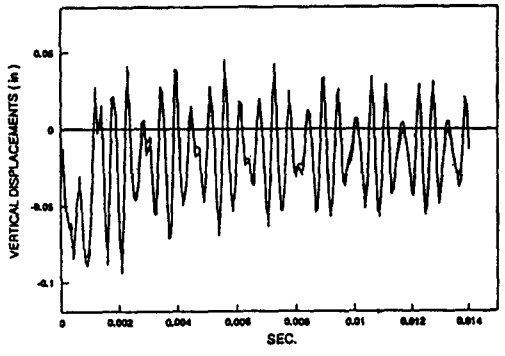


Fig. 11. Elasto - plastic small displacement all Implicit elements
$\Delta t = 0.5 \times 10^{-5}$sec : 0.9×10^{-6}sec

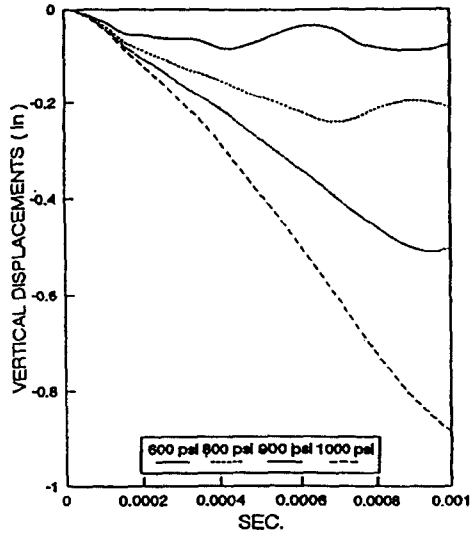


Fig. 12. Elasto - plastic small displacement combined Implicit - Explicit elements
$\Delta t = 0.5 \times 10^{-6}$sec

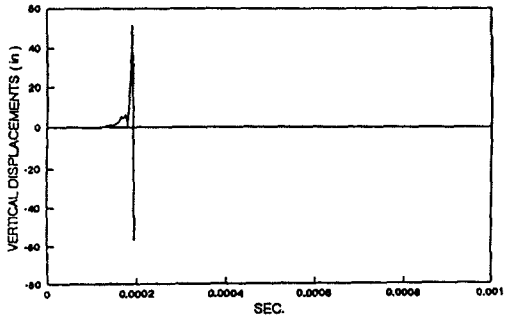


Fig. 13. Elasto - plastic small displacement combined Implicit - Explicit elements
$\Delta t = 0.5 \times 10^{-6}$sec

결 론

이상과 같은 결과로부터, 기하학적 및 재료적 비선형성을 고려했을 때, 축대칭 쉘의 비선형 과도상태에 대한 동적 응답 해석으로 아래의 결론을 얻을 수 있다.

1. Implicit법과 Explicit법의 계산 결과는 Fig. 7에서 보는 바와 같이 거의 차이가 없고, 다만 계산 수행시간에 있어 Explicit법이 짧은 시간증분을 취해야 하므로 시간증분의 숫자가 증가함에 따른 계산 시간이 많이 요구된다. 따라서, Implicit법이 계산 속도면에서 훨씬 유리하다고 할 수 있다.

2. 강성이 증가된 modified 쉘을 모든 요소를 Explicit($\Delta t = 0.25E-6$)로 계산할 경우 시간증분의 크기를 combined Implicit - Explicit 요소($\Delta t = 0.4E-6$)에 비해 1 : 1.6 정도로 줄여주어야 하는데, 이것은 요소의 강성이 증가하면 그 요소의 고유진동수도 증가하므로 임계 시간증분의 크기를 식(56)에 의해 작게 취해 주어야 함을 의미하는 것이다.

3. 위의 결론들로부터 Implicit법은 비교적 큰 시간증분을 취해도 해의 수렴이 안정하고 계산 시간도 짧지만, 대상 구조물의 요소수가 늘어날 경우 유효 강성률 매트릭스의 형성에 따른 많은 연산과정과 시간이 소요된다는 단점이 있다. 그러므로 일반적인 경우에는 그 구조물의 기하학적 모양이나 재료 특성을 감안하여, stiff한 요소는 Implicit법을 적용하고, 나머지는 Explicit법을 적용하는

combined method가 효과적일 것으로 판단된다. 한편, 탄 · 소성 해석시, 보다 안정한 해를 얻기 위해서는 Newmark 알고리즘의 적분 계수 γ와 β를 각각 0.55와 0.276으로 취해야 한다.

참고문헌

1) T. Von Karman and H. S. Tsien, "The Buckling of Spherical Shells by External Pressure", J. of the Aeron. Sci., Vol. 7, 1939, pp. 43 - 50
2) T. Von Karman, I. G. Dunn and H. S. Tsien, "The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures", J. of the Aeron. Sci., Vol. 7, 1940, pp. 276 - 289
3) T. Von Karman and H. S. Tsien, "The Buckling of Thin Cylinderical Shells under Axial Compression", J. of the Aeron. Sci., Vol. 8, 1941, pp. 303 - 312
4) R. Courant, "Variational Methods for the Solution of Problem of Equilibrium and Vibration", Bull. of American Mathematical Society, Vol. 49, 1943, pp. 1 - 23
5) M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. of the Aeron. Sci., Vol. 23, No. 9, 1956, pp. 805 - 823
6) J. H. Argyris, S. Kelsey and H. Kaml, "Matrix Methods in Structural Analysis", AGARD - ograph 72, Pergamon Press, 1964
7) M. Khojasteh - Bakht, "Analysis of Elastic - Plastic Shells of Revolution under Axisymmetric Loading by the Finite Element Method", Ph. D. Dissert., Univ. of California, Berkeley, Report No. SESM67 - 8, 1967
8) P. V. Marcal and I. P. King, "Elastic - Plastic Analysis of Two - Dimensional Stress System by the Finite Element Method", Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, No. 3, pp. 143 - 145
9) S. Yaghmai, "Incremental Analysis of Large Deformations in Mechanics of Solids with Applications to Axisymmetric Shells of Revolution", Ph. D. Dissert., Univ. of California, Berkeley, Report No. SESM68 - 17, 1971
10) P. K. Larsen, "Large Displacement Analysis of Shells of Revolution Including Creep Plasticity and Viscoelasticity", Ph. D. Dissert., Univ. of California, Berkeley, Report No. 71 - 22, 1971
11) Y. Yamada, "Nonlinear Matrices, Their Implications and Applications Inelastic Large Deformation Analysis", Comp. Method in Appl. Mech. & Eng., Vol. 33, 1982, pp. 417 - 482
12) N. F. F. Ebecken, E. C. P. Lima and L. M. M. Cheiri, "Analysis of Static Strength of Tubular Joints", 2nd Int., Con. on Numer. Methods for Nonlinear Problem, Barcelona, Spain, 1984
13) E. Hinton and D. R. J. Owen, "Finite Element Programming", Dept. of Civil Eng. Univ. of Swansea, U. K., 1977
14) E. Hinton and D. R. J. Owen, "Finite Elements in Plasticity", Dept. of Civil Eng. Univ. of Swansea, U.K., 1980
15) Klaus - Jürgen Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Dept. of Mech. Eng. M. I. T., U. S. A., 1982
16) R. W. Clough and J. Penzien, "Dynamics of Structures", McGraw - Hill Kogakusha, 1975
17) T. J. R. Hughes and W. K. Liu, "Implicit - Explicit Finite Elements in Transient Analysis : Stability Theory", J. Appl. Mech. 45, pp. 371 - 374, 1978
18) 배동명 외, "Shell 구조물의 비선형 동적 응답 해석에 관한 연구", 어업기술학회, 28권, 제1호, 1992.2., pp. 79 - 92