

축대칭형 열성형공정의 수치모사연구

남기준 · 이재욱

서강대학교 공과대학 화학공학과
(1996년 10월 8일 접수)

Finite Element Analysis of Thermoforming Process for Axisymmetric System

Gi Joon Nam and Jae Wook Lee

Department of Chemical Engineering, Sogang University, Seoul 121-742, Korea
(Received October 8, 1996)

요 약

평판형의 열가소성 수지를 유리전이온도 이상으로 가열한 다음 압력을 가함으로써 원하는 형상의 제품을 성형하는 열성형 공정은 대상 수지가 큰 변형을 일으킬 뿐만 아니라 비선형적 거동을 보이게 된다. 따라서 수지의 변형거동 예측과 최적성형조건 설정에 많은 어려움과 시행착오를 거치게 되는 바, 열성형 공정의 최적화를 위한 연구의 일환으로 원형평판의 수지를 대상으로 수지의 부풀림 거동과 이에 따른 두께 분포를 예측할 수 있는 유한요소법의 수치모사 알고리즘을 개발하고자 하였다. Piola-Kirchhoff 응력 텐서와 Green 변형 텐서 및 Lagrangian 변형 텐서를 사용하여 평판상의 응력-변형에 대한 비선형의 에너지 수치식을 수립하고, Newton-Raphson 반복수렴법을 이용하여 근사적으로 해석하였으며, 수지의 유변학적 구성방정식으로는 neo-Hookean 모델, Mooney-Rivlin 모델 및 Ogden 모델 등의 초탄성 모델을 사용하여 그 결과를 비교하였다. 수치모사에는 두께가 매우 얇기 때문에 두께 방향의 응력 변화를 무시할 수 있는 membrane 가정을 도입한 2차원적 해석과 두께 방향의 응력 변화를 고려하는 3차원적 해석을 모두 수행하고 그 차이를 비교하였으며, 3차원적 해석의 경우에는 penalty법을 이용하여 비압축성을 만족시켰다. 일차적으로 내압을 받는 두꺼운 원통계에 대한 수치모사 해석을 수행하고 완전해와 비교함으로써 개발된 수치모사 알고리즘의 열성형 공정에서의 적용 타당성을 검증하였으며, 이를 이용하여 원형 평판의 자유 부풀림 거동을 예측한 결과 Treloar 등의 실험결과와 잘 부합함을 확인하였다. 또 간단한 형상의 금형이 있는 경우와 반지를 방향으로의 온도변화에 따른 수지의 변형거동을 해석함으로써 실제 열성형 공정에서 요구되고 있는 성형품의 두께 분포를 균일하게 하기 위한 방안을 제시하였다.

Abstract—In thermoforming processes, a thermoplastic sheet is heated and deformed into a proper shape by applied pressure, where the deformation is very large and highly non-linear. Therefore it is very difficult to find the optimum processing conditions. In this study, a numerical algorithm was developed to simulate the inflation behavior of a sheet in the axisymmetric geometry and predict the thickness distributions of the sheet in the deformed states during thermoforming using finite element method. The deformation was described mathematically by the Piola-Kirchhoff stress tensor, Green deformation tensor and Lagrangian deformation tensor in conjunction with Mooney-Rivlin and Ogden models as material models. The resulting non-linear equations were solved by employing Newton-Raphson iteration method to obtain the solution at the mechanical equilibrium. Two different types of stress conditions were considered in this study: the one is two dimensional model with membrane approximation and the other is three dimensional model taking into account the stress gradient in the thickness direction. The computed results of both cases were compared with each other. In case of three dimensional model, penalty method was used to satisfy the incompressibility of the deforming sheet. In order to verify the applicability of our algorithm, numerical solution was obtained for a simple geometry and compared with the corresponding exact

solution. In addition, Treloar's experimental data were also compared with our computed result and they were found to be in good agreement with each other. We investigated the effects of the interaction with the mold wall and the temperature distribution in the sheet on the predicted thickness distributions. It was found that uneven temperature distribution in the sheet was very effective to reduce the thickness variation in the final products.

Keywords: Thermoforming, Finite Element Method, Piola-Kirchhoff stress tensor, Green deformation tensor, Mooney-Rivlin model, Ogden model, Membrane approximation, Three dimensional analysis

1. 서 론

열성형은 유리전이온도 이상으로 가열된 열가소성 수지 평판을 진공을 걸어 주거나 가압함으로써 원하는 형상으로 변형을 일으켜 성형하는 공정으로, 진공성형(vacuum forming), 압공성형(pressure forming), plug assisted forming, matched mold forming 및 이들을 조합한 다양한 형태의 열성형법들이 개발되고 있으며 개략적인 공정순서는 Fig. 1과 같다.

열성형 공정은 여타 성형공정에 비해 낮은 압력에서 운전되기 때문에 금형 제작비용과 가공시 제 비용을 절감할 수 있을 뿐만 아니라 가공 시간이 매우 짧다는 장점을 갖고 있으므로 복잡하거나 정교한 부품을 제외한 거의 모든 영역에서 활용될 수 있어 최근 각광을 받고 있는 성형공정 중의 하나이다. 또 강도가 다소 떨어지는 값싼 재질의 금형을 이용할 수 있고, 부피가 큰 경우에도 최소의 비용으로 금형을 제작할 수 있으며 두께가 극히 얇거나 두께 대 면적비가 충분히 작은 제품의 경우에는 성형시간이 놀랄 정도로 짧아 다른 성형 방법으로는 기대하기 힘든 높은 성형 만족도를 얻을 수 있다.

그러나 열성형 가공시 대상 물질인 열가소성 수지 평판이 큰 변형을 일으킬 뿐만 아니라 매우 비선형적 거동을 보이기 때문에 공정의 최적조건을 발견하는데 많은 어려움이 있어 새로운 형상의 제품을 제조하는데에는 수많은 시행착오를 거쳐야 하는 바, 이에 소요되는 시간과 비용을 줄이기 위해서는 수치모사 알고리즘의 개발을 통하여 수지의 변형거동을 예측할 수 있는 연구가 절실히 요구되고 있다.

이를 위해 다양한 연구들이 진행되어 왔는데 초기에는 기하학적 변화만을 고려한 모델을 사용하여 단순한 물질 수지식으로 해를 얻었으므로, 수지의 변형거동과는 무관한 결과를 얻을 수 밖에 없어 두께분포에 대한 정확한 예측이 어려웠다. 수지의 변형거동을 고려한 연구는 Oden[1,2] 등이 membrane 가정을 적용하여 평판의

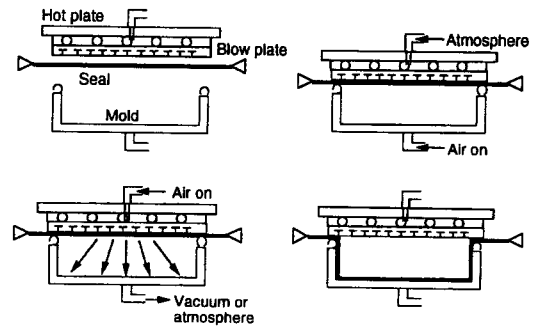


Fig. 1. Schematic diagram of thermoforming process.

부풀림 거동을 해석함으로써 처음으로 시도되었으며, Feng[3,4] 등이 Ritz 방법을 Wu, deLorenzi, Song [5-10] 등이 Green 변형 텐서와 Piola-Kirchhoff 응력 텐서등을 도입한 에너지식에 membrane가정을 적용하여 계를 해석하였으며, 최근에는 Song과 Vlachopoulos[11,12] 등에 의해 K-BKZ 모델 등의 점탄성 모델을 도입한 연구가 진행되고 있다.

본 연구에서는 열성형 공정해석의 기초적 연구의 일환으로써 원형 평판의 수지를 대상으로 압력의 증가에 따른 축대칭형 계의 자유 부풀림 거동을 유한요소법을 이용하여 해석하고자 하였다. 또 Mooney 모델과 Ogden 모델 등의 다양한 초탄성 구성방정식을 사용하여 계를 해석하고 Treloar의 실험 결과[15]와 비교함으로써 수지의 변형거동을 잘 예측할 수 있는 모델을 찾고, 두께 방향의 응력을 고려하지 않는 membrane 가정의 2차원적 해석과 두께 방향의 응력 변화를 고려하는 3차원적 해석을 모두 수행하고 차이를 비교하여 membrane 가정의 적용범위를 발견하고자 하였다. 이와 아울러 컵모양의 간단한 형상을 가진 금형이 설치되어 있는 경우 수지가 금형 벽면에 접촉할 때의 변형거동과 두께 분포를 예측하고, 원형 평판 수지의 반지름 방향으로 온도분포에 대한 영향을 조사함으로써 열성형 공정에서 가장 큰 문제점 중의 하나인 성형품의 균일한 두께 분포

를 얻기 위한 방안을 마련하고자 하였다.

2. 이 론

2.1. 에너지 수지식

본 연구에서는 평판의 두께 방향으로의 응력 변화가 일어나지 않는다는 membrane 가정을 도입하는 2차원 적 해석과 두께 방향의 응력 변화와 변형을 동시에 고려 하는 3차원적 해석을 모두 수행하였다.

열성형 공정과 같이 시간에 따라 큰 변형을 보이는 수 지의 변형거동을 예측하기 위하여 Fig. 2와 같은 total Lagrangian 좌표계를 사용하였으며, Green 변형텐서 와 Piola-Kirchhoff 응력텐서를 도입하여 계를 해석하 였다. Green 변형텐서는 deformation gradient 벡터 G_i, G_j 에 의해

$$C_{ij} = G_i \cdot G_j = \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j} \quad (1)$$

과 같이 정의되므로, 축대칭형계에 대한 Green 변형텐 서는

$$\begin{aligned} C_{11} &= 2 u_{1,1} + u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + 1 \\ C_{22} &= 2 u_{2,2} + u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + 1 \\ C_{12} &= u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,2} u_{1,1} + u_{2,2} u_{2,1} \\ C_{33} &= \frac{r^2}{R^2} \end{aligned} \quad (2)$$

로 표현된다. 여기서 u 는 변위, r 은 변형 후의 반경 방향 의 거리, R 은 변형 전의 반경 방향의 거리를 나타내며, 하첨자 1, 2, 3은 각각 반경 방향, 축 방향 및 원주 방향 을 나타낸다.

축 대칭형 계에 대한 Green 변형텐서의 주 연신률

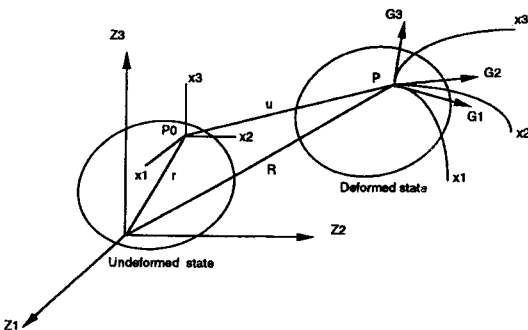


Fig. 2. Lagrangian coordinates.

(principal stretch ratio)은

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{1}{2} \{C_{11} + C_{22} - [(C_{11} + C_{22})^2 - 4(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)]^{1/2}\} \\ \lambda_2^2 &= \frac{1}{2} \{C_{11} + C_{22} + [(C_{11} + C_{22})^2 - 4(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)]^{1/2}\} \\ \lambda_3^2 &= \frac{r^2}{R^2} \end{aligned} \quad (3)$$

과 같이 표현되며, Green 변형텐서의 주 불변량(prin- cipal invariant)은

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = C_{11} + C_{22} + C_{33} \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ &= C_{11}C_{22} + C_{11}C_{33} + C_{22}C_{33} - C_{12}^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = G_{11}G_{22}G_{33} - G_{33}G_{12}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

로 표현된다. 또 Piola-Kirchhoff 응력텐서와 내부 에너 지 함수 W 간에는

$$S_{ij} = \frac{W}{\gamma_{ij}} = 2 \frac{W}{C_{ij}} \quad (5)$$

의 관계를 만족하며, γ_{ij} 는 Lagrangian 변형텐서로서 Green 변형텐서와는

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - I) \quad (6)$$

의 관계를 만족한다.

이상의 Lagrangian 변형텐서와 Piola-Kirchhoff 응 력텐서를 도입하여 에너지 수지식을 수립하면

$$\int_{v_0} S_{ij}^{t+dt} \delta \gamma_{ij}^{t+dt} dV^0 = R^{t+dt} \quad (7)$$

로 표현되며, 여기서 R 은 변형에는 무관한 외부에서 계 에 작용하는 일(work)이다[16].

이 식은 매우 비선형적 거동을 보이므로 응력텐서와 변형텐서를 선형항과 비선형항으로 분리한 다음 각 응력 이 부가되는 단계에서의 평형조건을 얻기 위해 Newton-Raphson 반복수렴법을 사용하여 해석하였 다. 응력텐서와 변형텐서를 선형항과 비선형항으로 분리 하면

$$\begin{aligned} S_{ij}^{t+dt} &= S_{ij}^t + S_{ij} \\ \gamma_{ij}^{t+dt} &= \gamma_{ij}^t + \eta_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} + \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (8)$$

로 되고, 에너지 수지식은

$$\int_{V_0} S_{ij} \delta \gamma_{ij} dV^0 + \int_{V_0} S_{ij}^t \delta \eta_{ij} dV^0 = R^{t+dt} - \int_{V_0} S_{ij}^t \delta e_{ij} dV^0 \quad (9)$$

와 같이 표현된다. 이 때 e_{ij} , η_{ij} 는

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}^t u_{k,j} + u_{k,i} u_{k,j}^t) \\ \eta_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (10)$$

이며, 식(9)에 $S_{ij} = C_{ijrs} e_{rs}$, $\delta \gamma_{ij} = \delta e_{ij}$ 를 대입하여 정리하면 에너지 수지식은

$$\int_{V_0} C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV^0 + \int_{V_0} S_{ij}^t \delta \eta_{ij} dV^0 \\ = R^{t+dt} - \int_{V_0} S_{ij}^t \delta e_{ij} dV^0 \quad (11)$$

로 된다.

한편 Membrane 가정을 사용하지 않는 경우 대상수지의 비압축성 조건을 만족시키기 위하여 벌칙(Penalty) 함수를 도입하면 Piola-Kirchhoff 응력텐서는

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{1}{\varepsilon} G(I_3) \frac{\partial G(I_3)}{\partial \gamma_{ij}} \quad (12)$$

로 표현되며, 여기서 ε 은 벌칙계수, G 는 벌칙함수로

$$G(I_3) = \frac{1}{2} \ln(I_3) \quad (13)$$

형태의 함수를 선정, 사용하였다. 완전한 비압축성을 만족하기 위해서는 $\varepsilon = 0$ 에 가장 근접한 값을 사용해야 하지만 그 결과 iteration의 수가 증가하고 때로는 발산할 수도 있으므로 본 연구에서는 $\varepsilon = 0.001$ 을 사용하여 약간의 압축성으로 해석하였다.

2.2. 변형 에너지 함수

초탄성 변형거동을 보이는 수지의 물질 에너지 함수는 변형에너지를 주 불변량의 함수로 표현하거나 주 연신률의 함수로 표현하는 두 가지로 크게 분류할 수 있다. 변형에너지를 주 불변량의 함수로 표현하는 일반화된 Mooney-Rivlin 모델은

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (14)$$

와 같이 정의되며, 주 불변량 I_1, I_2 의 선형항만을 취하면

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) \quad (15)$$

와 같이 2개의 물질계수를 갖는 단순 Mooney-Rivlin 모델로 표현된다. 단순 Mooney-Rivlin 모델은 계산의 편의성과 단순성으로 인해 많이 사용되고는 있지만 이 경우 다양한 수지의 응력-변형간의 관계를 정확히 표현할 수 없을 뿐 아니라 λ 가 3 이상인 큰 변형을 예측하는데에는 적용하기가 어려워, 일반화된 Mooney-Rivlin 모델의 polynomial 함수를 3차급수까지 확장시켜

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) + A_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \\ + A_{20}(I_1 - 3)^2 + A_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (16)$$

과 같이 5개의 항을 갖는 확장 Mooney-Rivlin 모델을 사용할 경우 큰 변형까지를 예측할 수 있는 것으로 알려져 있다[17].

또 변형 에너지 함수를 주 연신률의 함수로 표현되는 Ogden 모델은

$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{b_i} (\lambda_1^b + \lambda_2^b + \lambda_3^b - 3) \quad (17)$$

과 같이 표현되므로, 본 연구에서는 2개의 항을 갖는 단순 Mooney-Rivlin 모델과 5개 항으로 확장한 Mooney-Rivlin 모델 및 Ogden 모델을 사용하여 계를 해석하고 구성방정식에 따른 영향을 조사하고자 하였다.

한편 변형이 전혀 없을 경우 응력이 존재하지 않아야 하지만 위의 변형 에너지 함수를 사용하여 응력텐서를 구하면 응력이 0이 되지 않으므로, 2개 항을 갖는 단순 Mooney-Rivlin 모델과 5개 항을 갖는 확장 Mooney-Rivlin 모델은

$$W = W - (2A_{10} + 4A_{01})G(I_3) \quad (18)$$

의 형태로, Ogden 모델은

$$W = W - (a_1 + a_2 + a_3)G(I_3) \quad (19)$$

와 같이 보정하여 사용하였다.

3. 결과 및 검토

식(9)를 유한요소법을 이용하여 행렬 형태로 나타내면

$$(K_L + K_{NL})\Delta u = R - F \quad (20)$$

으로 되며, K_L , K_{NL} 는 각각 강성행렬(stiffness matrix)의 선형항과 비선형항, R 은 외력벡터, F 는 요소 응력에 증가하는 절점 응력벡터, u 는 변위벡터이다. 이를 8개의 절점을 갖는 요소를 사용하여 9개의 적분점으로 가우스 적분을 수행하였으며 잠김 현상을 피하기 위하여 벌칙항에 대하여는 4개의 적분점으로 적분을 수행하였다.

3.1. 수치모사 알고리즘의 검증

열성형 공정과 같이 큰 변형 거동을 보이는 계를 해석하기 위해 개발한 알고리즘을 사용하여 원통 내부에 부가되는 압력의 영향으로 반지름 방향으로만 변형이 일어나 축대칭형의 변형을 보이는 두꺼운 무한 원통계를 대상으로 수치모사 실험을 수행하였다. 이는 완전해가 존재하는 계 중의 하나이므로 반지름 방향으로 나타나는 비선형의 큰 변형 거동에 대한 수치모사 결과를 완전해와 비교함으로써 개발한 알고리즘의 타당성을 검증하였다. 이 해석에 사용한 치수와 Mooney-Rivlin 모델의 물질상수는 Oden[18]의 해석 데이터를 사용하였는데, 원통의 안쪽 반지름은 17.78 cm, 바깥쪽 반지름은 47.3075 cm이고 Mooney-Rivlin 모델의 물질상수 A_{10} , A_{01} 는 각각 551.72 KPa(80 psi), 137.93 KPa(20 psi)이며, 두께 방향으로 5개의 8절점 축대칭형 요소를 감차적분하여 해

석하였다. 또 비압축성 조건의 만족시키기 위하여 벌칙계수는 수지의 포아송 비(Poisson ratio) 0.499에 대응하는 0.001을 사용하였으며, 내압의 loading step을 10번 사용하여 구하였다.

Fig. 3에는 내부 압력의 변화에 따른 안쪽 반지름의 변화를 도시하였는데 수치모사 결과가 비압축성의 완전해와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있으며, Fig. 4에서 보는 바와 같이 큰 변위와 변형을 조건에서도 벽 두께 방향을 따른 반지름 방향, 원주 방향, 수직 방향의 응력이 완전해와 잘 일치하고 있음에 미루어 본 연구에서 개발한 수치모사 알고리즘이 열성형 공정과 같은 큰 변형이 일어나는 계의 해석에 적용 가능하다는 것을 확인할 수 있었다.

3.2. 물질상수의 결정 및 모델 수립

가역적 탄성 특성을 보일 뿐 아니라 큰 변형 하에서도 결정화가 일어나지 않는 8% 가황고무를 대상으로 행한 Treloar의 물성실험 결과를 기초로 단순 Mooney-Rivlin 모델, 확장 Mooney-Rivlin 모델 및 Ogden 모델 등의 초탄성 모델의 물질상수들을 비선형 회기분석법으로 구하여 구성방정식을 수립하였다. 열성형 공정에서의 부풀림 거동은 이축신장(biaxial tension)에 가까운 변형 거동을 보이고 있지만, 구성방정식의 수립에는 이축신장의 물성 뿐만 아니라 일축신장(simple tension)과 전단(pure shear)실험의 물성 결과를 동시에 만족하는

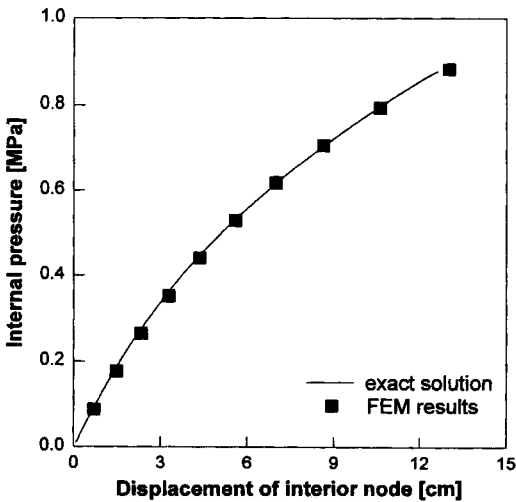


Fig. 3. Comparison of FEM results for inflation of a thick tubular sheet with exact solution.

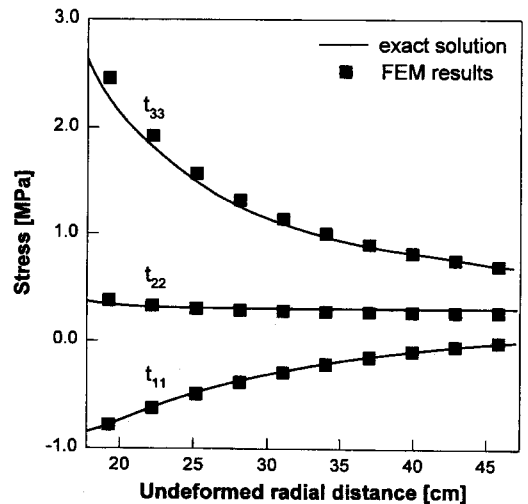


Fig. 4. Three principal stresses at $P = 0.8837$ MPa internal pressure.

물질상수를 구하였으며, 또 비선형 회귀분석법을 사용할 때 초기값의 설정에 따라 얻어지는 물질상수의 값이 약간의 차이를 보이게 되고 이러한 물질상수의 조그마한 차이가 부풀림 거동에 큰 영향을 미치게 되므로 구성방정식의 결과가 실험 결과와 가장 잘 부합하는 물질상수의 값을 선정하였다. 각 모델의 물질상수는 Table 1에 요약하여 수록하였다.

Fig. 5에는 이상의 구성방정식을 사용하여 단순지지 조건(simple supported end)을 경계조건으로 갖는 원형 평판의 부풀림 거동을 수치모사 해석하고 압력 변화에 따른 신장률의 변화를 Treloar의 실험 결과와 비교하였는데, 확장 Mooney-Rivlin 모델이 실험 결과와 가장 잘 부합하며 Ogden 모델이 가장 큰 차이를 보이고 있음을 알 수 있었다. 또 단순 Mooney-Rivlin 모델은 신장률이 증가함에 따라 압력이 약간 크게 예측되기는 하지

만 3 이하의 작은 신장률 범위에서는 실험 결과와 비교적 잘 일치하고 있으므로, 본 연구의 수치모사에서는 단순 Mooney-Rivlin 모델을 사용하여 열성형 공정의 부풀림 거동을 예측하고자 하였다.

3.3. 원형 평판의 자유 부풀림 거동

두께가 0.082 cm, 반지름이 1.25 cm인 8% 가황고무로 된 원형 평판을 대상으로 아래 면이 주입되는 공기에 의해 압력을 받음으로써 보이게 되는 자유 부풀림 거동을 membrane 가정을 적용한 2차원적 해석과 membrane 가정을 적용하지 않은 3차원적 해석 방법을 사용하여 각각 조사하였다. Fig. 6에는 단순지지 조건을 경계조건으로 갖는 원형 평판의 부풀림 거동을 해석한 결과를 비교하였다. 축대칭형 계의 3차원적 해석을 통하여 압력 변화에 따른 부풀림 거동을 조사한 결과 압력이 증가함에 따라 원형 평판이 구형으로 부풀어 오름을 볼 수 있으며, 두께 방향의 응력변화를 고려하지 않고 단지 비압축성 조건으로 부터 두께 변화를 구하는 membrane 가정을 도입하여 해석한 결과와도 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다. 그러나 Fig. 7에 도시한 바와 같이 실제 열성형 공정과 매우 유사한 고정지지 조건(clamped end)을 경계조건으로 사용한 경우에는 동일한 압력이 부가된 조건에서 부풀림 거동이 벽면에서 뿐만 아니라

Table 1. Material parameters of 8% sulfur rubber[15]

model	parameter
Mooney-Rivlin (2 term)	$A_{10} = 1.85, A_{01} = 0.0495$
Mooney-Rivlin (5 term)	$A_{10} = 1.7658, A_{01} = 0.0991, A_{11} = -0.0016, A_{20} = -0.02, A_{30} = 0.0006$
Ogden (6 term)	$a_1 = 5.9539, a_2 = 0.0128, a_3 = -0.1032, b_1 = 1.3099, b_2 = 5.0787, b_3 = -2.0112$

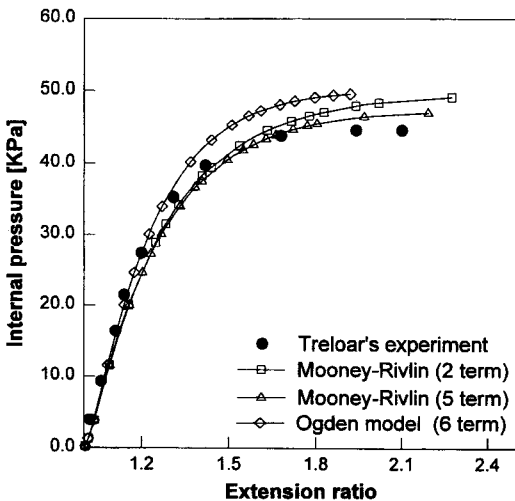


Fig. 5. Comparison of extension ratio vs. pressure for various constitutive models with Treloar's experimental results.

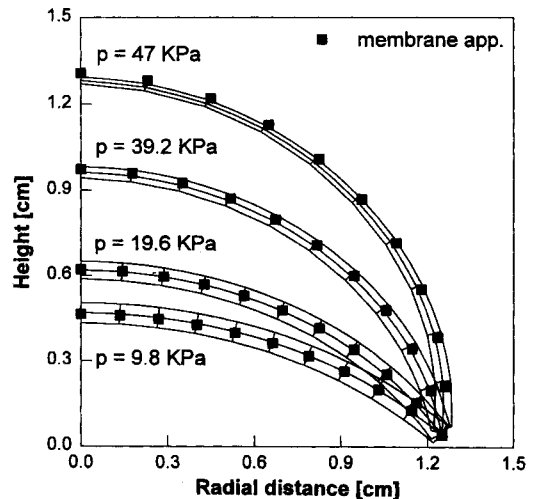


Fig. 6. Inflation behavior calculated with or without membrane approximation of rubber sheet for simple supported end.

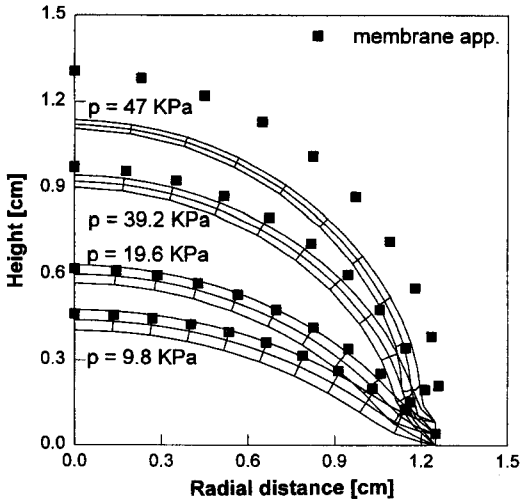


Fig. 7. Inflation behavior calculated with or without membrane approximation of rubber sheet for clamped end.

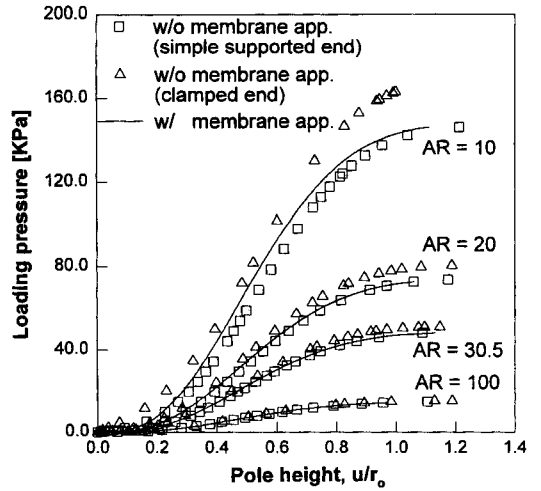


Fig. 8. Pole height vs. loading pressure for different aspect ratios of simple supported and clamped end sheets.

구의 극점에서도 membrane 가정을 사용한 결과와 큰 차이를 보이고 있음을 볼 수 있었다. 이는 membrane 가정이 두께 방향의 한 평면 상의 절점만을 경계조건으로 고려하기 때문에 고정지지 조건을 부여할 수 없게끔 하는 것으로 해석된다. 따라서 membrane 가정을 도입하여 열성형 공정의 변형 거동을 해석하는데에는 한계가 있음을 알 수 있었다. 한편 경계조건을 달리한 경우에 대한 압력 증가에 따른 두께 분포는 압력이 증가할수록 원판의 중심에 대응하는 구의 극점에서 두께가 급격히 얇아짐을 볼 수 있으며, membrane 가정의 결과는 단순지지 조건의 결과와는 잘 일치하였지만 고정지지 조건과의 결과와는 큰 차이를 보임을 알 수 있다. 또 Fig. 8에는 초기 평판의 두께가 미치는 영향을 살펴보기 위해 두께에 대한 지름의 형상비(AR)를 변화시켜 가며 경계조건 및 membrane 가정의 적용 여부에 따른 원형 평판의 극점의 높이와 압력 간의 관계를 도시하였다. 형상비가 100으로 매우 클 경우에는 그 결과가 부여된 경계조건과 membrane 가정의 적용 여부에 관계없이 잘 일치하고 있지만 형상비가 작아짐에 따라 membrane 가정을 사용한 결과는 단순지지 조건의 결과와 비슷한 양상을 보이는 반면 고정지지 조건의 결과와는 큰 차이를 보임을 알 수 있다. 따라서 membrane 가정은 평판의 두께가 상대적으로 매우 얇아서 단순지지와 고정지지

의 경계조건 상의 큰 차이를 보이지 않을 때만 적합한 가정임을 확인할 수 있다. 한편 원형 평판이 부가된 압력에 관계없이 동일한 위치까지 부풀어 올랐을 때의 극점의 높이 변화에 따른 극점에서의 두께 변화를 Fig. 9에 도시하였는데, 형상비나 부여된 경계조건의 형태 및 membrane 가정의 적용 여부에 관계없이 모두 한 선상에 모임을 알 수 있었다.

이상의 결과로부터 비록 형상비와 경계조건의 형태 및 membrane 가정의 적용 여부에 따라 압력에 대한 거동은 큰 차이를 보이지만 일정 위치에서의 두께 변화는 물질상수에 의해서만 결정됨을 알 수 있으며, 또 membrane 가정을 적용할 경우 압력 변화와 같은 최적 공정조건의 발견은 불가능하지만 일정 변형을 보이는 계의 두께 변화의 예측에는 용이하게 이용될 수 있음을 알 수 있다.

이를 확인하기 위하여 반지름 8.89 cm, 두께 0.635 cm인 PMMA수지의 원형 평판을 대상으로 가공온도인 163°C에서 변위와 응력 및 부풀림 거동을 조사하여 극점에서의 높이와 두께를 상관관계를 구한 Lai와 Holt [19]의 실험 결과와 수치모사 결과를 비교하였는데, Fig. 10에서 보는 바와 같이 원형 평판의 극점 높이에 대한 극점에서의 두께는 실험 결과와 수치모사 결과가 잘 일치함을 알 수 있었다. 수치모사에는 Alexander[20]의 이론을 이용하여 물질상수 A_{10} , A_{01} 은 각각 0.276, 0

MPa의 값을 갖는 neo-Hookian 모델을 사용하였다.

3.4. 공압출 원형 평판의 부풀림 거동

성형품의 사용 목적에 따라 실제 열성형 공정에서는 강성수지와 연성수지를 공압출하여 성형하는 경우가 종종 있으므로, 이 경우 물질 특성이 부풀림 거동에 미치는 영향을 조사하였다. 강성수지($A_{10} = 0.744$ MPa, $A_{01} = 0.271$ MPa)과 연성수지($A_{10} = 0.406$ MPa, $A_{01} = 0$) 및 동일한 두께로 공압출된 반지름 19.1 cm, 두께

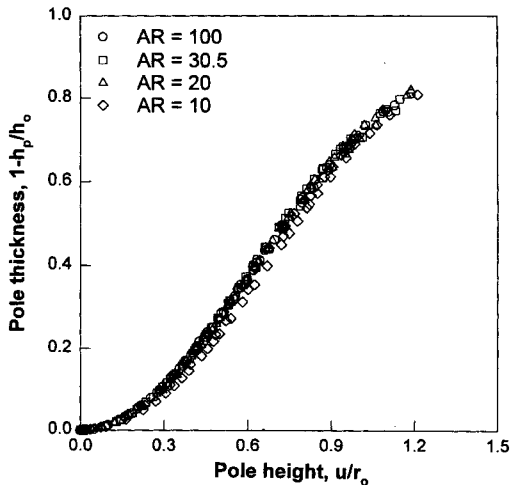


Fig. 9. Pole height vs. pole thickness for various aspect ratios.

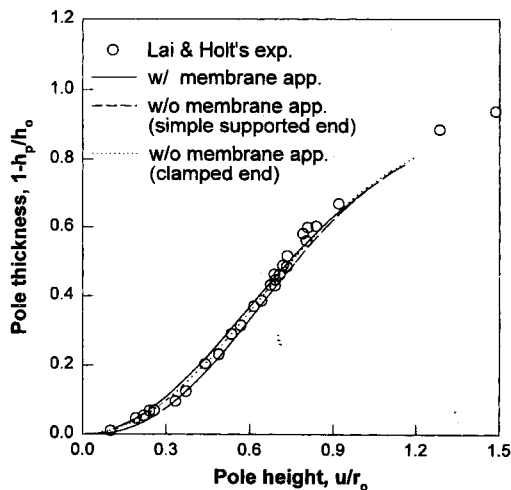


Fig. 10. Comparison of pole height vs. pole thickness of FEM results with Lai and Holt's experimental data.

0.635 cm의 원형 평판을 대상으로 부풀림 거동을 비교한 결과, 동일한 압력 하의 공압출 원판의 부풀림 거동은 연성물질보다는 강성물질의 부풀림에 가까운 거동을 보였으며, Fig. 11에서 보는 바와 같이 동일한 신장률 하에서도 강성물질만의 부풀림 거동에 보다 가까운 양상을 보이고 있음을 알 수 있었다. 따라서 강성수지와 연성수지가 공압출된 경우 계면에서 미끄러짐이 없다고 가정하면 공압출된 수지의 변형거동은 강성수지의 변형거동에 현저하게 영향을 받는 것을 알 수 있었다. 원형 평판의 극점이 동일한 위치($u/r_0 = 1$)까지 부풀어 올랐을 때의 두께 분포를 도시한 Fig. 11의 결과는 부가된 압력이 강성수지가 0.165 MPa, 연성수지가 0.049 MPa, 공압출수지가 0.108 MPa일 때의 결과이다.

3.5. 금형벽면 및 평판 온도분포의 영향

열성형 공정에서는 원하는 형상에 부합하는 금형을 사용하여 제품을 생산하고 있으므로 단순한 자유 부풀림 거동만을 해석한 결과는 실제 공정에 적용하기가 매우 어려운 바, 자유 부풀림 거동에 대한 알고리즘을 확장하여 금형 벽면 경계에 대한 영향을 고려함으로써 실제 공정에 적용할 수 있는 알고리즘의 개발을 시도하였다. Fig. 12에는 160°C의 등온으로 유지되고 있는 반지름이 8.89 cm, 두께가 0.6985 cm인 modified PPO(poly-phenylene oxide)수지 원형 평판의 부풀림 거동에 미치는 반지름이 9 cm, 높이가 6 cm인 원통모양의 형상

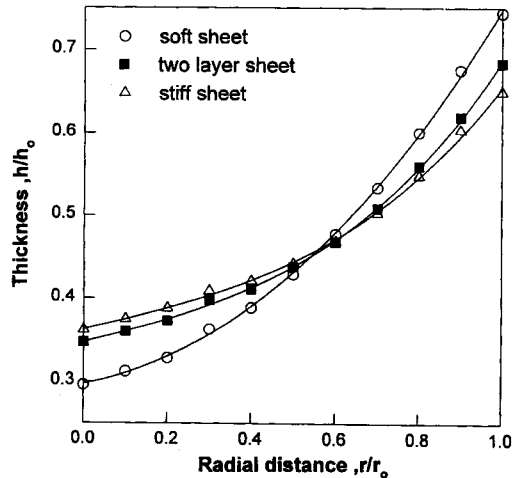


Fig. 11. Thickness variation of different composite sheets at same stretch ratio.

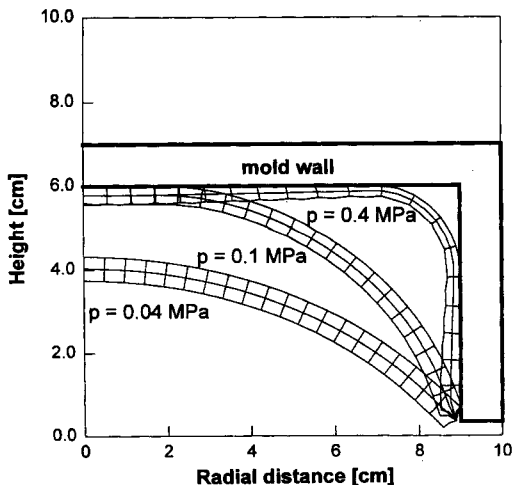


Fig. 12. Isothermal inflation behavior of polymer sheet for various loading steps with a mold.

을 갖는 금형벽면 경계의 영향을 도시하였는데, 금형 벽면에 접촉한 수지는 마찰에 의해 미끄러짐이 없다고 가정하였다. Fig. 12에서 보는 바와 같이 압력이 증가함에 따라 수지가 부풀어 오르다가 약 0.1 MPa 정도의 압력에서 중심부가 먼저 금형 벽면에 접촉하게 되고 약 0.4 MPa 정도의 압력에서는 거의 대부분의 수지가 금형 벽면에 접촉한 상태가 되었다. 0.4 MPa 압력에서의 두께 분포를 살펴보면 금형 벽면에 접촉한 수지는 마찰에 의해 미끄러짐이 없다고 가정하였으므로 먼저 금형에 접촉한 부분은 두꺼운 두께를 유지한 반면 금형의 모서리에 해당하는 부분이 급격히 얇아짐을 볼 수 있다. 이러한 불균일한 두께 분포는 성형품의 물성 저하를 초래할 수 있으므로 열성형 공정에서는 수지의 온도분포를 다르게 설정하여 가능한 균일 두께 분포를 갖도록 하는 공정 조건의 발견이 요구된다.

본 연구에서는 이에 대한 기초적인 연구로 원형 평판의 반지름에 따라 온도분포를 임의로 달리하여 부풀림 거동을 조사함으로써 비교적 균일한 두께 분포를 가질 수 있는 방안 모색하고자 하였다. 이를 위해 열성형온도 140-204°C 범위에서

$$E = 6 (A_{10} + A_{01}) = k \exp(-\mu T) \quad (21)$$

의 온도의존성[21]을 보이는 modified PPO수지를 대상으로 평판 수지 내 온도분포의 변화에 따른 부풀림 거동과 금형 벽면에 접촉될 때의 두께 변화를 조사하였다.

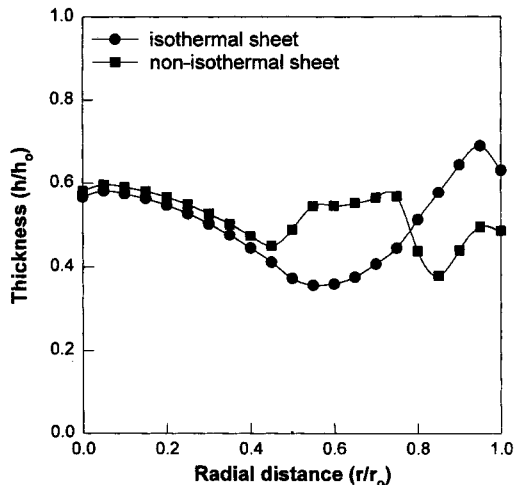


Fig. 13. Comparison of thickness variations for isothermal and non-isothermal temperature distributed sheets.

Fig. 13는 중심으로부터 반지름 방향으로 9번째 요소까지는 160°C, 10째 요소는 155°C, 11번째에서 15번째 요소는 150°C, 16째 요소는 160°C, 17번째부터 20번째까지의 요소는 170°C로 온도분포를 임의로 설정하여 부풀림 거동과 두께분포를 조사한 결과로서, p = 0.4 MPa에서의 최종 두께분포를 등온상태로 유지한 경우와 비교한 결과 두께 분포가 훨씬 균일해짐을 볼 수 있었다. 따라서 균일한 두께 분포를 갖는 성형품을 얻기 위해서는 수지 평판의 온도분포를 잘 설계하는 것이 가장 중요함을 알 수 있었다. 본 수치실험에 사용한 modified PPO수지의 물성 데이터는 전단율이 1s⁻¹ 이하일 때 k = 512.3 MPa, μ = 0.0441 1/°C이고, 구성방정식으로는 150°C, 160°C 및 170°C 온도에서 각각 물질상수 A₁₀의 값이 47.4 KPa, 30.43 KPa, 19.6 KPa인 neo-Hookian 모델을 사용하여 해석하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 열성형 공정에서의 수지의 변형거동을 해석할 수 있는 유한요소법의 알고리즘을 일차적으로 축대칭형 계에 대하여 개발하고, 완전해가 있는 내압을 받는 두꺼운 원통계의 변형 해석을 통하여 검증하였다. Treloar의 실험결과를 기초로 비선형 회기분석법 으로 물질상수를 구한 다음 단순수지의 경계조건을 갖는 원형

평판의 부풀림 거동을 해석한 결과, 확장 Mooney-Rivlin 모델이 실험 결과와 가장 잘 부합하며 3 이하의 작은 신장률 범위에서는 단순 Mooney-Rivlin 모델도 실험 결과와 비교적 잘 일치함을 알 수 있었다.

단순지지 경계조건을 갖는 원형 평판의 부풀림 거동은 membrane 가정의 결과와 잘 일치하지만 고정지지 경계조건을 갖는 경우는 큰 차이를 보이며, 형상비와 경계 조건의 형태 및 membrane 가정의 적용 여부에 따라 압력에 대한 원형 평판의 부풀림 거동은 큰 차이를 보이지만, 극점 높이에 따른 극점 두께 변화는 이에 관계없이 모두 한 선상에 모임을 알 수 있었다. 따라서 membrane 가정은 평판의 두께가 상대적으로 매우 얇아서 단순지지와 고정지지의 경계조건 상의 큰 차이를 보이지 않을 때 적합한 가정이며, membrane 가정을 적용할 경우 압력 변화와 같은 최적 공정조건의 발견은 불가능하지만 두께의 변화 예측에는 용이하게 이용될 수 있음을 알 수 있었다.

또 본 연구에서 개발한 알고리즘을 확장하여 금형 벽면 경계와 수지 평판의 온도분포에 대한 영향을 조사하였는데, 등은 평판은 금형 모서리 부분에서 급격한 두께의 감소를 보이지만 수지의 온도분포를 잘 설계하면 균일한 두께 분포를 갖는 성형품을 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 1996년도 서강대학교 교내 연구비 지원에 의하여 이루어졌음.

기 호

- A_{ij} : Mooney model parameter
- a_i, b_i : Ogden model parameter
- C_{ij} : Green deformation tensor
- G : Penalty function
- G_i : deformation gradient
- I_i : principal invariant
- R : radius before deformation
- r : radius after deformation
- S_{ij} : Piola-Kirchhoff stress tensor
- u_i : displacement

- V : volume
- W : strain energy function

그리스 문자

- γ_{ij} : Lagrangian deformation tensor
- ϵ : Penalty parameter
- λ_i : Principal stretch ratio

참고문헌

1. J.T. Oden, "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw-Hill, NewYork, 1972.
2. J.T. Oden, Proc. Intern. Assoc. of Shell Structures, Intern. Cong. on Large Span Shells, Leningrad, U.S.S.R. (1966).
3. W.W. Feng, *J. Appl. Mech. ASME*, **41**, 979 (1974).
4. W.H. Yang and W.W. Feng, *J. Appl. Mech. ASME*, **37**, 1002 (1970).
5. J.M. Charrier, S. Shrivastava and R. Wu, *J. Strain Anal.*, **22(2)**, 115 (1987).
6. R.L. Wu, M. Eng. Dissertation, McGill University, Montreal, Quebec, 1984.
7. H.G. deLorenzi and H. F. Nied, *J. Comp. Struct.*, **26**, 197 (1987).
8. H.F. Nied and H.G. deLorenzi, *SPE ANTEC'87*, **33**, 418 (1987).
9. H.F. Nied, C.A. Taylor and H.G. deLorenzi, *Polym. Eng. Sci.*, **30(20)**, 1314 (1992).
10. W.N. Song, F.A. Mirza, and J. Vlachopoulos, *J. Rheol.*, **35**, 93 (1991).
11. K. Kouba and J. Vlachopoulos, *SPE ANTEC'92*, **38**, 114 (1992).
12. K. Kouba, M.O. Ghafur, J. Vlachopoulos, and W. P. Haessly, *SPE ANTEC'94*, **40**, 850 (1994).
13. D.S. Malkus, and T.J.R. Hughes, *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, **15**, 63 (1978).
14. M.S. Gadala, *J. Comp. Struct.*, **42(1)**, 1 (1992).
15. L.R.G. Treloar, *Trans. Faraday Soc.*, **40**, 59 (1944).
16. K.J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall New York, 1982.
17. A.G. James, A. Green and G.M. Simpson, *J. Appl. Polym. Sci.*, **19**, 2033 (1975).
18. J.T. Oden and J.E. Key, *Intern. J. Solids Struct.*, **6**, 497 (1970).

19. M.O. Lai and D.L. Holt, *J. Appl. Polym. Sci.*, **19**, 1805 (1975).
 20. H. Alexander, *Intern. J. Eng. Sci.*, **6**, 549 (1968).
 21. H.G. deLorenzi and H.F. Nied, "Finite Element Simulation of Thermoforming and Blow molding" in "Progress in polymer processing", ed., A.I. Isayev, Hanser Verlag, Munchen, 1991, p117.