

開水路에서의 2次元 不定流 解析을 위한 有限體積法

Finite Volume Method for Two-Dimensional Unsteady Flow in Open Channel

이 진 희* · 김 경 탁** · 심 명 필***
Lee, Jin Hee · Kim, Kyung Tak · Shim, Myung Pil

Abstract

In this study, a two-dimensional shallow-water equation was used to develop the mathematical model for computing water levels and flow distribution. In the discretization equations, based on the finite volume method (FVM), the third order Runge-Kutta method and the third order upwind scheme were introduced to handle the unsteady and convective terms in the governing equations. To determine the accuracy of the developed model, it was applied to the rectangular horizontal channel in a frictionless flow. The water depth and velocity obtained by the numerical model were found to agree closely with the exact solution. The model was also applied to the rectangular channel with both the symmetric and the non symmetric constriction. The velocity distribution of the flow and the propagation of the flood wave were simulated and the results well described the flow characteristics.

요 지

본 연구에서는 2차원 천수(淺水)방정식을 지배방정식으로 이용하여 유속 및 수위분포를 계산할 수 있는 수치모델을 개발하였다. 유한체적법에 의한 이산화과정에서, 3차의 Runge-Kutta 방법과 3차 정도의 upwind scheme을 도입하여 지배방정식의 비정상항과 이송항을 이산화하였다. 개발된 모형의 정확성을 검증하기 위하여 마찰 없는 직사각형 수평수로에 적용하였으며, 수치모형에 의해 얻어진 수심과 유속이 정확해와 잘 일치하였다. 또한, 본 모형을 대칭 및 비대칭 단면축소부를 갖는 직사각형 수로에 적용하여 흐름에 대한 유속분포와 홍수파의 전파가 수치모의 하였으며, 그 결과는 흐름특성을 잘 묘사하였다.

* 인하대학교 대학원 토목공학과 석사졸업
** 인하대학교 대학원 토목공학과 박사과정
*** 인하대학교 토목공학과 교수

1. 서 론

하천의 흐름해석을 위한 수치해석방법은 편미분으로 구성된 지배방정식을 이산화하는 방법에 따라 크게 유한차분법(finite difference method), 유한체적법(finite volume method), 유한요소법(finite element method)의 등으로 나눌 수 있다. 수공학 분야에서는 유한차분법과 유한요소법이 가장 보편적으로 사용되고 되었으나, 최근들어 이산화방정식이 물리적 보존성을 만족시키기 쉬운 성질을 갖는 유한체적법의 연구가 활발해지고 있는 실정이다.

수치해법으로 널리 이용되고 있는 유한차분법은, 미분방정식에 나타나는 미분항을 Taylor 급수전개식을 이용하여 표현하는 방법으로 유도된 이산화된 방정식이 반드시 물리적 보존형식을 갖는다고 할 수 없다(Anderson 등, 1984). 반면, 유한체적법은 격자점을 중심으로 한 미소제어체적 내에서 미분방정식을 적분하고 나서 운동량 등의 출입을 고려하여 이산화방정식을 얻는 방법이다. 따라서, 그 미분방정식이 전체 계산영역 내에서 보존법칙이 성립할 뿐만아니라 계산영역 내에서의 몇개의 제어체적들 사이에서도 보존법칙이 성립하게 된다. 유한요소법은 근사해와 정확해의 잔차에 대하여 가중함수를 이용하여 근사식의 계수를 결정하는 방법으로 복잡한 경계형상에도 적용이 용이하지만 레이놀즈수가 큰 흐름인 경우에 수렴성 등에 문제가 있을 수 있다(명현국, 1995).

본 연구에서 이산화방법으로 사용할 유한체적법은 1972년 Patankar와 Spalding에 의해 개발된 SIMPLE(Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) 알고리즘이 발표된 이래로 비압축성 흐름에 대한 수치모형 실험에 폭 넓게 적용되어 왔으며, 수렴률이 개선된 SIMPLER (SIMPLE Revised ; Patankar, 1980)로 발전하였다. 이와 같은 SIMPLE 및 SIMPLER방법은 주로 기체유체분야에 적용되어 왔으며, 유속과 압력을 결합시켜 연속방정식과 운동량방정식을 푸는 유용한 방법으로 평가되고 있다. 수공학 분야에서의 개수로 흐름에 대한 적용으로는 Zhao 등(1994)이 2

차원 천수방정식을 이용한 부정류 해석모델인 RBFVM-2D를 이용하여 실제하천의 흐름을 해석하였다. Zhou(1995)는 2차원 천수방정식에 대한 속도보정방정식과 수심보정방정식을 이용하여 정류 흐름을 해석하였다.

2. 개수로 흐름의 지배방정식

실제흐름은 3차원 해석이 이상적이거나, 자연하천에서는 하폭에 비해 수심의 비가 작으므로 연직방향의 유속 및 가속도를 무시하고 깊이에 따른 수평방향의 유속변화를 나타낸 다음과 같은 수심평균(depth-averaged) 2차원 식으로 해석이 가능해진다(Chaudhry, 1993).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}h) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = g \left(S_{0x} \frac{\partial h}{\partial x} - S_{fx} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = g \left(S_{0y} \frac{\partial h}{\partial y} - S_{fy} \right) \quad (3)$$

여기서, \bar{u} 와 \bar{v} 는 하천의 수심에 대한 u , v 의 평균값으로 식 (4a), (4b)와 같으며, h 는 수면에서 하천 바닥면까지의 수심이며, S_{0x} , S_{0y} 는 각각 x , y 방향의 하상경사이고, S_{fx} , S_{fy} 는 각각 x , y 방향의 Manning법칙에 따른 하상마찰경사로 식 (5a), (5b)와 같다(Chaudhry, 1993). 식 (2), (3)에 대하여 풍력, 와점성항이 포함될 수 있으나 본 모형에서는 제외하기로 한다.

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dz \quad (4a)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dz \quad (4b)$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 \bar{u} \sqrt{u^2 + v^2}}{C_0^2 h^{4/3}} \quad (5a)$$

$$S_{fy} = \frac{n^2 \bar{v} \sqrt{u^2 + v^2}}{C_0^2 h^{4/3}} \quad (5b)$$

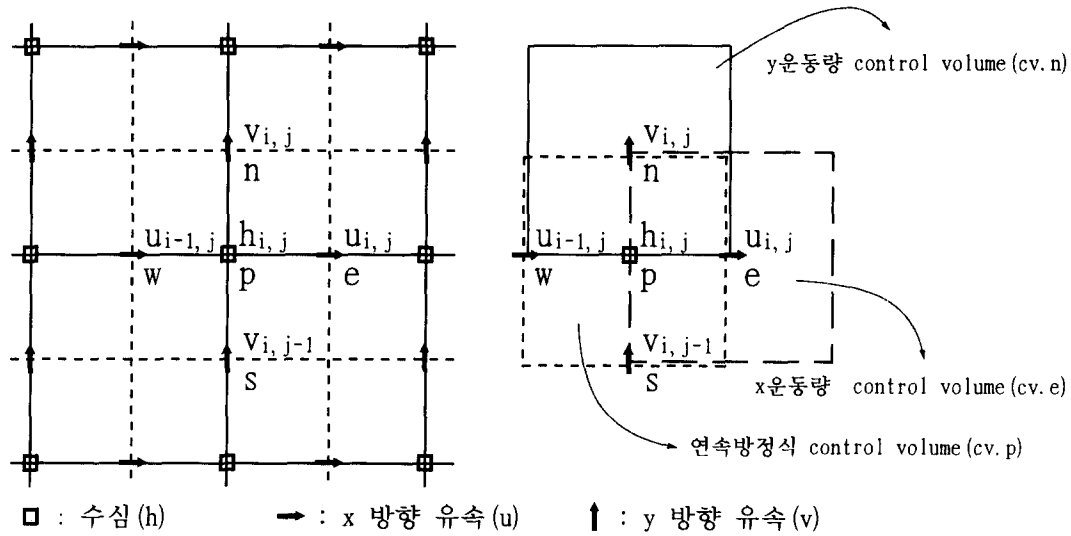


그림 1. 엇갈린 격자망과 제어체적

여기서 n 은 Manning의 조도계수이고, C_0 는 차원 상수이다.

3. 이산화방정식의 유도

식 (1)~(3)의 지배방정식에 대한 이산화방정식을 유도하기 위한 엇갈린 격자망과 제어체적은 그림 1과 같다.

그림 1에서 수심 $h_{i,j}$ 를 중심으로 오른쪽에 정의된 유속 $u_{i,j}$ 를 포함하는 제어체적(cv.e)에 대하여 x방향-운동량방정식을 적분하고 이송항에 대하여 수렴의 안정성을 확보하기 위하여 3차 정도의 upwind scheme(3rd order accurate upwind scheme; Agarwal, 1981)을 이용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\int \int_{cv.e} \frac{\partial u}{\partial t} dx dy = \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{cv.e} u dx dy = \frac{\partial}{\partial t} (u_{i,j}) \Delta x \Delta y \quad (6)$$

$$\int \int_{cv.e} u \frac{\partial u}{\partial x} dx dy$$

$$= \begin{cases} u_{i,j} \left(\frac{2u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - 6u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{6} \right) \Delta y & \text{if } u_{i,j} > 0 \quad (7a) \\ u_{i,j} \left(\frac{-u_{i+2,j} + 6u_{i+1,j} - 3u_{i,j} - 2u_{i-1,j}}{6} \right) \Delta y & \text{if } u_{i,j} < 0 \quad (7b) \end{cases}$$

$$\int \int_{cv.e} v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \begin{cases} v_{i,j} \left(\frac{2u_{i,j+1} + 3u_{i,j} - 6u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{6} \right) \Delta x & \text{if } v_{i,j} > 0 \quad (8a) \\ v_{i,j} \left(\frac{-u_{i,j+2} + 6u_{i,j+1} - 3u_{i,j} - 2u_{i,j-1}}{6} \right) \Delta x & \text{if } v_{i,j} < 0 \quad (8b) \end{cases}$$

여기서,

$$v_e = \frac{1}{4} (v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}) \quad (9)$$

$$\int \int_{cv.e} g \frac{\partial h}{\partial x} dx dy = g \left(\frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{2} \right) \Delta y \quad (10)$$

$$\int \int_{cv.e} g (S_{0x} - S_{fx}) dx dy = g \left[S_{0x} \frac{n^2 u_{i,j} \sqrt{u_{i,j}^2 + \left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}}{4} \right)^2}}{C_0^2 \left(\frac{h_{i,j} + h_{i+1,j}}{2} \right)^{4/3}} \right]$$

$$\Delta x \Delta y \quad (11)$$

여기서 아래첨자 i 는 종속변수의 x 방향 격자점의 위치를 나타내며, 아래첨자 j 는 종속변수의 y 방향 격자점의 위치를 나타낸다.

또한, y 방향-운동량방정식을 그림 1에서 $u_{i,j}$ 를 포함하는 제어체적(cv.n)에 대하여 적분하고 이송 항에 대하여 3차 정도의 upwind scheme을 이용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\int \int_{cv.n} \frac{\partial v}{\partial t} dx dy = \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{cv.n} v dx dy = \frac{\partial}{\partial t} (v_{i,j}) \Delta x \Delta y \quad (12)$$

$$\int \int_{cv.n} u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \begin{cases} u_n \left(\frac{2v_{i,j+1} + 3v_{i,j} - 6v_{i,j-1} + v_{i,j-2}}{6} \right) \Delta y & \text{if } u_n > 0 \\ u_n \left(\frac{-v_{i,j+2} + 6v_{i,j+1} - 3v_{i,j} - 2v_{i,j-1}}{6} \right) \Delta y & \text{if } u_n < 0 \end{cases} \quad (13a)$$

$$= \begin{cases} u_n \left(\frac{2v_{i,j+1} + 3v_{i,j} - 6v_{i,j-1} + v_{i,j-2}}{6} \right) \Delta y & \text{if } u_n > 0 \\ u_n \left(\frac{-v_{i,j+2} + 6v_{i,j+1} - 3v_{i,j} - 2v_{i,j-1}}{6} \right) \Delta y & \text{if } u_n < 0 \end{cases} \quad (13b)$$

여기서,

$$u_n = \frac{1}{4} (u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}) \quad (14)$$

$$\int \int_{cv.n} v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \begin{cases} v_n \left(\frac{2u_{i,j+1} + 3u_{i,j} - 6u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{6} \right) \Delta x & \text{if } v_n > 0 \\ v_n \left(\frac{-u_{i,j+2} + 6u_{i,j+1} - 3u_{i,j} - 2u_{i,j-1}}{6} \right) \Delta x & \text{if } v_n < 0 \end{cases} \quad (15a)$$

$$= \begin{cases} v_n \left(\frac{2u_{i,j+1} + 3u_{i,j} - 6u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{6} \right) \Delta x & \text{if } v_n > 0 \\ v_n \left(\frac{-u_{i,j+2} + 6u_{i,j+1} - 3u_{i,j} - 2u_{i,j-1}}{6} \right) \Delta x & \text{if } v_n < 0 \end{cases} \quad (15b)$$

$$\int \int_{cv.n} g \frac{\partial h}{\partial y} dx dy = g \left(\frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{2} \right) \Delta y \quad (16)$$

$$\int \int_{cv.n} g (S_{0y} - S_{fy}) dx dy = g \left[S_{0y} \frac{n^2 v_{i,j} \sqrt{\left(\frac{u_{i-1,j} + u_{i,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1}}{4} \right)^2 + v_{i,j}^2}}{C_0^2 \left(\frac{h_{i,j} + h_{i,j+1}}{2} \right)^{4/3}} \right] \Delta x \Delta y \quad (17)$$

식 (6)과 (12)의 비정상항에 대한 전진해를 구하기 위해서 선형적인 방법 대신에 비선형이지만 3차의 정도를 갖도록 시간단계를 세계의 가상단계를 거쳐서 전진해를 구하는 3차의 Runge-Kutta 방법(Hirsch, 1988)을 사용하며, 각단계별 이산화 방정식은 다음과 같이 구한다.

$$\text{단계 1 : } n \Delta t \rightarrow (n+8/15) \Delta t,$$

$$\bar{\phi}^{n+\frac{8}{15}} = \phi^n + \frac{8}{15} \Delta t \phi'^n \quad (18)$$

$$\text{단계 2 : } (n+8/15) \Delta t \rightarrow (n+2/3) \Delta t,$$

$$\bar{\phi}^{n+\frac{2}{3}} = \bar{\phi}^{n+\frac{8}{15}} + \frac{5}{12} \Delta t \bar{\phi}'^{n+\frac{8}{15}} - \frac{17}{60} \Delta t \phi'^n \quad (19)$$

$$\text{단계 3 : } (n+2/3) \Delta t \rightarrow (n+1) \Delta t,$$

$$\phi^{n+1} = \bar{\phi}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{3}{4} \Delta t \bar{\phi}'^{n+\frac{2}{3}} - \frac{5}{12} \Delta t \bar{\phi}'^{n+\frac{8}{15}} \quad (20)$$

여기서, ϕ^n , $\bar{\phi}^{n+\frac{8}{15}}$, $\bar{\phi}^{n+\frac{2}{3}}$, ϕ^{n+1} 은 각 시간단계에서의 비정상항의 변수이며, ϕ'^n , $\bar{\phi}'^{n+\frac{8}{15}}$, $\bar{\phi}'^{n+\frac{2}{3}}$ 은 각 시간단계에서의 비정상항 이외항의 변수를 의미한다.

주어진 식 (1)~(3)의 지배방정식을 3차의 Runge-Kutta 방법을 적용하여 각 단계별 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$\text{단계 1 : 시간단계 } n \Delta t \text{에서 시간단계 } (n+8/15) \text{로의 전진}$$

식 (2)와 (3)의 운동량 방정식으로부터 압력항만을 음해법으로 계산하고, 나머지 항에 대해서는 식 (18)을 적용시키면 시간단계 $(n+8/15) \Delta t$ 에서의 유속 u , v 가 아래식과 같이 수심 h 만의 함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{8}{15}}}{u_{i,j}^n} &= u_{i,j}^n + \frac{8}{15} \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \left(\int \int_{cv.e} F_u^n dx dy \right) \\ &= \frac{8}{15} g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{h}_{i+1,j}^{n+\frac{8}{15}} - \bar{h}_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i-1,j}^{n+\frac{8}{15}} &= u_{i-1,j}^n + \frac{8}{15} \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \left(\int \int_{cv.w} F_u^n dx dy \right) \\ &\quad - \frac{8}{15} g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{h}_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} - \bar{h}_{i-1,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} &= v_{i,j}^n + \frac{8}{15} \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \left(\int \int_{cv.n} F_v^n dx dy \right) \\ &\quad - \frac{8}{15} g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{h}_{i,j+1}^{n+\frac{8}{15}} - \bar{h}_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{i,j-1}^{n+\frac{8}{15}} &= v_{i,j-1}^n + \frac{8}{15} \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \left(\int \int_{cv.s} F_v^n dx dy \right) \\ &\quad - \frac{8}{15} g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{h}_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} - \bar{h}_{i,j-1}^{n+\frac{8}{15}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,

$$F_u = g(S_{\partial x} - S_{f_x}) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (25)$$

$$F_v = g(S_{\partial y} - S_{f_y}) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (26)$$

또한, 식 (1)의 연속방정식을 그림 1에서 $h_{i,j}$ 를 포함하는 제어체적(cv.p)에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int \int_{cv.p} \int_{ndt}^{(n+\frac{8}{15})\Delta t} \frac{\partial h}{\partial t} dt dx dy \\ &+ \int_{ndt}^{(n+\frac{8}{15})\Delta t} \int \int_{cv.p} \frac{\partial}{\partial x} (uh) dx dy dt \\ &+ \int_{ndt}^{(n+\frac{8}{15})\Delta t} \int \int_{cv.p} \frac{\partial}{\partial y} (vh) dy dx dt \\ &= \left(\bar{h}_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} - h_{i,j}^n \right) \Delta x \Delta y \\ &+ \left((uh)_e^{n+\frac{8}{15}} - (uh)_w^{n+\frac{8}{15}} \right) \Delta y \left(\frac{8}{15} \Delta t \right) \\ &+ \left((vh)_n^{n+\frac{8}{15}} - (vh)_s^{n+\frac{8}{15}} \right) \Delta x \left(\frac{8}{15} \Delta t \right) \end{aligned} \quad (27)$$

식 (21)~(24)를 식 (27)에 대입하여 정리하면 아래와 같은 $(n+8/15) \Delta t$ 단계에 대한 이산화된

방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i,j} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) &= \bar{a}_{i-1,j} \left(h_{i-1,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \\ &+ \bar{a}_{i,j-1} \left(h_{i,j-1}^{n+\frac{8}{15}} \right) + \bar{a}_{i+1,j} \left(h_{i+1,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \\ &+ \bar{a}_{i,j+1} \left(h_{i,j+1}^{n+\frac{8}{15}} \right) + \bar{b}_{i,j} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서,

$$\bar{a}_{i-1,j} = \left(\frac{8}{15} \Delta t \right)^2 g \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i-1,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \quad (29)$$

$$\bar{a}_{i+1,j} = \left(\frac{8}{15} \Delta t \right)^2 g \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i+1,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \quad (30)$$

$$\bar{a}_{i,j-1} = \left(\frac{8}{15} \Delta t \right)^2 g \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i,j-1}^{n+\frac{8}{15}} \right) \quad (31)$$

$$\bar{a}_{i,j+1} = \left(\frac{8}{15} \Delta t \right)^2 g \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i,j+1}^{n+\frac{8}{15}} \right) \quad (32)$$

$$\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i-1,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i,j-1} + \bar{a}_{i,j+1} + \Delta x \Delta y \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_{i,j} &= h_{i,j}^n \Delta x \Delta y \\ &+ \frac{1}{2} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i-1,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \left[u_{i-1,j}^n \Delta y \left(\frac{8}{15} \Delta t \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{8}{15} \Delta t \right)^2 \frac{1}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.w} F_u^n dx dy \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i+1,j}^{n+\frac{8}{15}} \right) \left[u_{i,j}^n \Delta y \left(\frac{8}{15} \Delta t \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{8}{15} \Delta t \right)^2 \frac{1}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.e} F_u^n dx dy \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i,j-1}^{n+\frac{8}{15}} \right) \left[v_{i,j-1}^n \Delta x \left(\frac{8}{15} \Delta t \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{8}{15} \Delta t \right)^2 \frac{1}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.s} F_v^n dx dy \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \left(h_{i,j}^{n+\frac{8}{15}} + h_{i,j+1}^{n+\frac{8}{15}} \right) \left[v_{i,j}^n \Delta x \left(\frac{8}{15} \Delta t \right) \right. \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{8}{15}\Delta t\right)^2 \frac{1}{\Delta y}\left(\int \int_{cv.n} F_v^n dx dy\right)] \quad (34)$$

단계 2 : 시간단계 $(n+8/15)\Delta t$ 에서 시간단계 $(n+2/3)\Delta t$ 로의 전진

단계 1에서와 비슷한 방법으로 운동량 방정식과 연속방정식으로부터 아래와 같은 $(n+2/3)\Delta t$ 단계에서의 이산화된 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j}\left(\tilde{h}_{i,j}^{n+\frac{2}{3}}\right) &= \tilde{a}_{i-1,j}\left(\tilde{h}_{i-1,j}^{n+\frac{2}{3}}\right) + \tilde{a}_{i,j-1}\left(\tilde{h}_{i,j-1}^{n+\frac{2}{3}}\right) \\ &+ \tilde{a}_{i+1,j}\left(\tilde{h}_{i+1,j}^{n+\frac{2}{3}}\right) + \tilde{a}_{i,j+1}\left(\tilde{h}_{i,j+1}^{n+\frac{2}{3}}\right) + \tilde{b}_{i,j} \end{aligned} \quad (35)$$

여기서,

$$\tilde{a}_{i-1,j} = \frac{2}{225} g \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta t^2 \left(\tilde{h}_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i-1,j}^{n+\frac{2}{3}} \right) \quad (36)$$

$$\tilde{a}_{i+1,j} = \frac{2}{225} g \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta t^2 \left(\tilde{h}_{i+1,j}^{n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} \right) \quad (37)$$

$$\tilde{a}_{i,j-1} = \frac{2}{225} g \frac{\Delta x}{\Delta y} \Delta t^2 \left(\tilde{h}_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i,j-1}^{n+\frac{2}{3}} \right) \quad (38)$$

$$\tilde{a}_{i,j+1} = \frac{2}{225} g \frac{\Delta x}{\Delta y} \Delta t^2 \left(\tilde{h}_{i,j+1}^{n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} \right) \quad (39)$$

$$\tilde{a}_{i,j} = \tilde{a}_{i-1,j} + \tilde{a}_{i+1,j} + \tilde{a}_{i,j-1} + \tilde{a}_{i,j+1} + \Delta x \Delta y \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{i,j} &= \tilde{h}_{i,j}^{-n+\frac{8}{15}} \Delta x \Delta y \\ &+ \frac{1}{2} \left(\tilde{h}_{i,j}^{-n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i-1,j}^{-n+\frac{2}{3}} \right) \left[\tilde{u}_{i-1,j}^{-n+\frac{8}{15}} \Delta y \left(\frac{2}{15} \Delta t \right) \right. \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.w} F_u^{-n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \\ &\left. - \frac{17}{450} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.w} F_u^n dx dy \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \left(\tilde{h}_{i+1,j}^{-n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i,j}^{-n+\frac{2}{3}} \right) \left[\tilde{u}_{i,j}^{-n+\frac{8}{15}} \Delta y \left(\frac{2}{15} \Delta t \right) \right. \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.e} F_u^{-n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \\ &\left. - \frac{17}{450} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.e} F_u^n dx dy \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left(\tilde{h}_{i,j}^{-n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i,j-1}^{-n+\frac{2}{3}} \right) \left[\tilde{v}_{i,j-1}^{-n+\frac{8}{15}} \Delta x \left(\frac{2}{15} \Delta t \right) \right. \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.s} F_v^{-n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \\ &\left. - \frac{17}{450} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.s} F_v^n dx dy \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left(\tilde{h}_{i,j+1}^{-n+\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{i,j}^{-n+\frac{2}{3}} \right) \left[\tilde{v}_{i,j}^{-n+\frac{8}{15}} \Delta x \left(\frac{2}{15} \Delta t \right) \right. \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.n} F_v^{-n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \\ &\left. - \frac{17}{450} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.n} F_v^n dx dy \right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

단계 3 : 시간단계 $(n+2/3)\Delta t$ 에서 시간단계 $(n+1)\Delta t$ 로의 전진

단계 1, 단계 2에서와 비슷한 방법으로 운동량 방정식과 연속방정식으로부터 아래와 같은 $(n+1)\Delta t$ 에서의 이산화된 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{i,j}\left(h_{i,j}^{n+1}\right) &= a_{i-1,j}\left(h_{i-1,j}^{n+1}\right) + a_{i,j-1}\left(h_{i,j-1}^{n+1}\right) \\ &+ a_{i+1,j}\left(h_{i+1,j}^{n+1}\right) + a_{i,j+1}\left(h_{i,j+1}^{n+1}\right) + b_{i,j} \end{aligned} \quad (42)$$

여기서,

$$a_{i-1,j} = \frac{1}{18} g \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta t^2 \left(h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} \right) \quad (43)$$

$$a_{i+1,j} = \frac{1}{18} g \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta t^2 \left(h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i,j}^{n+1} \right) \quad (44)$$

$$a_{i,j-1} = \frac{1}{18} g \frac{\Delta x}{\Delta y} \Delta t^2 \left(h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} \right) \quad (45)$$

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{18} g \frac{\Delta x}{\Delta y} \Delta t^2 (h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j}^{n+1}) \quad (46)$$

$$a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1} + \Delta x \Delta y \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
 b_{i,j} = & h_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} \Delta x \Delta y \\
 & + \frac{1}{2} (h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}) \left[\tilde{u}_{i-1,j}^{n+\frac{2}{3}} \Delta y \left(\frac{1}{3} \Delta t \right) \right. \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.w} \tilde{F}_u^{n+\frac{2}{3}} dx dy \right) \\
 & \left. - \frac{5}{36} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.w} \tilde{F}_u^{n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \right] \\
 & - \frac{1}{2} (h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i,j}^{n+1}) \left[\tilde{u}_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} \Delta y \left(\frac{1}{3} \Delta t \right) \right. \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.e} \tilde{F}_u^{n+\frac{2}{3}} dx dy \right) \\
 & \left. - \frac{5}{36} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.e} \tilde{F}_u^{n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \right] \\
 & + \frac{1}{2} (h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}) \left[\tilde{v}_{i,j-1}^{n+\frac{2}{3}} \Delta x \left(\frac{1}{3} \Delta t \right) \right. \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \left(\int \int_{cv.s} \tilde{F}_v^{n+\frac{2}{3}} dx dy \right) \\
 & \left. - \frac{5}{36} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.s} \tilde{F}_v^{n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \right] \\
 & - \frac{1}{2} (h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j}^{n+1}) \left[\tilde{v}_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} \Delta x \left(\frac{1}{3} \Delta t \right) \right. \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.n} \tilde{F}_v^{n+\frac{2}{3}} dx dy \right) \\
 & \left. - \frac{5}{36} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left(\int \int_{cv.n} \tilde{F}_v^{n+\frac{8}{15}} dx dy \right) \right] \quad (48)
 \end{aligned}$$

4. 수치모형의 구성

각 단계에서 구성된 식 (28), (35), (42)의 이산화방정식을 풀기 위해 본 연구에서는 반복계산법의 하나인 Gauss Seidal방법과 함께 상향이완계수로 1.6을 사용한 연속상향이완(successive over relaxation, SOR)방법을 사용하였다. 본 연구에서

개발된 수치모형의 흐름도는 그림 2와 같으며, 프로그램은 FORTRAN 언어로 코딩되었다. 정류의 계산은 시간단계 $n\Delta t$ 에서의 수심과 시간단계 $(n+1)\Delta t$ 에서의 수심이 같아질 때까지 계산되며, 계산시 필요한 소요시간은 Pentium급 개인용컴퓨터를 이용할 경우 소수이하 셋째자리까지 변화가 없는 경우를 정류상태에 수렴한 것으로 본다면 5분 정도가 필요하다. 부정류의 계산은 홍수과가 유입되는 동안 계산하도록 하였다. 흐름도의 비선형방정식 solver는 식 (28), (35), (42)의 이산화방정식은 계수와 상수항에 포함된 종속변수 h 에 의해 비선형방정식이 되며 이를 풀기 위해 이용되는 루틴으로 다음과 같은 과정에 의해 해를 구한다.

- 1) 모든 격자점에서 전단계의 h 를 최초의 추정치로 사용한다.
- 2) 이 추정된 h 값으로부터 이산화방정식의 계수 a 와 상수항 b 를 계산한다.
- 3) 새로운 h 를 계산하기 위하여 명목상 선형인 식 (28), (35), (42)의 이산화방정식을 푼다.
- 4) 이들 h 값을 좀더 개선된 추정값으로 사용하여 2)로 돌아가며, 이 과정을 반복하더라도 h 값의 변화가 거의 없을 때까지 계속한다.
- 5) 이렇게 하여 최종적으로 변하지 않은 상태를 반복 계산이 수렴했다고 하며, 수렴된 값은 비록 이 값이 선형방정식을 푸는 방법에 의해 얻어진 것이지만, 실질적으로는 비선형방정식의 올바른 해가 된다.

5. 수치모형의 검정

본 연구에서는 수치모형의 실제문제에 대한 적용가능성을 검정하는 방법으로 정확해가 알려져 있는 일차원 직사각형수로에 적용하여 그 결과를 비교하였다. 수로입구에서 수위의 변동이 정상파(standing wave)로 주어지는 정확해는 y 방향의 유속 $v=0$, 국부이송과 바닥마찰등을 고려하지 않을 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다(Partridge와 Breb-bia, 1976).

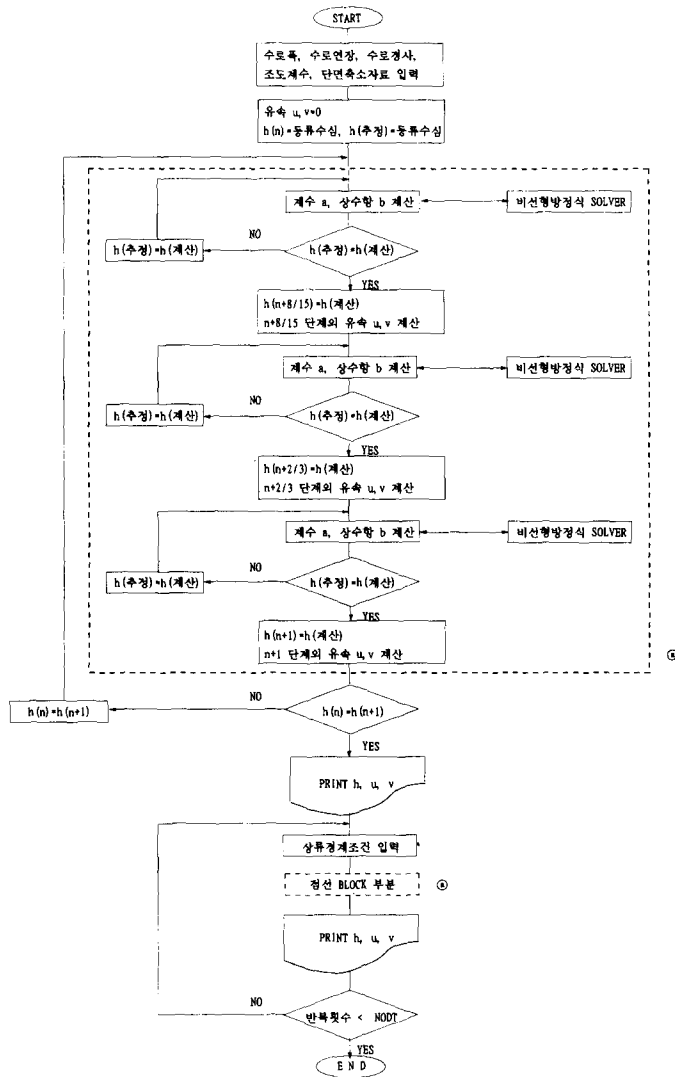


그림 2. 수치모델의 흐름도

$$h = d + \frac{a}{\cos\left(\frac{wl}{\sqrt{gd}}\right)} \cos\left(\frac{wl}{\sqrt{gd}}(x-l)\right) \sin(wt) \quad (49)$$

$$u = \frac{a\sqrt{gd}}{d \cos\left(\frac{wl}{\sqrt{gd}}\right)} \sin\left(\frac{wl}{\sqrt{gd}}(x-l)\right) \cos(wt) \quad (50)$$

여기서, a 는 입사파의 진폭, x 는 수로 입구로부터의 거리, d 는 평균수심, l 은 수로길이, w 는 T 가 입사파의 주기일 때 $2\pi/T$ 로 정의되는 각속도를 나타낸다. 검정에 사용된 수로는 수로길이 90m, 수로폭 12m의 하류단이 폐쇄된 직사각형수로가 사용되었다. 검증에는 $T=72$ 초, $\Delta x = \Delta y = 1$ m, $\Delta t = 1$, $d = 10$ m로 수로 상류단으로부터 30m 지점에 대하여 $t = 216$ 초 동안 수행하였다. 수행한 결과는 그림 3에서 수심에 대한 정확해와의 비교

하였으며, 그림 4에서 유속에 대한 정확해와 비교하였다. 초기에 유속은 0으로 수위는 평균수심 d 인 cold start 조건을 사용하였기 때문에 초기의 결과에서 진동하는 것을 볼 수 있으며, 시간이 진행될수록 안정적인 해를 갖고 있음을 보여주고 있다.

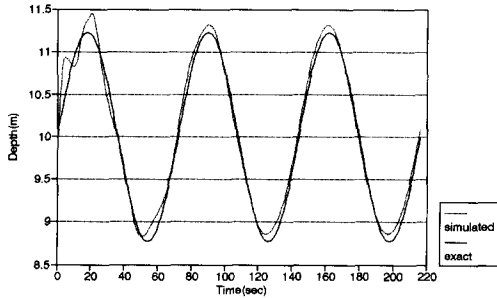


그림 3. 수심에 대한 정확해와 수치해의 비교

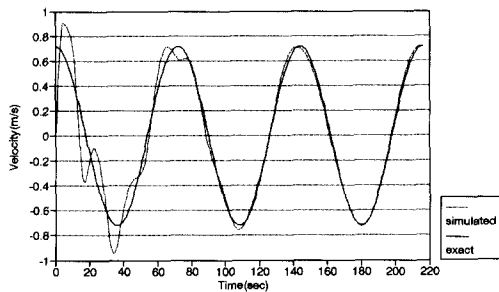


그림 4. 유속에 대한 정확해와 수치해의 비교

6. 수치모형의 적용

수치모형을 수로폭은 120m이며, 길이는 2.5km의 직사각형 수로단면이 대칭 및 비대칭으로 축소되는 경우에 적용시켰다. 수치모형을 적용한 수로의 평면도는 그림 5와 같으며, 그림에서 대칭단면 축소의 경우 좌안, 우안 모두 $3\Delta y$ 를 축소시켰으며, 비대칭단면축소의 경우 좌안은 $2\Delta y$, 우안은 $4\Delta y$ 를 축소시켜 모의하였다. 총정의된 제어체적

의 개수는 종방향 250개, 횡방향 13개로 계산영역을 분할하여 공간 간격 $\Delta x=10m$, $\Delta y=9.23m$ 값을 취하였다. 시간간격에 대해서는 비선형 이송가속도항과 바닥마찰로 인해 예상되는 수치모형의 불안정성을 해결하기 안정조건으로 Falconer(1980)에 다음의 식 (51)을 만족하여야 한다.

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} |U_{\max}| \leq 1 \quad (51)$$

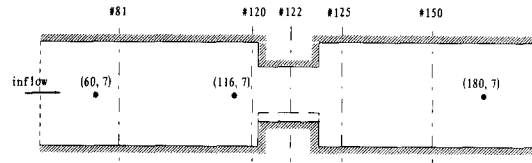


그림 5. 단면축소부를 포함한 개수로의 평면도

본 모형에서는 α 의 값이 $1/\sqrt{3}$ 일 때 전진해를 구하는 과정에서 안정성을 보장받을 수 있는 것으로 나타났다. 수치모형의 적용시 정류, 부정류 계산시 모두 시간간격 $\Delta t=5$ 초의 값을 취하여 모의하였다.

6.1 초기 및 경계조건

흐름 상태를 해석하고자 하는 수로에 대한 정류 상태의 초기조건으로 수심은 등류수심을 주고 계산을 수행하였다. 이때 수로전체의 유속분포를 알 수 없으므로 유속은 0인 정지상태로 가정하며, 상류에서 Manning의 평균유속공식으로부터 계산된 수심과 유속을 상류조건으로 대입한다. 부정류 해석시에는 초기조건으로 정류상태로부터 계산된 수심과 유속값을 가지고 계산을 시작하였다. 상류의 경계조건으로는 유입되는 유량에 대하여 Manning의 평균유속 공식을 사용하여 수심과 유속을 구하여 경계조건으로 사용하여 시간변화에 따른 하천의 흐름현상을 해석하였다. 하안의 경계조건으로는 하안에 수직인 유속성분과 접선방향의 유속성분이 다갈

이 쉼인 no-slip 조건을 대입하였다. 하류의 경계 조건으로 하류경계선 이전의 y 축방향에 대한 일련의 제어체적에 대하여, 유입된 유량이 전부 하류로 유출되도록 하였다.

6.2 흐름해석 결과

본 수치모델에서 계산된 최대배수고와 등류수심의 비를 Liu 등(1957)에 의한 식 (52)와 Izzard (Kindsvater와 Carter, 1955)에 의한 식 (53)으로 계산된 값을 비교하였다.

$$\left(\frac{y_1}{y_n}\right)^3 = 4.48F^2 \left[\frac{1}{M^2} \frac{2}{3}(2.5-M) \right] + 1 \quad (52)$$

$$\frac{y_1}{y_n} = 1 + 0.45 \left(\frac{F}{M} \right)^2 \quad (53)$$

여기서 y_1 과 y_n 은 각각 최대수심과 등류수심이며, M 은 개구비로 수로의 전체폭에 대한 단면수축시의 수로폭이다. F 는 Froude 수($=u_n/\sqrt{gy_n}$)이며, u_n , g 는 각각 Manning 식으로부터 계산된 유속과 중력가속도를 나타낸다.

개구비 $M=0.54$, 하천경사 $S_0=0.001$, Manning의 조도계수 $n=0.030$ 일때 상이한 유량에 대하여 식 (52) 및 (53)에 대해 배수계산한 결과와

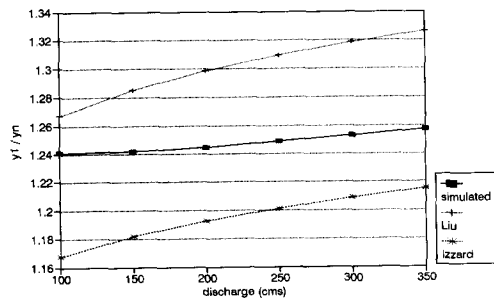


그림 6. 상이한 유량에 대한 배수계산 결과의 비교

모의실험된 결과를 그림 6에서와 같이 비교하였다. 그림 6에서 수치해석의 결과는 두 경험식의 중간 값으로 어느 정도 배수현상을 잘 나타내고 있다.

그림 7과 그림 8은 개구비 $M=0.54$, 하상경사 $S_0=0.001$, Manning의 조도계수 $n=0.035$ 이고, 유량 $100 \text{ m}^3/\text{s}$ 가 일정하게 흐를 때 대칭 및 비대칭 단면 축소로 인한 횡단면의 수면형 분포를 보여 주고 있다. #81 단면에서는 단면축소부에 의한 흐름단면의 축소로 인하여 등류수심보다 수위가 상승했다. #120 단면에서는 양쪽 하안의 수위가 중앙부의 수위보다 높아짐을 볼 수 있다. #122 단면에서는 단면축소부의 설치된 중앙지점으로 중앙부의 수위가 하안쪽의 수위보다 상승되었으며, 구조물 설치부의 직상류부인 #120 단면보다 수위가 낮아졌다. #125 단면에서는 하안의 수위가 중앙부의 수위보다 낮아졌다. 그림 9와 그림 10은 수로단면이 대칭 및 비대칭으로 축소될 때 축소부 부근의 정류상태의 유속의 벡터도를 보여주고 있으며, 단면축소부 직하류쪽으로 유속이 증가하며, 단면축소부의 하류하안에 순환류가 발생하는 것과 흐름의 분리 현상을 볼 수 있다. 그림 7과 그림 9에서의 대칭 단면 축소의 경우 수로의 중앙부를 기준으로 대칭을 이루고 있을 볼 수 있다.

그림 11과 그림 12에서는 유량이 $100 \text{ m}^3/\text{s}$ 로 일정하게 유입될 때의 정류흐름 해석결과인 유속과

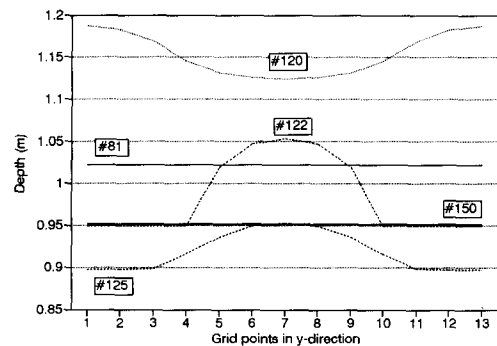


그림 7. 횡단면 수면형 (정류, 대칭단면축소)

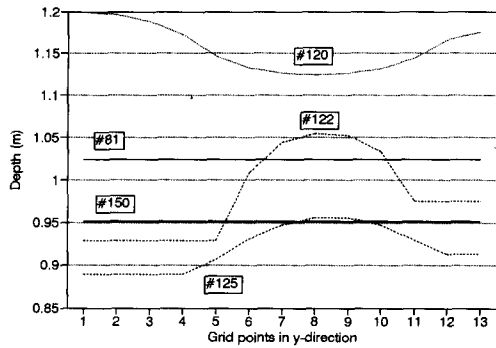


그림 8. 횡단면 수면형(정류, 비대칭단면축소)

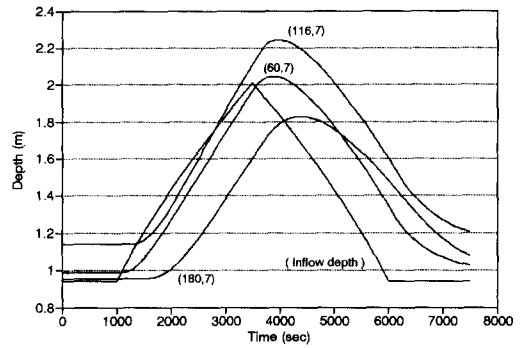


그림 9. 단면축소 부근의 유속의 벡터도
(정류, 대칭단면축소)

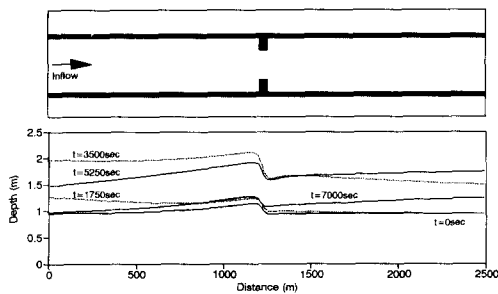


그림 10. 단면축소 부근의 유속의 벡터도
(정류, 비대칭단면축소)

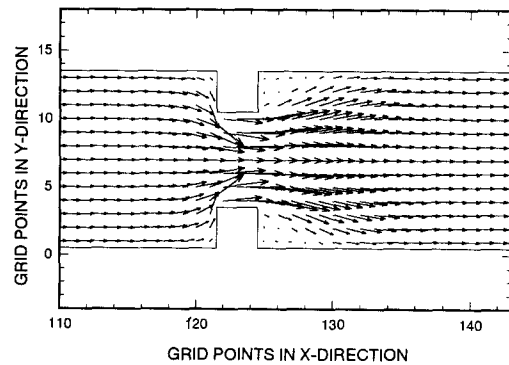


그림 11. 시간변화에 대한 지점별 수위(대칭단면축소)

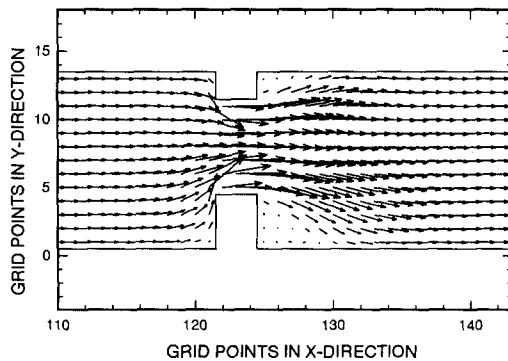


그림 12. 시간변화에 대한 중앙부 수심의 종단면도
(대칭단면축소)

수위를 부정류상태의 흐름을 해석하기 위한 초기조건으로 모의 하였다. 대칭단면축소시 삼각형 모양의 홍수파가 7500초 동안 상류경계의 전단면에 대하여 유입될 때의 하천중앙부의 격자점(60,7), 격자점(116,7), 격자점(180,7)에서의 홍수파의 모양과 수심이 축소부를 지나면서 어떻게 변화하는지를 그림 11에 나타냈으며, 0초, 1750초, 3500초, 5250초, 7000초에 대한 수면의 각 시간별 종단수면형을 그림 12에 도시하였다. 구조물에 의한 단면축소 구간인 1200m부터 1230m 사이에서 수면의 변화가 심하게 일어남을 알 수 있으며, 최대수

심은 구조물 설치부로부터 거리가 일정하게 떨어진 상류에 발생함을 알 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 2차원 천수방정식을 유한체적법에 의해 이산화방정식을 유도하였으며, 이를 수치적으로 풀기 위하여 반복법의 하나인 연속상향어완(SOR)방법을 이용하였다. 개발된 수치모델을 구조물 설치등으로 인하여 단면이 축소된 직사각형수로에 적용하여 유속과 수심의 분포를 모르는 상태에서 정류상태의 흐름을 모의하여 상이한 유량에 대한 유속과 수심의 분포를 얻을 수 있었다. 얻어진 결과는 질량, 운동량과 같은 양들의 완전한 보존이 개개의 제어체적내 뿐만 아니라 계산영역 전체에 대하여 만족되고 있음을 확인 할 수 있었다. 또한 상류흐름시 문제가 되는 배수현상과 단면축소부에서의 흐름현상을 잘 모의 할 수 있었다. 정류상태의 유속과 수위를 초기조건으로하여 상류경계에 홍수와 유입에 의한 흐름현상을 해석함으로써 본 모델을 이용하여 정류상태 뿐만아니라 부정류상태의 흐름을 해석 할 수 있었다. 비록 본 연구에서는 인공 직사각형수로에 수치모델을 적용하였지만 앞으로의 실제 하천에 대한 적용시에도 신뢰성 있는 해석결과가 기대된다.

참 고 문 헌

명현국 (1995). 수치유체공학. 한미.
Agarwal, R.K. (1981). "A third-order-accurate upwind scheme for Navier-Stokes solutions at high Reynolds numbers." *AIAA 19th Aerospace Sciences Seeting*, St. Louis, Missouri.
Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R. H. (1984). *Computational fluid mechanics and*

heat transfer. Hemisphere Publishing Corporation, Washinton.
Chaudhry, M.H. (1993). *Open-channel flow*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Falconer, R.A. (1980). "Numerical modeling of tidal circulation in harbors." *Jour. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Div.*, ASCE, Vol. 106, No. WW1, pp. 31-44.
Hirsch, C. (1988). *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley & Sons, Chichester.
Kindsvater, C.W., and Carter, R.W. (1955). "Tranquil flow through open channel constrictions." *Transactions of ASCE*, Vol. 120, pp. 955-980.
Liu, H.K., Bradley, J.N., and Plate, E.J. (1957). "Backwater effects of piers and abutments." *Report CER57HKL10*, Civil Engineering Section, Colorado State University, Fort Collins, Colo.
Partridge, P.W., and Brebbia, C.A. (1976). "Quadratic finite elements in shallow water problems." *Jour. of Hydr. Div.*, ASCE, Vol. 102, No. HY9, pp. 1299-1313.
Patankar, S.V. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington.
Zhao, D.H., Shen, H.W., Tabios III, G.Q., Lai, J. S., and Tan, W.Y. (1994). "Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basins." *Jour. of Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 120, No. 7, pp. 863-883.
Zhou, J.G. (1995). "Velocity-depth coupling in shallow-water flows." *Jour. of Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 123, No. 10, pp. 717-724.
(접수: 1996년 3월 14일)