

線形 Muskingum-Cunge 법에서의 數值的 因子의 變化가 유출특성에 미치는 영향

Effect of Change of Numerical Parameters on Outflow Characteristics in the Linear Muskingum-Cunge Method

김진수*

Kim, Jin Soo

Abstract

This paper presents the effect of numerical parameters, such as grid size and grid ratio, on the outflow hydrograph of a unit-width plane in the linear Muskingum-Cunge method. The numerical results depend on Courant number C and cell Reynolds number D , two physically and numerically meaningful parameters. As C approaches 1 and D increases, the numerical dispersion-relating oscillations are difficult to occur. The numerical oscillations occur in the front of a propagating wave for $C < 1$, while smaller oscillations occur behind the wave for $C > 1$ due to the numerical diffusion effect. For a plane with a small value of characteristic reach length L (e.g., a steep plane), the numerical solution of the Muskingum-Cunge method is similar to that of the kinematic wave method, which shows no wave attenuation. However, for a plane with a large value of L (e.g., a mild plane), the Muskingum-Cunge method leads to the diffusion waves which are essentially independent of the Courant number. Accordingly, the Muskingum-Cunge method will be suited for the routing of the catchment with relatively mild slopes.

요 지

본 논문에서는 수리학적 유역추적 모형인 선형 Muskingum-Cunge(M-C)법에 있어서 격자간격과 같은 수치적 인자의 변화가 단위폭사면에서의 유출수문곡선에 미치는 영향을 소개한다. 수치계산의 결과에 의하면, 유출특성은 수치적 또는 물리적으로 의미를 갖는 Courant 수 C 및 cell Reynolds 수 D 의 값에 좌우되는데, C 값은 1에 접근할수록 D 값은 증가할수록 數值分散에 의한 진동은 발생하기 어렵다. $C < 1$ 인 경우는 수치진동이 移動波의 前方에 발생한다. $C > 1$ 인 경우는 파의 後方에 발생하는데, 이 때는 수치확산의 효과로 인해 수치진동은 작아지거나 사라진다. 특성구간길이 L 의 값이 작은 사면(예, 급경사사면)의 경우, M-C법은

* 충북대학교 농과대학 농공학과 조교수

kinematic 법과 마찬가지로 파의 감쇠를 보이지 않는다. 한편 L의 값이 큰 사면(예, 완경사 사면)에서는 M-C 법은 큰 거리격자간격(Δx)에서도 큰 $D(= L/\Delta x)$ 의 값을 갖게되어 C에 거의 관계없이 diffusion wave를 잘 재현한다. 따라서 완경사 유역의 추적에 있어 M-C 법의 적용은 매우 유효하리라고 생각된다.

1. 서 론

수리학적(물리적) 유출모형은 유역의 지형, 지질, 식생 등의 특성이 주어졌을 경우 유출현상을 기술하는 흐름의 물리법칙에 의하여 강우-유출관계를 직접 구하는 것이다. 이 모형은 신뢰성 있는 과거 수문 자료가 없는 유역의 유출계산을 할 경우나, 유역의 토지이용형태의 변경이 가지고 오는 영향이나 효과를 사전에 예측하려고 할 경우에 효과적으로 적용할 수 있다. 유역의 홍수추적에 많이 이용되는 수리학적 모형으로서는 kinematic wave 법(Wooding, 1965; 角屋睦, 1982; 角屋睦 등, 1982)이 있는데, 이것은 傾斜地表面(이하 斜面이라고 함)이나 수로에서의 흐름을 kinematic wave 방정식으로 근사하여 추적하는 것으로 비교적 급경사의 유역에 사용되어 왔다.

Muskingum-Cunge 법(이하 M-C 법이라고 함)은 Muskingum법을 대체하는 수리학적 모형으로서, 기존의 수문자료에 의하여 추정하는 매개변수 K , X 를 흐름이나 사면의 특성으로 부터 결정하는 것이다(Cunge, 1969). 이 방법은 kinematic wave식의 차분근사에서 발생하는 數值擴散能(numerical diffusivity)을 diffusion wave 방정식에서 유도되는 水理擴散能(hydraulic diffusivity)과 조화시킴으로써 형성된다. 따라서 kinematic wave 법을 적용하기 어려운 비교적 완경사의 사면이나 수로에서의 diffusion wave적인 흐름을 해석할 수 있는 장점을 가지고 있다. 최근 선형 M-C 법은 河道追跡(이상호와 이길성, 1994; 전무갑과 지홍기, 1996)뿐만 아니라 流域追跡에의 적용(Ponce, 1986; 김진수, 1995)도 시도되고 있는데, 격자간격(Δx , Δt) 등과 같은 수치적 인자의 변화에 따른 거동은 아직 잘 파악되고 있지 않다.

이에 본 연구에서는 횡유입이 없는 단위폭사면에서의 흐름을 대상으로 선형 M-C 법의 수치적 인자의 변화가 하류단에서의 유출특성에 미치는 영향을 검토하고, 중심차분의 선형 kinematic wave 법에 의한 결과와의 비교를 통하여 M-C 법의 특성을 명확히 하고자 한다.

2. kinematic wave 방정식

횡유입이 없는 斜面流는 다음과 같은 kinematic wave식의 연속방정식과 운동방정식으로 표현된다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$h = kq^p \quad (2)$$

여기서 t 는 시간, x 는 거리, h 는 사면류의 수심, q 는 사면에서의 단위폭당 유량이며, k , p 는 사면류 정수를 나타낸다. 특히 사면류가 지표류와 같이 Manning법칙에 따르는 흐름으로 가정하는 경우, k , p 는

$$k = \left(\frac{N}{s_0}\right)^p, \quad p = \frac{3}{5} \quad (3)$$

으로 된다. 여기서 N 은 等價粗度係數로서 사면의 流下抵抗을 표현하는 값이며, s_0 는 사면경사를 나타낸다.

3. Muskingum-Cunge 법의 이론

3.1 추적방정식

식 (1)과 같은 kinematic wave 방정식(移送方

程式이라고 함)은 다음과 같은 식 (4)로 정리될 수 있다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$c = \frac{dq}{dh} = \frac{1}{k p q^{p-1}} \quad (5)$$

여기서 c 는 kinematic wave의 전파속도 또는 이송속도(convection velocity)라 한다. 식 (4)에 대하여 그림 1에서와 같이 시간미분에 대하여 가중치(X)를 두어 차분하고, 거리미분에 대하여는 중심차분을 행하는 차분구조를 택하면

$$\frac{X(q_j^{n+1} - q_j^n) + (1-X)(q_{j+1}^{n+1} - q_{j+1}^n)}{\Delta t} + c \frac{(q_{j+1}^n - q_j^n) + (q_{j+1}^{n+1} - q_j^{n+1})}{2\Delta x} = 0 \quad (6)$$

로 된다. 이 것을 미지유량 q_{j+1}^{n+1} 에 대하여 정리하면 식 (7)와 같은 대수식 형태의 추적방정식을 얻을 수 있다.

$$q_{j+1}^{n+1} = C_0 q_j^{n+1} + C_1 q_j^n + C_2 q_{j+1}^n \quad (7)$$

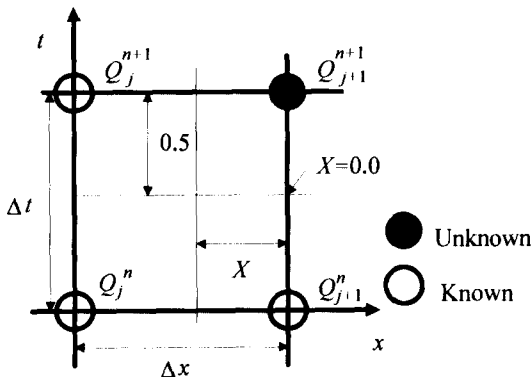


그림 1. Muskingum-Cunge법의 차분구조

$$C_0 = \frac{c(\Delta t/\Delta x) - 2X}{2(1-X) + c(\Delta t/\Delta x)} \quad (8a)$$

$$C_1 = \frac{c(\Delta t/\Delta x) + 2X}{2(1-X) + c(\Delta t/\Delta x)} \quad (8b)$$

$$C_2 = \frac{2(1-X) - c(\Delta t/\Delta x)}{2(1-X) + c(\Delta t/\Delta x)} \quad (8c)$$

여기서 C_0, C_1, C_2 는 추적계수이다.

3.2 차분식에 대한 변형방정식과 그 특성

식 (6)과 같은 차분식의 각 항을 Taylor급수로 전개하여 정리하면 다음과 같은 變形方程式(modified equation)을 얻을 수 있다(Ponce 등, 1979).

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \dots = 0 \quad (9)$$

$$\alpha = c\Delta x \left(\frac{1}{2} - X\right) \quad (10)$$

$$\beta = c\Delta x^2(1-C) \left[\frac{1}{2}(X + \frac{1}{2}C) - \frac{1}{3}(1+C) \right] \quad (11)$$

여기서 α 는 수치확산계수, β 는 수치분산계수를 나타낸다. 이런 변형방정식은 차분식을 만족하는 미분방정식으로서 절단오차(truncation error)의 모든 효과를 포함하고 있다.

식 (9)와 같은 미분방정식의 해석하는 다음과 같이 복소수 Fourier급수로 표현될 수가 있다(Lapidus와 Pinder, 1982)

$$q(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{i(kx + \omega t)} \quad (12)$$

여기서 T_n 는 진폭, k 는 波數(즉 공간적인 진동수), ω 는 시간적 진동수를 나타내는데, 파수는 $k = 2\pi/\lambda$ (λ 는 파장)로 표현된다. 해의 거동에 대한 해석을 하려고 할 때는 선형방정식에서의 중첩원리에 의하여 다음과 같이 Fourier 급수의 한 성분만을 고려해도 충분하다.

$$q = T_n e^{i(kx + \omega t)} \quad (13)$$

C=1인 경우는 식 (11)에서 $\beta=0$ 이 되고 식 (9)는 다음과 같은 선형의 이송-확산방정식(convection-diffusion equation)이 되는데, 이것은 선형 Burgers 방정식이라고도 한다(Hoffmann, 1992).

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} - a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

식 (13)을 식 (14)에 대입하면

$$\omega = -ck + ak^2i \quad (15)$$

을 얻는다. 이런 관계식을 식 (13)에 대입하면

$$q = T_n e^{-ak^2t} e^{ik(x-ct)} \quad (16)$$

이 된다. 따라서 Fourier 급수의 각 성분은 시간의 경과와 함께 $\exp(-ak^2t)$ 비율로 감쇠하는데, 파수 k가 클수록(즉 짧은 파장 일수록) 더욱 빨리 감쇠한다. 한편, 전파속도는 파수(또는 파장)의 영향을 받지 않고 일정한 속도로 이동한다.

X=1/2 인 경우는 식 (10)에서 $\alpha=0$ 이 되고, 식 (9)는 다음과 같은 선형의 이송-분산방정식(convection-dispersion equation)이 되는데, 이것은 선형 Korteweg de Vries식이라고도 한다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} = 0 \quad (17)$$

식 (13)과 같은 Fourier 성분을 식 (17)에 대입하면

$$\omega = -ck + \beta k^3 \quad (18)$$

을 얻는다. 이런 관계식을 식 (13)에 대입하면

$$q = T_n e^{ik[x - (c - \beta k^2)t]} \quad (19)$$

이 된다. 따라서 Fourier 급수의 각 성분의 진폭은 파수의 영향을 받지 않으나 전파속도는 $c - \beta k^2$ 로 파수의 영향을 받는다. β 값이 양이면 각 파수의 파는 이송속도 c보다 느리게 이동하고, β 값이 음이면 c보다 빠르게 이동한다.

C=1와 X=1/2인 경우에는 $\alpha=0, \beta=0$ 이 되고 식 (9)는 다음과 같은 이송방정식이 된다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

식 (13)과 같은 Fourier 성분을 식 (20)에 대입하면

$$\omega = -ck \quad (21)$$

을 얻는다. 이런 관계식을 식 (13)에 대입하면

$$q = T_n e^{ik(x-ct)} \quad (22)$$

이 된다. 따라서 각 성분의 파들은 파수에 관계없

표 1. 차분식 (6)에 대한 변형방정식과 그 특성

매개변수 조건	변형방정식의 형태	정확도	일반 특성
C ≠ 1 X ≠ 1/2	$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} = 0$	1	$\alpha > 0$: 수치확산과 수치분산이 발생
C = 1	$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$ (이송-확산방정식)	1	$\alpha > 0$: 수치적안정, 수치확산의 영향으로 진폭이 감쇠 $\alpha < 0$: 수치적불안정, 수치계산의 파괴
X = 1/2	$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} - \beta \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} = 0$ (이송-분산 방정식)	2	$\beta > 0$: 각 파수의 전파속도가 이송속도 c보다 느림 $\beta < 0$: 각 파수의 전파속도가 이송속도 c보다 빠름
C = 1 X = 1/2	$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ (이송방정식)	3	파수와 관계없이 모든 파수의 전파속도가 이송속도 c로 일정

이 파형의 변화없이 일정한 이송속도 c 로 이동하게 된다.

각 매개변수의 조건에 따른 이송방정식에 관한 차분식 (6)에 대한 변형방정식은 표 1과 같이 요약될 수 있다.

3.3 M-C 법의 유도

M-C 법에서는 $X < 0.5$ 에서 $\alpha > 0$ 이 되어 수치확산이 나타나므로, 가능한한 식 (14)와 같은 이송-확산 방정식을 만들고 여기서의 수치확산을 이용하여 실제의 홍수파에서 나타나는 물리적인 확산을 재현하고자 한다.

diffusion wave 식은 다음과 같이 표현된다.

$$q = \frac{1}{N} h^{5/3} (s_0 - \frac{dh}{dx})^{1/2} \quad (23)$$

식 (23)과 식 (4)를 단위폭당기준유량 q_0 을 중심으로 선형화시켜 정리하면 식 (24)가 얻어진다 (Ponce, 1989).

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\frac{dq}{dh}) \frac{\partial q}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (24)$$

$$\nu = \frac{q_0}{2s_0} \quad (25)$$

여기서 ν 는 수치확산계수로서 흐름과 수로의 특성으로 표현된다.

식 (10)의 수치확산계수 α 와 식 (25)의 수치확산계수 ν 를 같다고 놓으면

$$X = \frac{1}{2} (1 - \frac{q_0}{s_0 c \Delta x}) \quad (26)$$

를 얻을 수 있다. 따라서 매개변수 X 는 다음과 같은 수치적성질 또는 물리적성질의 함수로 표현된다: ① 거리격자간격 Δx , ② 단위폭당 기준유량 q_0 , ③ kinematic wave의 전파속도 c , ④ 바닥경사 s_0 .

Ponce와 Yevjevich(1978)은 추적방정식의 추

적계수를 Courant 상수 C 와 cell Reynolds 수 D 로 표현하였다. Courant 상수 C 는 격자망의 이동속도 $\Delta x / \Delta t$ 에 대한 kinematic wave의 전파속도 c 의 비로서 다음과 같이 표현된다.

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (27)$$

격자확산능(grid diffusivity)을 $X = 0$ 인 경우의 수치확산능으로 정의하면, 식 (10)은

$$\alpha = \frac{c \Delta x}{2} \quad (28)$$

이 된다. cell Reynolds 수 D 를 격자확산능 $c \Delta x / 2$ 에 대한 수치확산능 $q_0 / (2s_0)$ 의 비라고 정의하면 다음과 같이 표현된다.

$$D = \frac{q_0}{s_0 c \Delta x} \quad (29)$$

식 (26)을 D 를 이용하여 나타내면

$$X = \frac{1}{2} (1 - D) \quad (30)$$

로 된다. 식 (27)의 C 와 식 (30)의 X 를 추적방정식 (8)에 대입하면 다음과 같이 C 와 D 로 표현된 식을 얻을 수 있다.

$$C_0 = \frac{-1 + C + D}{1 + C + D}$$

$$C_1 = \frac{1 + C - D}{1 + C + D} \quad (31)$$

$$C_2 = \frac{1 - C + D}{1 + C + D}$$

3.4 선형 kinematic wave 법

$D=0$ 인 경우에는 식 (30)에서 $X=1/2$ 이 되어 식 (6)은 2차 정확도를 갖는 시간과 공간의 중심

차분을 갖는 선형 kinematic wave 차분식이 된다. 이 때, 추적계수는 식 (31)에 $D=0$ 을 대입한 값으로 다음과 같다.

$$C_0 = \frac{-1+C}{1+C}$$

$$C_1 = 1 \quad (32)$$

$$C_2 = \frac{1-C}{1+C}$$

특히 $C=1$ 인 경우, 추적계수는 $C_0=0$, $C_1=1$, $C_2=0$ 로 되어 $q_{y+1}^{n+1} = q_y^n$ 이 되는 데, 이것은 수리량 q 가 파형의 변화없이 이동하는 것을 의미한다. 이와 같이 중심차분의 kinematic wave 식은 $X=1/2$ 인 M-C 법의 특수한 한 경우에 해당한다.

4. 특성구간길이 L

식 (5)로 표현되는 kinematic wave의 전파속도 c 에 단위폭당기준유량 q_0 를 대입하면

$$c = \frac{5}{3} \frac{s_0^{3/10} q_0^{2/5}}{N^{3/5}} = f(N, s_0, q_0) \quad (33)$$

가 되어 Courant 수 C 는 다음과 같은 함수로 표현된다.

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} = f'(N, s_0, q_0, \Delta x, \Delta t) \quad (34)$$

한편, 함수 L 은

$$L = \frac{q_0}{s_0 c} \quad (35)$$

특성구간길이(characteristic reach length)라고 하며(Miller와 Cunge, 1975), 길이의 차원을 갖고 아래와 같이 표현된다.

$$L = \frac{5}{3} \frac{(q_0 N)^{3/5}}{s_0} = f(N, s_0, q_0) \quad (36)$$

이때 cell Reynolds 수 D 는 다음과 같은 함수로 표현된다.

$$D = \frac{L}{\Delta x} = g(N, s_0, q_0, \Delta x) \quad (37)$$

특성구간길이 L 은 cell Reynolds수 D 를 결정하는 인자로서 경사각이 작아지면 L 값은 증대되어, 같은 Δx 에 대하여 D 는 커지게 된다.

이와 같이 함수 c 와 L 은 등가조도계수 N , 사면 경사 s_0 및 단위폭당기준유량 q_0 과 같은 물리적 인자에 의하여 좌우되는데 반하여, 함수 C 와 D 는 이런 물리적 인자뿐만 아니라 격자간격과 같은 수치적 인자에 의하여도 결정되는 양이다. 물리적 인자의 변화가 c 와 L 에 미치는 영향은 표 2와 같이 정리될 수 있다. 또한 격자간격과 격자비($\Delta t/\Delta x$)의 변화는 C 와 D 의 값에 영향을 미치는 데, 이런 관계는 표 3과 같이 정리될 수 있다.

표 2. 물리적 인자의 값의 변화에 따른 c 와 L 의 변화

	c	L
N 증가	감 소	증 가
s_0 증가	증 가	감 소
q_0 증가	증 가	증 가

표 3. 격자간격과 격자비($\Delta t/\Delta x$)의 변화에 따른 C 와 D 의 변화

	Δx	Δt	$\Delta t/\Delta x$	C	D
경우 1	감 소	일 정	증 가	증 가	증 가
경우 2	일 정	증 가	증 가	증 가	일 정
경우 3	감 소	감 소	일 정	일 정	증 가

5. 사면에서의 수치계산

대상사면은 단위폭사면(1x1000m)으로서 등가조도계수를 0.4(밭의 등가조도계수에 해당)로 하고 경사각을 0.1, 0.02, 0.003로 한다(표 4 참조).