

난류전단 흐름에서의 비정상 수평 선오염원의 확산에 관한 수치해법

A Numerical Method for Dispersion of Unsteady Horizontal Line Source in Turbulent Shear Flow

田 庚 秀*
Jun, Kyung Soo

Abstract

A numerical model for unsteady dispersion of horizontal line source in turbulent shear flow is developed. A fractional step finite difference method is used which splits the unsteady two-dimensional advective diffusion equation into the longitudinal advection and the vertical diffusion equations, and solves them alternately for half time intervals by the Holly-Preissmann scheme and the Crank-Nicholson scheme, respectively. The developed numerical model is verified using a semi-analytic solution for steady dispersion in turbulent shear flow. Dispersion of an instantaneous plane source in turbulent shear flow is analyzed using the model. The degree of mixing at the same dimensionless time is almost the same regardless of the friction factor, and the travel distance required to reach a certain degree of mixing is inversely proportional to the square root of the friction factor.

요 지

난류전단 흐름에서의 비정상 수평 선오염원의 확산에 관한 수치모형을 개발하였다. 계산기법으로는 비정상 이송확산 방정식을 종방향 이송 및 연직방향 확산으로 분리하고, 이들 방정식을 반시간 간격에 대하여 번갈아 계산하는 단계분리 유한차분기법을 사용하였다. 종방향 이송방정식에 대해서는 Holly-Preissmann 기법을, 연직방향 확산방정식에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 적용하였다. 개발된 모형을 난류전단 흐름에서의 정상 수평 선오염원의 확산 문제에 적용하여 계산결과를 반해석해와 비교함으로써 모형을 검증하였다. 또한 난류전단 흐름내로 순간적으로 방류된 면오염원의 확산문제에 계산모형을 적용하였다. 마찰계수에 대한 민감도 분석 결과, 동일한 무차원 시각에서의 혼합 정도는 마찰계수에 관계없이 거의 일정한 것으로 나타났다. 또한 동일한 정도의 혼합상태에 도달하는 데 소요되는 유하거리는 마찰계수의 제곱근에 반비례함을 알 수 있었다.

* 성균관대학교 공과대학 토목공학과 조교수

1. 서 론

하천으로 방류된 오염원은 가장 먼저 연직방향으로 혼합되고, 이어서 횡방향으로 혼합이 진행된다. 이러한 과정을 거쳐 오염원이 흐름단면에 대하여 완전혼합된 이후에는 흐름의 전단효과(shear effect)에 의한 종확산(longitudinal dispersion)이 오염원의 거동에 관한 지배적인 현상이 된다. 따라서 하천수계 전 구간을 대상으로 하는 거시적인 확산모형 또는 수질모형에 있어서는 난류 이송확산 방정식의 단면평균으로부터 얻어지는 1차원 종확산 방정식에 의한 해석이 널리 행하여지고 있다. 이러한 종확산 방정식의 적용은 오염원이 유입 즉시 흐름단면에 대하여 완전혼합됨을 전제로 하고 있다. 따라서 오염원 유입지점으로부터 실제로 완전혼합에 이르는 지점까지의 유하거리에 비하여 충분히 먼 거리에 위치한 하류지점에서의 오염원 농도가 관심의 대상인 경우에는 종확산 방정식에 의한 해석이 적합하다 할 수 있다. 그러나 완전혼합 소요거리와 같은 크기정도(order of magnitude)의 거리에 수질 관심지점이 위치한 경우에는 종확산 방정식에 의한 수질계산이 적합하다 할 수 없다. 오염원이 흐름단면에 대하여 완전혼합되어 1차원 종확산 방정식에 의하여 해석 가능한 상태에 이르기 전의 초기과정은 이송확산 방정식에 의한 해석을 필요로 한다. 또한 하천내로 유입된 오염원이 얼마나 신속히 흐름단면 전체로 확산, 회석될 것인가도 매우 중요한 공학적 문제로서 역시 2차원내지는 3차원 이송확산 방정식에 의한 해석을 요한다.

하천 난류전단 흐름에서의 오염원 이송확산 방정식의 가장 일반적인 형태는 종방향 이송항과 횡방향 및 연직방향 난류확산항을 포함하는 3차원 방정식이다. 연직방향에 대한 완전혼합을 가정하면 종방향 이송항과 횡방향 난류확산항만을 갖는 x - y 2차원 방정식을, 광폭수로 및 횡방향으로 균일한 선오염원의 경우를 가정하면 종방향 이송항과 연직방향 난류확산항만이 포함된 x - z 2차원 방정식을 각각 적용할 수 있다. 난류전단 흐름에서의 정상 오염원 확산에 관해서는 半解析的(semi-analytic)

방법 또는 수치모형에 의한 여러 연구가 진행되어 왔다. 이중 정상 선오염원 확산문제, 즉 시간미분항을 포함하지 않은 x - z 2차원 방정식에 대한 연구가 가장 활발하여 McNulty와 Wood(1984)는 Aris의 모멘트법에 의한, Nokes 등(1984)과 Smith(1985)는 고유함수(eigenfunction) 전개에 의한 半解析的 접근을 각각 시도하였다. Jun과 Lee(1994)는 수치모형을 사용하여 마찰계수에 대한 확산과정의 민감도 분석으로부터 연직방향 확산 속도가 대략 마찰계수의 제곱근에 비례함을 보였으며, 가장 신속한 수심방향 확산을 위한 최적 방류 위치를 제시한 바 있다. 정상 x - y 2차원 방정식에 관한 연구로는 Smith(1982)가 있는데, 그 접근방법은 x - z 2차원 방정식에 대한 Nokes 등(1984)의 방법과 유사하다. 최근에는 정상 3차원 방정식에 대한 半解析的 방법을 이용한 연구도 시도되고 있는데 Nokes와 Wood(1988)는 광폭수로를 가정하여, Nokes와 Hughes(1994)는 유한한 폭을 갖는 수로에서의 난류확산 문제를 x - z 2차원 방정식에 대한 Nokes 등(1984)의 방법을 확장시켜 적용하였다. 그러나 폭이 유한한 수로의 경우에는 유속 및 난류확산계수의 횡방향 분포가 단면형상에 따라 다를 뿐만 아니라, 단순한 단면형상에 대해서도 난류확산계수의 횡방향 분포 문제는 현재에도 연구가 진행중이고 계속 연구되어야 할 분야이다. 따라서 x - y 2차원 또는 3차원 문제의 경우에는 난류확산계수의 횡방향 분포에 관한 연구가 방정식에 관한 해석 이전의 문제로 남아있다.

이와 같이 난류전단 흐름에서의 정상 오염원 확산에 대해서는 半解析的 또는 수치적 방법에 의한 여러 연구가 수행되어 온 반면, 비정상 오염원 확산에 관한 연구는 국내 외적으로 찾아볼 수 없다. 정상 오염원에 대한 확산해석은 매시각 일정률로 연속적으로 방류되는 오염원의 경우에만 적용할 수 있는 반면, 일반적인 오염원의 형태는 유한시간에 걸쳐 방류되며 또한 방류량의 크기가 시간에 따라 일정하지 않은 비정상 오염원이다. 따라서, 비정상 오염원에 대한 확산해석은 공학적으로도 매우 중요한 문제인 반면, 정상 오염원의 경우에 비하여 매우 어렵다. 비정상 오염원 확산에 관한 이송확산 방정식은 시간미분항을 포함하게 되어 정상 오염원

의 경우에 대한 방정식과는 그 특성이 완전히 다르다. 종방향에 대해서는 쌍곡선형(hyperbolic) 방정식이 되는 반면, 횡방향 및 연직방향에 대해서는 포물선형(parabolic) 편미분 방정식의 성질을 갖는다. 그러나 이들 두가지 형태의 방정식이 갖는 물리적, 수학적 성질 및 그에 따른 적합한 수치해법 또한 전혀 다르므로, 이와같이 포물선성과 쌍곡선성이 동시에 내재되어 있는 비정상 이송확산 방정식의 경우에는 해석적인 방법은 물론, 수치해석적 접근 또한 용이하지 않다. 수치해석적 접근에 있어서 특히 문제가 되는 것은 쌍곡선형 방정식으로서 단순한 수치기법을 적용할 경우 방정식에 내재된 쌍곡선성 즉 정보전달의 방향성을 적절히 반영하지 못하여 실제의 물리적 현상과는 거리가 먼 수치진동(numerical oscillation)이나 수치분산(numerical diffusion) 현상을 수반하게 된다. 이러한 현상들을 피하기 위한 수치기법들에 관한 연구가 역시 쌍곡선성이 내재된 1차원 종확산 방정식을 대상으로 하여 국내 외적으로 수행되어 왔으며(전경수와 이길성, 1993, 1994; Holly와 Usseglio-Polatera, 1984; Toda와 Holly, 1987), 그 결과 이러한 오차들을 거의 제거할 수 있는 수치기법들이 개발되어 실용화될 정도로 상당한 진척을 이루었다(Environmental Laboratory, 1990). 비정상 이송확산 방정식은 쌍곡선성이 내재되어 있다는 점에서 1차원 종확산 방정식과 공통점을 갖지만, 2차원내지는 3차원 문제라는 점에서 복잡성이 더해진다.

정상 오염원의 경우와 마찬가지로 비정상 오염원의 확산문제에 있어서도, x-z 2차원, x-y 2차원 또는 3차원 문제를 생각할 수 있다. 본 연구에서는 이중 x-z 2차원 문제, 즉 난류전단 흐름에서의 비정상 선오염원의 확산에 관한 수치모형을 개발하고자 한다. 앞서서도 언급하였듯이 비정상 오염원 확산해석 문제는 종방향 이송항과 횡방향 또는 연직방향 확산항을 동시에 포함하는, 즉 쌍곡선성과 포물선성이 함께 존재하는 편미분 방정식의 해석 문제로 귀결된다. 따라서 이러한 두가지 특성을 적절히 처리할 수 있도록 개발된 x-z 2차원 확산모형은 x-y 2차원 또는 3차원 모형으로 쉽게 변환 또는 확장될 수 있다. 현 시점에서는 난류확산계수의

횡방향 분포에 관해서는 계속적인 연구가 필요하고 또한 진행중인 반면, 연직방향 분포는 이미 잘 알려져 있으므로 x-y 2차원 또는 3차원 문제에 앞서 x-z 2차원 비정상 확산문제에 대한 수치모형의 개발이 시의적절한 연구과제라 하겠다.

2. 수학적 모형

2.1 지배방정식 및 초기, 경계조건

쪽방향으로 균일한 1차원 난류전단 흐름에서의 비정상 선오염원 확산에 관한 이송확산 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

여기서 $C(x,z,t)$ 는 농도, $u(z)$ 는 유속, $\epsilon_z(z)$ 는 연직방향 난류확산계수이며, x 와 z 는 각각 흐름방향 및 연직방향 공간좌표를, t 는 시간좌표를 나타낸다. 흐름방향 난류확산항은 이송항에 비하여 매우 작으므로(Fischer 등, 1979) 식 (1)에서 무시되었다. 난류전단 흐름에 대한 유속분포는 다음과 같은 대수유속분포로서 나타낼 수 있다.

$$u(z) = U + \frac{u_*}{\kappa} \left[1 + \ln \left(\frac{z}{d} \right) \right] \quad (2)$$

여기서 κ 는 von Karman 상수, d 는 수심, U 는 연직방향 평균유속이며 u_* 는 마찰속도이다. 난류확산계수의 연직분포는 대수유속분포와 Reynolds 상수로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\epsilon(z) = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{d} \right) \quad (3)$$

바닥 및 수면에서의 경계조건은 no-flux 경계조건으로서 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial C}{\partial z}(x, 0, t) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial z}(x, d, t) = 0 \quad (5)$$

흐름방향의 상류단 경계조건은 일정농도 또는 영의 농도경사로서 주어질 수 있으며, 또한 초기조건으로서 x-z 평면상의 전 영역에서의 초기농도가 주어져야 한다.

2.2 수학적 모형의 무차원화

지배방정식 (1)을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$z' = \frac{z}{d} \quad (6)$$

$$x' = \frac{x}{d} \quad (7)$$

$$t' = \frac{t}{d/u} \quad (8)$$

$$u' = \frac{u}{u} \quad (9)$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{u \cdot d} \quad (10)$$

$$C' = \frac{C}{C_{ref}} \quad (11)$$

여기서 C_{ref} 는 문제에 따라 정의될 수 있는 어떤 기준 농도값이다. 이상에 정의된 무차원 변수들을 사용하여 식 (1)을 다시 쓰면

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} + u' \frac{\partial C'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z'} (\varepsilon' \frac{\partial C'}{\partial z'}) \quad (12)$$

식 (2) 및 (3)으로부터 무차원화된 유속 및 난류 확산계수 분포식은 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u' = \sqrt{\frac{8}{f}} + \frac{1}{\chi} (1 + \ln z') \quad (13)$$

$$\varepsilon' = \kappa z' (1 - z') \quad (14)$$

여기서 f 는 다음과 같이 정의되는 마찰계수이다.

$$f = 8 \left(\frac{u_*'}{U} \right)^2 \quad (15)$$

연직방향 경계조건식 (4) 및 (5)는 각각 다음과 같이 무차원화된다.

$$\frac{\partial C'}{\partial z'}(x', 0, t') = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial z'}(x', d, t') = 0 \quad (17)$$

흐름방향에 대한 경계조건 및 초기조건 또한 위에서 정의한 무차원 변수들에 의하여 무차원화할 수 있다.

3. 계산모형

지배방정식 (12)는 (이하에서는 편의상 무차원 변수를 나타내는 기호 '은 생략하기로 한다.) z 방향에 대해서는 포물선형의, x 방향에 대해서는 쌍곡선형의 편미분방정식이 된다. 이들 두가지 형태의 방정식은 각각이 갖는 물리적, 수학적 성질이 다르므로 그에 따른 적합한 수치해법 또한 상이하다. 특히 쌍곡선형 방정식은 그 수치해법으로서 일반적인 Eulerian 기법들을 사용할 경우, 수치 분산이나 수치진동 현상을 수반하게 되므로(Noye, 1987) 정확성 있는 수치기법의 적용이 요구된다. 이러한 점을 감안하여 본 연구에서는 지배방정식을 종방향 이송 및 연직방향 확산에 관한 방정식인 다음식 (18a)와 (18b)로 각각 분리하고, 이들 각각을 반시간간격에 대하여 번갈아 계산하는 단계분리 유한차분기법을 사용한다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + 2u \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad n\Delta t \leq t \leq (n + \frac{1}{2})\Delta t \quad (18a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (2\varepsilon_z \frac{\partial C}{\partial z}), \quad (n + \frac{1}{2})\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \quad (18b)$$

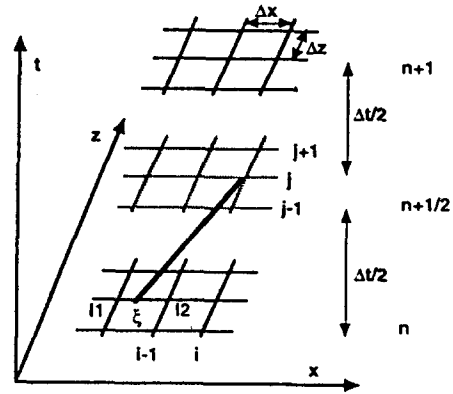
Fig. 1(a)는 이러한 계산과정을 나타내는 모식도이다. 시간준위 n 에서의 기지 농도값들로부터 시간준위 $(n+1)$ 에서의 농도값들을 계산하는데 있어서, 처음 반시간간격에 대해서는 x 방향 이송만이 일어나는 것으로 가정하고 식 (18a)를 풀어 $\Delta t/2$ 시간 후의, 즉 시간준위 $(n+1/2)$ 에서의 농도값을 계산한다. 이를 기지값으로 하고 다음 반시간간격에 대해서는 z 방향 확산만이 일어나는 것으로 하여 식 (18b)로부터 계산된 결과가 시간준위 $(n+1)$ 에서의 농도값이 된다. 단, 이들 과정에서 종방향 이송 및 연직방향 확산의 강도를 각각 실제의 두배로 함으로써, 결국 전체 시간간격에 대해서는 실제와 같은 이송 및 확산이 일어나도록 하는 결과가 된다. 수학적으로는 식 (18a)와 (18b)의 합이 결국 지배방정식 (12)와 일치하게 됨을 알 수 있다.

본 연구에서는 종방향 이송방정식 (18a)에 대해서는 특성곡선을 고려한, 즉 정보전달의 방향성이라는 쌍곡선형 편미분방정식의 특성을 고려한 Eulerian-Lagrangian 방법의 일종인 Holly-Preissmann 기법(Holly와 Preissmann, 1977; 전경수와 이길성, 1994)을 사용하며, 연직방향 확산방정식 (18b)에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 사용한다. 각 방법에 대한 설명은 다음과 같다.

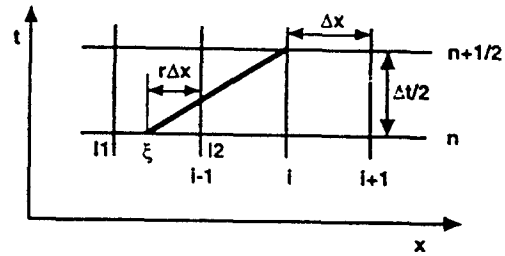
3.1 종방향 이송방정식에 대한 수치기법

종방향 이송방정식 (18a)는 특성곡선($dx/dt = u$)을 따라서 농도가 일정하다는 의미를 갖는다. 따라서 시간준위 $(n+1/2)$ 에서 공간좌표 $x = i\Delta x$, $z = j\Delta z$ 인 점에서의 농도값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{i,j}^{n+1/2} = C_{\xi,j}^n \quad (i=0, 1, \dots, I; j=0, 1, \dots, J) \quad (19)$$



(a) Overall Picture of the Fractional Step Method



(b) Advection Computation

Fig. 1. Schematic Representation of the Numerical Model

여기서 I 는 계산영역의 종방향 하류단을 나타내는 격자번호이고 $J=1/\Delta z$ 이다. (ξ, j, n) 은 격자점 $(i, j, n+1/2)$ 을 지나는 특성곡선의 시간준위 n 에서의 위치로서 다음식과 같이 나타낼 수 있다(Fig. 1(b) 참조).

$$\xi = i - \frac{u_i \Delta t}{\Delta x} \quad (20)$$

여기서 u_i 는 연직좌표 $z = j\Delta z$ 에서의 유속이다. 일반적으로 (ξ, j, n) 은 격자점상에 위치하지 않기 때문에 $C_{\xi,j}^n$ 의 값은 (ξ, j, n) 에서 가장 가까운 위치에 있는 두 격자점, $(I1, j, n)$ 및 $(I2, j, n)$ 에서의 값들로부터 보간하여 구하게 되는데(Fig. 1(b) 참조),

이를 위한 보간함수로서 본 연구에서는 다음식 (21)과 같은 3차의 다항식을 사용한다.

$$C_{1,j}^{n+1/2} = C_{\xi,j}^n(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 \quad (21)$$

$$r = 12 - \xi \quad (22)$$

여기서 r은 Courant 수($u\Delta t/\Delta x$)가 1 이하인 경우에는 Courant 수와 같으며, 1 이상인 경우에는 Courant 수에서 정수부분을 제외한 0과 1 사이의 값이 된다. 보간다항식 (21)의 계수값들은 격자점, (11,j,n) 및 (12,j,n)에서의 농도 및 농도의 공간 1계 미분값(Cx)들로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha_0 = C_{12,j}^n \quad (23a)$$

$$\alpha_1 = -\Delta x Cx_{12,j}^n \quad (23b)$$

$$\alpha_2 = 3(C_{11,j}^n - C_{12,j}^n) - \Delta x (Cx_{11,j}^n - 2Cx_{12,j}^n) \quad (23c)$$

$$\alpha_3 = 2(C_{12,j}^n - C_{11,j}^n) - \Delta x (Cx_{11,j}^n + Cx_{12,j}^n) \quad (23d)$$

결국 식 (21)의 적용을 위해서는 각 격자점에서 C값뿐만 아니라 Cx값이 주어져야 하는데, 이는 식 (18a)를 x에 대하여 미분함으로써 얻어지는 Cx에 관한 이송방정식을 풀어서 구하게 된다. 종방향 유속 u는 z만의 함수이므로 Cx에 관한 이송방정식은 C에 관한 방정식 (18a)와 같은 형태를 갖는다. 따라서 시간준위 (n+1/2)에서의 Cx값은 C값에 대한 식 (19)와 마찬가지로 다음식 (24)로 나타낼 수 있다.

$$Cx_{1,j}^{n+1/2} = Cx_{\xi,j}^n \quad (i=0, 1, \dots, I; j=0, 1, \dots, J) \quad (24)$$

여기서 $Cx_{\xi,j}^n$ 의 값은 다음식 (25)를 이용하여

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial r} \quad (25)$$

식 (21)로부터 구하면 다음과 같다.

$$Cx_{1,j}^{n+1/2} = Cx_{\xi,j}^n(r) = -\frac{1}{\Delta x} (\alpha_1 + 2\alpha_2 r + 3\alpha_3 r^2) \quad (26)$$

따라서 C 및 Cx에 대한 上流端 경계조건이 주어지면, 이로부터 매 시간준위마다 반시간간격에 대하여 식 (21) 및 (26)에 의하여 C 및 Cx를 각각 계산하게 된다.

상술한 종방향 이송방정식에 관한 수치기법은 이전 시간준위에서의 특성곡선 통과점 양측의 격자점에서의 값을 사용하여 C 및 Cx를 근사하므로 무조건 안정하다(Holly와 Usseglio-Polatera, 1984; Toda와 Holly, 1987; 서일원과 김대근, 1994).

3.2 연직방향 확산방정식에 대한 수치기법

연직방향 확산방정식 (18b)에 대한 수치기법으로는 포물선형 방정식에 대한 수치기법으로서 널리 사용되고 있는 Crank-Nicholson 기법을 사용하며 그에 따른 차분식은 다음과 같다.

$$\frac{C_{1,j}^{n+1} - C_{1,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{2(\Delta z)^2} [\epsilon_{i+1/2} (C_{1,j+1}^{n+1} - C_{1,j}^{n+1}) - \epsilon_{i-1/2} (C_{1,j}^{n+1} - C_{1,j-1}^{n+1}) + \epsilon_{j+1/2} (C_{1,j+1}^{n+1/2} - C_{1,j}^{n+1/2}) - \epsilon_{j-1/2} (C_{1,j}^{n+1/2} - C_{1,j-1}^{n+1/2})] \quad (j=1, \dots, J-1; i=1, \dots, I) \quad (27)$$

바닥 및 수면에서의 경계조건은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$C_{1,0}^{n+1} = C_{1,1}^{n+1} \quad (i=1, \dots, I) \quad (28)$$

$$C_{1,j-1}^{n+1} = C_{1,j}^{n+1} \quad (i=1, \dots, I) \quad (29)$$

상기식들에서 시간준위 $(n+1/2)$ 에서의 값들은 종방향 이송방정식에 대한 계산결과로서 주어지는 기지값이므로, 각 종방향 위치 i 에 대하여 식 (27), (28) 및 (29)는 $(J+1)$ 개의 방정식으로 구성된, 시간준위 $(n+1)$ 에서의 농도값을 미지수로 하는 선형 시스템을 이룬다. 또한 이 선형 시스템에 대한 계수행렬은 삼중대각행렬을 이루어 Thomas 알고리즘(Carnahan 등, 1969)을 이용하여 해를 구할 수 있다.

종방향 이송방정식에 대한 수치기법이 각 격자점에서의 C_x 값들을 필요로 하므로, C 뿐만 아니라 C_x 에 관한 연직방향 확산이 또한 계산되어야 한다. C_x 에 관한 확산방정식 및 경계조건은 식 (27), (28) 및 (29)를 x 에 대하여 미분함으로써 얻어지는데 이들은 상기식들에서 C 를 C_x 로 대치한 똑같은 형태가 된다. 따라서 C_x 에 대한 계산과 정도 C 에 대한 경우와 동일하다.

C 및 C_x 에 관한 연직방향 확산방정식의 수치모형으로 사용될 Crank-Nicholson 기법은 무조건 안정하고(Abbott 등, 1989) 앞절에서 언급한 바와 같이 종방향 이송방정식에 대한 수치기법으로서 사용될 Holly-Preissmann 기법 또한 무조건 안정하므로, 이상에서 기술된 단계분리 유한차분 기법은 무조건 안정성을 갖는다.

4. 모형의 검증 및 적용

Nokes 등(1984)은 대수 유속분포와 포물선형 난류확산계수 분포를 갖는 난류전단 흐름에서의 정상 오염원 확산에 관한 지배방정식에 변수분리법을 적용하여 변환된 Sturm-Liouville 고유치 문제(eigenvalue problem)에 대하여 멱급수 형태의 고유치와 고유함수를 산정함으로써 정상 오염원 확산에 관한 半解析的 해를 도출한 바 있다. 본 연구에서는 이를 이용하여 계산모형을 검증한 후, 비정상면오염원의 확산 문제에 모형을 적용하였다.

4.1 난류전단 흐름에서의 정상 오염원 확산에 관한 半解析解

난류전단 흐름에서의 정상 오염원 확산에 관한 무차원 지배방정식은 식 (12)에서 시간미분항을

생략한 형태로서 다음과 같은 포물선형 편미분 방정식이 된다.

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_r \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (30)$$

정상농도 $C(x,z)$ 를 다음과 같이 변수분리한 후

$$C(x,z) = G(x)H(z) \quad (31)$$

식 (30)에 대입하면 $G(x)$ 와 $H(z)$ 에 대한 상미분 방정식들이 각각 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{dG}{dx} + \lambda G = 0 \quad (32)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\epsilon_r \frac{dH}{dz} \right) + \lambda u H = 0 \quad (33)$$

여기서 λ 는 분리상수이다. 식 (33)은 바닥($z=0$) 및 수면($z=1$)에서의 no-flux 경계조건과 함께 Sturm-Liouville 고유치 문제를 이룬다. 따라서 $C(x,z)$ 는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$C(x,z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \exp(-\lambda_i x) H_i(z), \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \dots) \quad (34)$$

여기서 λ_i 와 H_i 는 각각 H 에 대한 고유치 문제의 i 번째 모드 고유치 및 고유함수이다. i 번째 모드에 대한 상수 a_i 는 다음의 초기조건과

$$C(0,z) = C_s(z) \quad (35)$$

직교조건(orthogonality condition)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_i = \frac{\int_0^1 C_s(z) u(z) H_i(z) dz}{\int_0^1 u(z) H_i^2(z) dz} \quad (i=0, 1, \dots) \quad (36)$$

연직방향 좌표 z 를 수면을 기준으로 한 하향좌표 $y(=1-z)$ 로 치환하고 식 (33)을 전개하면 다음과 같다.

$$y(1-y)\frac{d^2H}{dy^2} + (1-2y)\frac{dH}{dy} + \frac{8}{f}\lambda p[1+p(1+\ln(1-y))]H=0 \quad (37)$$

$$p = \frac{\sqrt{f/8}}{k} \quad (38)$$

y 값의 범위가 0과 1 사이에 있으므로 $\ln(1-y)$ 는 다음과 같이 무한급수로 전개되며

$$\ln(1-y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \quad (39)$$

따라서 고유함수 H 는 다음과 같은 멱급수로 전개할 수 있게 된다.

$$H(y) = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \quad (40)$$

즉, 식 (39)와 (40)을 (38)에 대입하여 계수값들 간의 관계식을 다음과 같이 얻는다.

$$b_1 = -\theta b_0 \quad (41)$$

$$b_2 = \frac{1}{4}[(2-\theta)b_1 + \phi b_0] \quad (42)$$

$$b_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} \left[(k^2 + k - \theta)b_k + \phi \left(\frac{b_0}{k} + \frac{b_1}{k-1} + \dots + b_{k-1} \right) \right] \quad (k=2, \dots) \quad (43)$$

여기서 b_0 는 임의의 상수이며, ϕ 와 θ 는 각각 다음과 같다.

$$\phi = \frac{8}{f}\lambda p^2 \quad (44)$$

$$\theta = \frac{8}{f}\lambda p(1-p) \quad (45)$$

또한 지배방정식과 no-flux 경계조건으로부터 다음과 같은 적분방정식을 얻을 수 있으며

$$\int_0^1 u(z)H(z)dz=0 \quad (46)$$

이로부터 고유치 λ 를 구한다. 결국 난류전단 흐름에서의 비정상 오염원 확산에 관한 해는 다음식으로서 나타낼 수 있다.

$$C(x,z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \exp(-\lambda_l x) \sum_{n=0}^{\infty} b_{ln}(1-z)^n \quad (47)$$

즉, 고유치 λ_l 값들은 식 (46)으로부터, 계수 b_{ln} 값들은 식 (41)-(43)으로부터, a_l 값들은 식 (36)으로부터 각각 구하게 된다.

식 (47)은 Nokes 등(1984)의 것과 그 형태에 다소 차이가 있는데, 이는 그들이 지배방정식의 무차원화에 사용한 변수들이 본 연구의 경우와 다르기 때문이다. 본 연구에서는 이분법을 사용하여 적분방정식 (46)의 해를 구하였으며, 다섯 번째 모드까지의 고유치 및 그에 따른 고유함수를 해에 포함하도록 하였다. 또한, 고유함수의 급수전개에 있어서는 Nokes 등(1984)이 고유함수 급수에 포함된 항의 수에 따른 고유치 계산결과의 민감도 조사 결과에 근거하여 취한 것과 같은 70개의 항이 사용되었으며, 계수 a_l 값들은 중분율 0.001로 하여 수치적분에 의하여 산정하였다.

4.2 모형의 검증

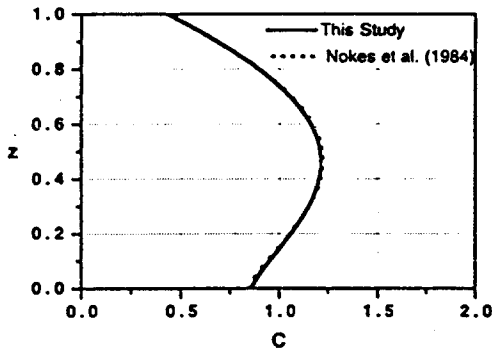
본 연구에서 개발된 계산모형을 검증하기 위하여 난류전단 흐름 조건하에서 중간수심 위치에 주어진 정상 수평 선오염원의 이송확산 문제에 대하여 우선 Nokes 등(1984)의 방법에 따라 해를 구하고, 계산모형의 적용결과를 이와 비교하였다.

계산모형의 적용을 위한 초기조건으로는 전 영역에 대하여 C 및 C_x 값이 영으로 주어지며, 종방향 상류단에서의 경계조건은 C_x 에 대해서는 영으로, C 에 대해서는 다음과 같이 주어진다.

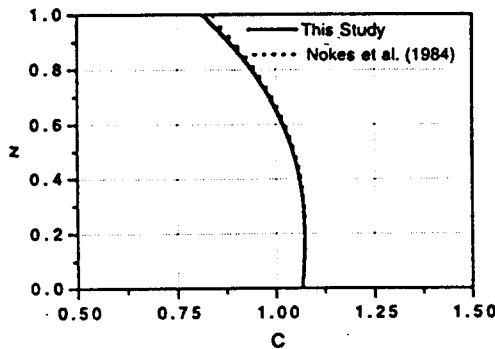
$$C_{0,j}^n = c_0 = \frac{\sqrt{8/f}}{u_* \Delta z} \quad (j=0.5) \quad \text{for all } n \quad (48a)$$

$$= 0 \quad (j=\text{elsewhere}) \quad \text{for all } n \quad (48b)$$

여기서 c_0 는 연직방향으로 완전히 혼합되었을 때의 농도값으로 정규화된 무차원 초기농도이다(Jun과 Lee, 1994). Fig. 2는 $f=0.04$, $\Delta t=0.01$, $\Delta z=0.01$, $\Delta x=1.0$ 으로 하여 수행된 계산결과와 Nokes 등(1984)의 해와의 비교 결과를 나타내는 것으로서, 서로 잘 일치함을 알 수 있다.



(a) $x=10$



(b) $x=20$

Fig. 2. Dispersion of a Steady Line Source in Turbulent Shear Flow

4.3 순간적으로 방류된 면오염원의 확산

개발된 계산모형을 사용하여 난류전단 흐름내로 순간적으로 방류된 면오염원(plane source)의 확산을 모의하였다. 방류되는 오염원의 강도(source strength), 즉 단위면적당 오염원의 질량을 m 이라 하면 C 에 대한 초기조건은 다음과 같다.

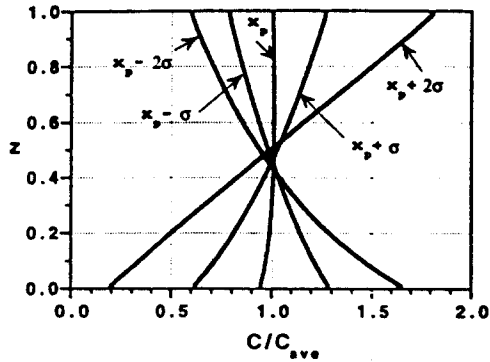
$$C_{0,j}^n = \frac{m}{\Delta x} \quad (i=0) \quad \text{for all } j \quad (49a)$$

$$= 0 \quad (i=\text{elsewhere}) \quad \text{for all } j \quad (49b)$$

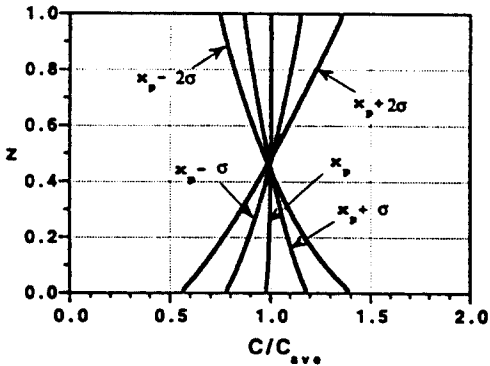
C_x 에 대한 초기조건으로는 z 영역에 대하여 영의 값을 부여하였다. 오염원의 방류위치($x = 0$)를 상류단 경계로 할 경우 C 및 C_x 에 대한 상류단 경계조건을 부여하기 곤란하므로, 상류단 경계지점을 $x = -5$ 로 취하여 C 및 C_x 의 값을 항상 영으로 하는 경계조건을 부여하였다.

Fig. 3은 $f = 0.04$ 의 경우 시각 $t = 20.0$ 및 100.0 에서 수심평균 농도값이 최대인 지점 x_p 와 $x_p + \sigma$, $x_p - \sigma$, $x_p + 2\sigma$ 및 $x_p - 2\sigma$ 등 5개 지점에서의 농도의 연직분포를 나타내고 있다. 여기서 는 수심평균 종방향 농도분포의 표준편차를 나타낸다. 각 지점에서의 농도값들은 모두 해당지점에서의 수심평균 농도값으로 무차원화된 값들이다. 우선 $t=20.0$ 및 $t=100.0$ 에서의 연직방향 농도분포를 비교해보면, 시간이 경과할수록 연직방향으로 더욱 잘 혼합됨을 알 수 있다. 또한 지점 x_p , 즉 종방향 분포형의 중심부에서는 연직방향으로 거의 균일하게 혼합된 상태를 보이고 있으나, x_p 에서 멀어질수록 연직방향 농도변화가 커짐을 알 수 있다.

무차원화된 지배방정식 (12)에서 알 수 있듯이 난류전단 흐름에서의 오염원 확산에 관련된 매개변수는 마찰계수뿐이다. 마찰계수에 대한 민감도를 살펴보기 위하여 $\Delta t=0.01$, $\Delta z=0.01$, $\Delta x=1.0$, $m=100$ 으로 하고, 여러 경우의 마찰계수값에 대한 모의계산을 수행하였다. Fig. 4(a)는 모형에 의한 계산결과를 수심 평균한 농도값의 종방향 분포를 예시하고 있다. 마찰계수 $f=0.01$ 의 경우에



(a) $t=20.0$



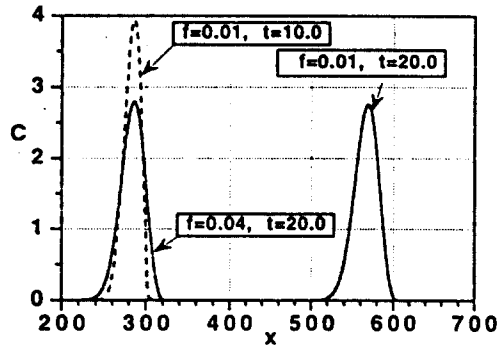
(b) $t=100.0$

Fig. 3. Vertical Concentration Distributions

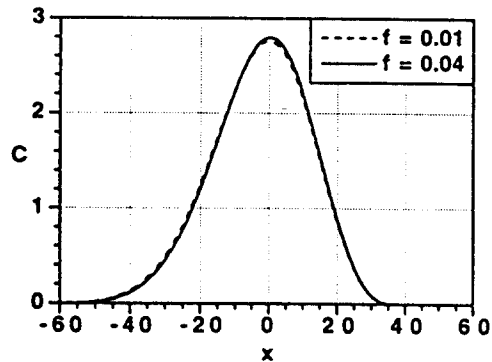
대한 시각 $t=10.0$ 에서의 종방향 농도분포와 $f=0.04$ 의 경우에 대한 시각 $t=20.0$ 에서의 농도분포를 비교해 보면, 하류의 동일 지점에서의 혼합 정도는 마찰계수가 증가할수록 커짐을 알 수 있다. 또한 $t=20.0$ 에서 $f=0.01$ 의 경우에 대한 농도분포곡선과 $f=0.04$ 의 경우에 대한 농도분포곡선은 거의 같은 형태를 갖는다. Fig. 4(b)는 이들 두가지 경우에 대하여 수심평균 농도가 최대인 지점이 $x=0$ 으로서 서로 일치하도록 평행 이동하여 비교한 것으로서, 두 농도분포곡선이 거의 일치함을 나타내고 있다. 즉, 동일한 무차원 시각에서의 혼합 정도는 마찰계수에 관계없이 거의 일정함을 알 수 있다.

또한 $t=20.0$ 에서 각 경우에 대한 오염물질의 무차원 유하거리를 수심평균 농도가 최대인 지점을 기준으로 하여 살펴보면, $f=0.01$ 인 경우 569로서 $f=0.04$ 인 경우의 286보다 약 두배 가량 멀리 이송되었음을 알 수 있다. 이는 무차원 유하거리가 마찰계수의 제곱근에 반비례함을 나타내는 결과로서 이는 다음식에 의하여 설명될 수 있다.

$$t' = \frac{t}{d/u_*} = \frac{tU\sqrt{f/8}}{d} = x\sqrt{f/8} \quad (50)$$



(a) Concentration Distributions for Various Dimensionless Time and Friction Factors



(b) Comparison of Shifted Distributions

Fig. 4. Comparison of Longitudinal Concentration Distributions for Different Friction Factors

여기서 기호 ϵ 이 없는 t , d 및 U 는 차원을 갖는 변수들이다. 즉, 일정한 ϵ 에 대하여, 즉 같은 程度의 혼합상태에 이르기까지의 무차원 유하거리(x')는 마찰계수의 제곱근에 반비례함을 알 수 있다.

5. 결 론

난류전단 흐름에서의 비정상 선오염원 확산에 관한 수치모형을 개발하였다. 계산기법으로는 비정상 이송확산 방정식을 종방향 이송 및 연직방향 확산으로 분리하고, 이들 방정식을 반시간간격에 대하여 번갈아 계산하는 단계분리 유한차분기법을 사용하였다. 종방향 이송방정식에 대해서는 Holly-Preissmann 기법을, 연직방향 확산방정식에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 적용하였다. 개발된 모형을 검증하기 위하여 균일흐름 및 난류전단 흐름에서의 정상 수평 선오염원의 이송확산 문제에 적용하여 그 결과를 Nokes 등(1984)의 半解析解와 비교하였다.

개발된 계산모형을 난류전단 흐름내로 순간적으로 방류된 면오염원의 확산문제에 적용함으로써 난류전단 흐름에서의 종확산에 관한 분석을 수행하였다. 마찰계수에 대한 민감도 분석 결과, 동일한 무차원 시각에서의 혼합 程度는 마찰계수에 관계없이 거의 일정한 것으로 나타났다. 또한 동일한 程度의 혼합상태에 도달하는 소요되는 유하거리는 마찰계수의 제곱근에 반비례함을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 연구비 지원에 의하여 수행되었으며(과제번호: KOSEF 951-1201-019-1), 이에 사의를 표한다.

참 고 문 헌

- 서일원, 김대근 (1994). "Eulerian-Lagrangian 방법을 이용한 1차원 종확산방정식의 수치모형." 한국수문학회지, 제27권, 제2호, pp. 155-166.
- 전경수, 이길성 (1993). "Eulerian-Lagrangian 혼합모형에 의한 종확산 방정식의 수치해법." 한국수문학회지, 제26권, 제3호, pp. 137-148.
- 전경수, 이길성 (1994). "종확산 방정식에 대한 Eulerian-Lagrangian 연산자 분리방법." 大韓土木學會論文集, 제14권, 제1호, pp. 131-141.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969). *Applied numerical methods*. John Wiley & Sons, New York.
- Environmental Laboratory (1980). "CE-QUAL-RIV1: A dynamic, one-dimensional (longitudinal) water quality model for streams." *Instruction Report E-90-1*, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi.
- Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., imberger, J., and Brooks, N.H. (1979). *Mixing in inland and coastal waters*. Academic Press, Orlando.
- Holly, F.M., Jr., and Preissmann, A. (1977). "Accurate calculation of transport in two dimensions." *J. Hyd. Div.*, ASCE, Vol. 103, No. 11, pp. 1259-1277.
- Holly, F.M., Jr., and Usseglio-Polatera, J.M. (1984). "Pollutant dispersion in tidal flow." *J. Hyd. Engrg.*, ASCE, Vol. 110, No. 7, pp. 905-926.
- Jun, K.S., and Lee, K.S. (1994). "Dispersion of a horizontal line source in turbulent shear flow." *Proc. 9th Congress of APD-IAHR*, Vol. 3, pp. 465-472.
- McNulty, A.J., and Wood, I.R. (1984). "A new approach to predicting the dispersion of a continuous pollutant source." *J. Hyd. Res.*, Vol. 22, No. 1, pp. 147-159.
- Nokes, R.I., and Hughes, G.O. (1994). "Turbulent mixing in uniform channels of irregular cross-section." *J. Hyd. Res.*, Vol. 32, No. 1, pp. 67-86.
- Nokes, R.I., McNulty, A.J., and Wood, I.R. (1984). "Turbulent dispersion from a steady two-dimensional horizontal source." *J. Fluid Mech.*, Vol. 149, pp. 23-34.
- Nokes, R.I., and Wood, I.R. (1988). "Vertical and lateral turbulent dispersion: some experimental results." *J. Fluid Mech.*, Vol. 187, pp. 373

-394.

Noye, J. (1987). "Numerical methods for solving the transport equation." *Numerical modelling. Applications to marine systems*, J. Noye, ed., Elsevier, Amsterdam, pp. 195-229.

Smith, R. (1982). "Where to put a steady discharge in a river." *J. Fluid Mech.*, Vol. 115, pp. 1-11.

Smith, R. (1985). "Should sewage be discharged at the water surface or near the bed?" *J. Fluid Mech.*, Vol. 152, pp. 443-454.

Toda, K., and Holly, F.M., Jr. (1987). "Hybrid numerical method for linear advection-diffusion." *Microsoftware for Engineers*, Vol. 3, No. 4, pp. 199-205.

〈접수: 1996년 4월 30일〉