

## 난류모형을 이용한 表層密度噴流의 수치해석

### A Numerical Analysis of Buoyant Surface Jet with Turbulence Models

최 한 기\* · 中辻 啓二\*\*  
Choi, Han Ki · Keiji Nakatsuji

---

#### Abstract

To investigate the hydrodynamic characteristics of a two-dimensional buoyant surface jet, the most important factors of the numerical analysis are the evaluation of the free surface and the turbulence transportation under the stratification. In present study, a numerical simulation model used with the semi-implicit method for pressure-linked equations (SIMPLE), the non-hydrostatic approximation and the algebraic stress model (ASM) is applied to investigate the vertical structure of internal flow hydrodynamically. The ASM enables to take account of anisotropy of turbulence, the damping effects of the density interface, and the free surface on the turbulence structure accurately. The ASM tested produces better agreement than the  $k-\epsilon$  model with measurements by Nakatsuji (1984) on the flow development and turbulence structure. Applicability of the ASM to a two-dimensional buoyant surface jet is examined through comparison with experimental data.

---

#### 요 지

2차원 表層密度噴流의 특성을 동역학적으로 구명하기 위해 수치해석을 할 경우 고려해야 할 가장 중요한 문제는 성층상태에서 난류수송의 평가와 자유수표면의 처리이다. 본 연구에서는 2차원 表層密度噴流에 대한 내부흐름의 연직방향구조를 동역학적으로 구명하기 위해서 비정수압 근사 및 代數應力모형(ASM)을 사용하여 SIMPLE로 알려진 수치모형을 적용하였다.  $k-\epsilon$  모형의 결점인 난류의 이방성을 고려한 代數應力모형(ASM)을 사용한 2차원 表層密度噴流 수치모형은 밀도경계층에 포획감쇠 및 자유수면에서 난류구조를 보다 정확하게 규명할 수 있었다. 代數應力모형(ASM)에 의한 유동장의 계산결과는  $k-\epsilon$  모형에 의한 결과와 비교하여 상당히 개선되었으며, 수리실험 결과와 잘 일치하여 모형의 적용성이 검증되었다.

---

\* 정희원, 부산전문대학 토목과 부교수

\*\* 大阪大學 工學部 土木工學科 教授

## 1. 서 론

최근 지하수 오염문제, 호수와 저수지 등의 부영양화 문제, 연안해역에 있어서 적조와 청조의 문제 등, 환경 수리학적 문제에 관련하여 밀도류에 관한 많은 연구가 수행되고 있다. 그 중에서도 발전시설과 공업시설로부터 주위 환경수역에 직접 방류 폐기되고 있는 온수방류와 공업폐수는 방류된 수역의 수환경에 대해 국소적·광역적으로 영향을 미치므로, 환경수리학의 중요한 연구대상으로 되어왔다. 하천이나 해양에 폐수를 방류시키는 방법은 여러가지가 있으나 그 중에서도 건설비 문제나 유지보수 면에서 가장 유리하다고 판단되는 표층방류형식이 가장 많이 채택되고 있다.

表層密度噴流은 사유전단류의 특성인 전단효과와 부력에 의한 성층안정효과가 공존하는 흐름장으로서, 상·하에는 수표면과 밀도 경계면인 두개의 자유경계가 있는 점이 특징이며, 밀도류적으로 사유로부터 상류로 천이하는 유동장이다. 또한 放流水와 주위 環境水와의 밀도차 및 放流水내의 밀도분포에 의해서 생기는 부력효과에 의해, 放流水 흐름을(flux)의 수평방향 확산이 증대함과 아울러 연직하방으로부터 주위수와의 포획연행(entrainment)에 의한 혼입이 약화되어 放流水와의 연직혼합이 둔화되는 특성을 갖고 있다.

表層密度噴流에 관한 많은 수치모형이 제안되어 있으나, 실제로 表層密度噴流의 수치모형을 만들 경우, 고려해야 할 중요한 문제는 ①성층상태에서 난류수송을 어떻게 평가할 것인가 ②수표면을 어떻게 취급할 것인가 하는 큰 두가지 문제로 귀착된다. 난류수송에 관해서는 최근 고전적인 와동점성과 혼합거리의 개념으로부터 벗어나서  $k-\epsilon$  모형과 代數應力모형(ASM)으로 대표되는 고차난류모형이 널리 사용되고 있다.  $k-\epsilon$  모형에 의한 2차원 表層密度噴流의 수치해석에 관한 연구는 Patankar와 Spalding(1972), McGuirk와 Papadimitriou(1986), 岩佐 등(1987), 室田 등(1989), 최한기(1991) 및 허재영(1993) 등에 의해 시도되었으나, 난류의 이방성을 정확히 해석할 수 없는 결점이 있다. 수표면의 처리 방법에 대해

서는 일반적으로 Rigid-frictionless-lid 근사조건과 수표면 직접산정 조건이 이용되고 있다. Paul과 Lick(1974), Waldrop과 Farmer(1974), 岩佐 등(1983), 室田 등(1989), 최한기(1991) 및 김기홍(1995)은 유량의 연속조건과 수표면의 운동학적인 조건으로부터 수위변동량을 직접산정하여 수위변동량을 등가인 표면압력 변동으로 환원해서 평가하는 모형을 제안하고 있다. 이 경우 연직방향의 운동방정식은 정수압 가정을 통하여 해석되므로 2차원적인 흐름의 구조가 완전하게 채워진다고는 볼 수 없다. 특히 연직방향으로 방류되는 밀도분류의 유동이나 내부도수(internal hydraulic jump) 등 흐름의 연직방향의 거동을 보다 정밀하게 해석할 필요가 있는 유동의 내부구조를 동역학적으로 구명하기 위해서는 수평방향의 운동방정식과 더불어, 근사되지 않은 완전한 연직방향 운동방정식에 의해 유체의 운동을 해석해야 할 필요가 있다. 비정수압 모형에 의한 압력의 계산법에는 다음과 같은 두가지 방법이 있다.

① 압력방정식(Poisson Equation)에 의한 해법

② SIMPLE(Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)법

전자는 타원형의 Poisson 방정식을 직접 푸는 관계로 경계조건의 취급이 엄격하고 계산의 불안정이 생기기 쉽다는 결점이 있다. 그에 반해 후자는 경계조건의 취급이 용이하고 계산의 안정성이 뛰어나다고 알려져 있다.

따라서, 본 연구에서는 수표면의 처리에 대해서는 연직방향의 운동방정식을 직접해석하는 Rigid-frictionless-lid 근사방법을 채택하였으며, 수치해법은 Patankar(1980)가 제안한 SIMPLE 방법을 사용하였다. 난류수송에 대해서는 현재 가장 널리 사용되고 있는  $k-\epsilon$  모형을 사용하여 수치프로그램을 작성하고 그 적용성 및 한계성을 검토하고 보다 고차원적인 난류모형인 代數應力모형(ASM)을 사용하여 프로그램을 작성한 뒤 모형의 타당성을 검토하기 위하여 中辻(1984)의 실험치와 비교를 하였으며, 2차원 表層密度噴流의 중요한 흐름 특성에 대하여 고찰하였다.

## 2. 2차원 表層密度噴流의 기초방정식

### 2.1 평균유동장

본 연구에서 좌표계는 상류단부의 저면에 원점을 취하고 유하방향을 X축, 연직 상방향을 Z축으로 한다(그림 2 참고). 表層密度噴流의 기초방정식의 정식화에 있어서 다음과 같은 가정을 도입한다. 즉, 유체는 비압축성이고, 밀도는 보존물질의 농도에 비례한다. 또한, Boussinesq의 근사기 성립하므로 밀도변화의 영향은 압력항에서만 고려하고, 유체에 작용하는 체적력은 중력뿐이며, Coriolis 힘은 무시한다.

2차원 表層密度噴流의 흐름을 지배하는 기초방정식은 앞의 가정과 더불어 질량, 운동량 및 스칼라량의 보존법칙에 의하여 다음과 같이 표현된다.

연속방정식

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

운동방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j U_i) = & -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \\ & + \frac{\rho - \rho_a}{\rho_a} g \delta_{i3} \end{aligned} \quad (2)$$

확산방정식

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (B U_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_i \frac{\partial B}{\partial x_i} - \overline{u_i b} \right) \quad (3)$$

여기서,  $U_i$ ,  $U_i$ 는 각 방향의 평균유속,  $u_i$ ,  $u_i$ 는  $U_i$ ,  $U_i$ 의 변동성분,  $P$ 는 평균압력,  $\rho$ 는 평균밀도,  $\rho_a$ 는 기준밀도,  $B$ 는  $B = (\rho_a - \rho)g/\rho_a$ 로 정의되는 평균부력,  $b$ 는 평균부력  $B$ 의 변동성분,  $\nu$ 는 동점성계수,  $\Gamma_i$ 는 분자확산계수,  $\delta_{i3}$ 는 Kronecker delta,  $g$ 는 중력가속도이다.

### 2.2 난류변동장

기초방정식 (1)~(3)을 풀기 위해서는 레이놀즈

응력  $-\overline{u_i u_j}$ 와 난류부력 흐름율(flux)  $-\overline{u_i b}$ 를 결정할 필요가 있다. 이와 같은 난류수송의 완결문제가 난류연구의 최대과제이며 최근의 연구에서는 그 해결 수법으로서 여러가지 모델링이 있지만, 본 연구에서는 현재 가장 널리 사용되고 있는 k- $\epsilon$  모형과 k- $\epsilon$  모형의 결점인 난류의 이방성을 효과적으로 표현 가능한 代數應力모형(ASM)을 이용해서 2차원 表層密度噴流를 해석하고자 한다.

#### 2.2.1 k- $\epsilon$ 모형

레이놀즈 응력 및 난류부력흐름율(flux)은 다음과 같이 와동점성계수  $\nu_t$ 와 와동확산계수  $\Gamma_t$ 를 사용해서 다음과 같이 모형화된다.

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \cdot \delta_{ij} \quad (4)$$

$$-\overline{u_i b} = \Gamma_t \frac{\partial B}{\partial x_i} \quad (5)$$

와동점성계수  $\nu_t$ 와 와동확산계수  $\Gamma_t$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6)$$

$$\Gamma_t = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \quad (7)$$

여기서  $C_\mu$ 는 실험상수로서 0.09이다.

윗식은 난류의 특성이 난류운동에너지,  $k(=1/2 \overline{u_i^2})$ 와 점성소산율,  $\epsilon(=\nu \cdot \partial u_i / \partial x_j \cdot \partial u_i / \partial x_j)$  즉, 2개의 특성량으로서 결정된다는 것을 의미하고 있다.  $k$  및  $\epsilon$ 의 분포는 다음과 같은 반실험적인 輸送方程式으로부터 계산된다.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i \cdot k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} + P_t - G - \epsilon \quad (8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i \cdot \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right\}$$

$$+C_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} (P_r + (1-C_{\epsilon_3}) \cdot G) - C_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9)$$

여기서

$$P_r = \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (10)$$

$$G = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \left( \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \delta_{,i3} \quad (11)$$

식 (10)은 난류에너지 생성항(kinetic energy production term)이며, 식 (11)은 부력생성항(buoyancy production term)을 의미한다.

식 (8)과 식 (9)의  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $C_{\epsilon_1}$ ,  $C_{\epsilon_2}$ , 및  $C_{\epsilon_3}$ 는 실험상수이며, 일반적으로 사용되는 값으로서 각각 1.0, 1.3, 1.44, 1.92, 1.0을 사용하였다.

### 2.2.2 代數應力모형(ASM)

k- $\epsilon$  모형은 난류의 국소등방성의 가정에 근거를 둔 모형이므로, 난류의 이방성을 고려할 수 없다는 결점이 있다. 따라서 난류 諸量을 정확히 평가하기 위해서는 레이놀즈 응력 모형에 의하여  $-\overline{u_i u_j}$ ,  $-\overline{u_i b}$ , 및  $-\overline{b^2}$ 의 輸送方程式을 직접 해석해야 한다. 레이놀즈 응력 모형에 의해 난류 諸量의 수송방정식을 해석할 경우 방정식의 수가 많게 되어 계산이 쉽지 않을 뿐만 아니라 많은 연산시간을 필요로 한다.

Rodi(1976) 및 Gibson과 Launder(1976)는 레이놀즈 응력 모형의 기본적인 특성을 유지한채 방정식계를 대수적 표현으로 간략화한 代數應力모형(ASM)을 제안하고 있다. 代數應力모형(ASM)의 기본적인 개념은  $-\overline{u_i u_j}$  및  $-\overline{u_i b}$  輸送方程式의 비정상항, 이송항 및 확산항을 k의 輸送方程式에 대응하는 항으로 근사하는 방법으로서,  $\overline{u_i u_j}/k$  및  $\overline{u_i b}/k$ 의 시간적·공간적 변화가  $\overline{u_i u_j}$  및  $\overline{u_i b}$  자체의 변화에 비해 매우 작다고 가정하여 다음과 같이 간략화된다.

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - Diff[\overline{u_i u_j}] = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left( \frac{Dk}{Dt} - Diff(k) \right)$$

$$= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_r + G - \epsilon) \quad (12)$$

$$\frac{D\overline{u_i b}}{Dt} - Diff[\overline{u_i b}] = \frac{\overline{u_i b}}{2k} (P_r + G - \epsilon) \quad (13)$$

이 결과 레이놀즈 응력 모형은 다음과 같이 대수적 표현으로 간략화된다. 모든 난류의 諸量을 난류 에너지 k와 점성소산율  $\epsilon$ 의 輸送方程式을 푸는 것으로 산정 가능한 것이 代數應力모형(ASM)의 장점이다.

$$\begin{aligned} \overline{u^2} &= \frac{2}{3}k \\ &\left[ \frac{P_r}{\epsilon} (3-2C_2 + C_2 \cdot C_2 \cdot f_s) + C_{r-1} + \frac{3}{2} C_{f_s} \frac{\overline{w^2}}{k} \right] \\ &\cdot \left[ C_1 + \frac{P_r + G}{\epsilon} - 1 \right]^{-1} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{uw} &= -C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} \\ &= -\frac{\overline{w^2}}{k} \left\{ 1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_2 f_s - (C_{2b} - 1) \frac{(1-C_3)}{C_{1b}} \alpha \beta \right\} \\ &\cdot \left\{ C_1 + \frac{3}{2} C_{f_s} + \frac{C_3 - 1}{C_{1b}} \beta \right\}^{-1} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= \frac{2}{3}k \left\{ C_{r-1} + \frac{P_r + G}{\epsilon} (C_2 - 2C_2 C_2 f_s) \right. \\ &\left. + \frac{G}{\epsilon} (3 - C_2 - 2C_3 + 2C_2 C_2 f_s) \right\} \\ &\left\{ C_1 + 2C_{f_s} + \frac{P_r + G}{\epsilon} - 1 \right\}^{-1} \quad (16) \end{aligned}$$

$$\overline{b^2} = -2C_{R\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \frac{\overline{wb}}{\partial z} \quad (17)$$

$$\overline{wb} = -\frac{1}{C_{1b}} \frac{k}{\epsilon} \frac{\overline{uw}}{\partial z} + \frac{C_{2b} - 1}{C_{1b}} \frac{\overline{w^2}}{\epsilon} (\alpha \beta) \frac{\partial U}{\partial z} \quad (18)$$

$$\overline{wb} = -\alpha \frac{\overline{w^2}}{\epsilon} \frac{k}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (19)$$

여기서

$$\alpha = \frac{1}{[(C_{1b} + C_{1b}'f_s) + (C_{3b} - 1)2C_R\beta]} \quad (20)$$

$$\beta = -\frac{k^2 \partial B}{\varepsilon^2 \partial z} \quad (21)$$

代數應力모형(ASM)에서는  $k$ - $\varepsilon$  모형에서와 같이  $k$ 와  $\varepsilon$ 의 輸送方程式은 식 (8)과 (9)를 이용한다. 그러나, 확산항에 관한 모형 상수  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  에 관해서는 Rodi(1984)에 의하면  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  의 값은 성층 효과 및 自由水表面(혹은 壁面)으로 접근함에 따라 영향을 받기 때문에  $k$  및  $\varepsilon$ 의 확산이 와동점성계수  $\nu_t$  그 자체에 비례하는 것이 아니라  $\overline{w^2}$  ( $k/\varepsilon$ )에 比例하도록  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  의 값을 다음식과 같은 함수로서 보정한다.

$$\sigma_k = \frac{\omega}{C_k} \quad (22)$$

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\omega}{C_\varepsilon} \quad (23)$$

여기서,

$$\omega = \frac{1 - C_2 + \frac{3}{2}C_2C_2'f_w - (C_{2b} - 1)\frac{(1 - C_3)}{C_{1b}}\alpha\beta}{C_1 + \frac{3}{2}C_1'f_w - \frac{(1 - C_3)}{C_{1b}}\beta} \quad (24)$$

앞에서 기술한 바와 같이 레이놀즈 응력, 부력흐름을(flux) 및 부력변동량의 輸送方程式을 간략화하여 代數的인 표현에 귀착시키려는 시도는 Rodi(1984), Gibson과 Launder(1976)를 중심으로

연구되어 왔다. 분명히 代數應力모형에서는  $k$  및  $\varepsilon$ 의 2개의 스칼라량만으로 와동점성계수  $\nu_t$ 를 산정하므로써 난류운동의 이방성을 완전히 감안하지 못하는  $k$ - $\varepsilon$  모형의 치명적인 결함을 개선하고 있다.

자유수표면의 존재는 연직방향의 난류변동을 감소시키므로써 난류의 길이 스케일도 감소시켜 연직방향의 운동량과 부력의 수송을 억제하는 효과를 초래한다. 이런 의미에서 자유수표면은 벽면의 존재와 같은 영향을 난류 특성에 미친다고 생각할 수 있다. Celik과 Rodi(1984)는 Gibson과 Launder(1976)가 제안한 압력-변형 상관항에 있어서의 벽면수정모형을 확장하여, 벽면감쇠함수  $f_w$ 를 자유수표면에 확장한 자유수표면 감쇠함수  $f_s$ 를 다음과 같이 제안하였다.

$$f_s = \frac{k^{3/2}}{C_w\varepsilon} \cdot \frac{1}{z_n + 0.04\frac{k_s^{3/2}}{\varepsilon_s}} \quad (25)$$

여기서,  $k_s$ 와  $\varepsilon_s$ 는 각각 자유수표면에서의  $k$ 와  $\varepsilon$ 의 값이며  $z_n$ 은 자유수표면으로부터 연직방향으로 측정된 거리이다. 식 (25)는 자유수표면으로부터 멀어질수록 보정효과가 감소한다는 것을 나타낸다.  $\sigma_t$ 에 관해서는 국소적인 성층안정도를 나타내는 경사형 Richardson 수의 함수로서 표현되는 식 (26)을 사용한다.

$$\sigma_t = \frac{\omega}{\alpha} \quad (26)$$

본 모형에서 사용되는 각 상수의 값은 표 1과 같다 (Rodi, 1984).

표 1. 代數應力모형(ASM)에 사용된 상수

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1'$	$C_2'$	$C_w$	$C_{1b}$	$C_{2b}$
1.8	0.6	0.5	0.5	0.3	2.5	3.0	0.33
$C_{3b}$	$C_{1b}'$	$C_R$	$C_k$	$C_\varepsilon$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$\sigma_t$
0.33	0.5	0.8	0.25	0.15	식(22)	식(23)	식(26)

### 3. 수치해석

#### 3.1 수치해석 방법

비정수압모형에 의한 기초방정식 (1)~(3)을 해석하기 위해서 문제가 되는 것은 압력의 계산이다. 압력항을 처리하기 위해서 Patankar(1980)가 개발한 SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)을 이용했으며, 그 알고리즘은 다음과 같다. 각 기초방정식을 다음과 같은 일반형으로 표현한다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\phi - K\frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(W\phi - K\frac{\partial \phi}{\partial z}) = S \quad (27)$$

식 (27)를 그림 1과 같은 엇갈린 격자망(staggered grid)을 이용해서 연속방정식, 운동방정식 및 확산방정식을 각 제어체적(control volume)에 대해서 이산화하면, 이산화 방정식은 다음과 같이 일반형으로 정리 가능하다.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (28)$$

식 (2)의 운동방정식은 압력장이 기지이면 해석이 가능하게 된다. 우선, 정확한 유속  $U$ ,  $W$ 를 추정 압력  $P^*$ 에 의해 운동방정식으로부터 계산된 불안정한 속도  $U^*$ ,  $W^*$ 와 그 보정치  $u'$ ,  $w'$ 의 합으로

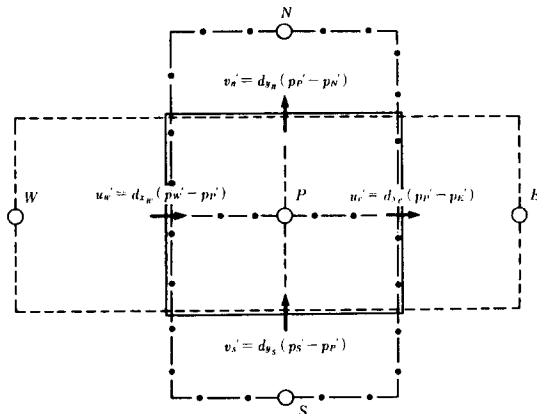


그림 1. 엇갈린 격자망(Staggered Grid)과 검사체적(Control Volume)

나타낸다.

$$U = U^* + u' \quad (29)$$

$$W = W^* + w' \quad (30)$$

정확한 압력  $P$ 도 같은 형식으로 다음과 같이 나타낸다.

$$P = P^* + p' \quad (31)$$

식 (29)~(31)을 식 (2)의 운동방정식에 대입하면 속도보정식이 구해진다. 이 속도 보정식을 식 (1)의 연속방정식에 대입하면, 일반형의 이산화 방정식과 같은 형태의 압력보정식에 관한 이산화 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b' \quad (32)$$

일반형의 이산화 방정식인 식 (28)과 압력보정식에 관한 이산화 방정식 식 (32)를 풀기 위해서 Thomas 알고리즘(TDMA)을 이용하고, 이송항과 확산항을 차분할 때는 Hybrid법을 이용하였으며, 시간에 관해서는 전방차분을 사용했다. TDMA에 의해서 반복계산을 할 경우 지배방정식은 강한 비선형성을 갖고 있으므로 반복계산이 불안정할 가능성이 많으므로 해의 안정성을 도모하기 위해서 부족완화법(under relaxation method)를 채용했다.

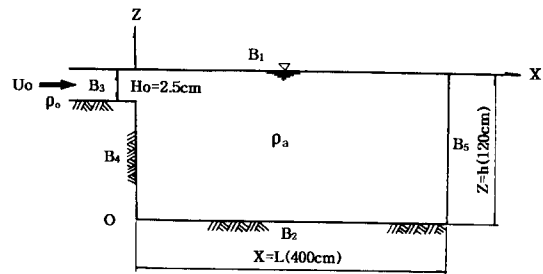


그림 2. 계산영역과 경계

표 2. 수치실험의 계산조건

case	$U_0$ (cm/sec)	$H_0$ (cm)	$\rho_a$ (kgf/m <sup>3</sup> )	$\rho_s$ (kgf/m <sup>3</sup> )	$F_{do}$
1	10.0	2.5	1000.00	1003.75	3.3
2	10.0	2.5	1000.00	1001.14	6.0
3	10.0	2.5	1000.00	1000.50	9.0

### 3.2 계산조건

계산영역은 그림 2와 같으며, 中辻(1984)의 수리실험조건과 동일하게 염수를 가득 채운 길이 400cm, 깊이 120cm의 2차원 수조에 담수를 표층으로 방류하는 수치실험을 실시했다. 表層密度噴流에서 흐름의 변화는 방류구 부근에서 심하게 변동하고 방류구로부터 멀어질수록 완만한 흐름의 변화를 나타내므로 이런 흐름의 특성에 따라서 격자망의 간격을 변화시킨 부동격자망을 채택하였다. 격자망은  $\Delta x = 6.0 \sim 20\text{cm}$  간격으로 수평(x)방향에 31절점,  $\Delta z = 0.5 \sim 10\text{cm}$  간격으로 연직(z)방향에 25절점으로 분할하였다. 이산화 시간간격으로는 CFL(Courant, Friedrich와 Lewy) 안정조건으로부터  $\Delta t = 0.03\text{sec}$ 로 하였다. 또한, 방류구에서의 초기조건은 McGuirk와 Papadimitriou(1986)의 경험식을 사용하였으며 수치실험의 계산조건은 표 2와 같다.

#### 3.2.1 경계조건 및 초기조건

그림 2와 같이 방류구의 유속 및 수심을 각각  $U_0$ ,  $H_0$  수조의 수심을  $h$ 로 하고 X 방향의 하류단( $X=L$ )에 경계면을 설정하였다. 벽면 및 수표면 부근에 있어서 전단류는 다음 식과 같은 대수속도 분포식을 사용하고 있다.

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{U_\tau \cdot y}{\nu} + 5, \chi = 0.41 \quad (33)$$

그러나,  $k-\epsilon$  모형은 레이놀즈수가 큰 흐름장에 적용하는 모형이므로 점성의 영향이 큰 벽면 및 수표면 부근에서는 벽법칙을 직접 적용하는 것은 곤란하다. 따라서 본 연구에서는 대수속도분포식으로

부터 구해지는 무차원량

$$y^+ = \frac{U_\tau \cdot y}{\nu} \quad (34)$$

를 기준으로 해서  $y^+ < 30$ 으로 되는 영역의  $k$  및  $\epsilon$ 에 대해서는 道奧 등(1993)이 적용한 Patel 등(1985)의 실험적 함수형을 사용했다.

(1) 수표면( $Z=h$ )에서 경계조건(B1)

압력에 대해서 Rigid-lid 가정을 하고, 수평방향 유속에 대해서는 Slip 조건을 주었으며 난류부력과 난류에너지 및 점성소산율의 흐름율(flux)은 없다고 가정하였다.

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0, W = 0 \quad (35)$$

(2) 저면( $Z=0$ )에서 경계조건(B2)

유속은 Non-Slip 조건을 가정하고 난류부력과 난류에너지 및 점성소산율 흐름율(flux)은 없다고 가정하였다.

$$U = W = 0, \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0 \quad (36)$$

(3) 방류구( $X=0$ ,  $h-H_0 < Z < h$ )에서 경계조건(B3)

방류구에서 유량 및 유속분포는 일정하다고 가정하였고, Z 방향의 유속성분은 없으며 밀도분포는 일정하고 시간적으로 변화하지 않는 것으로 하였다. 난류운동에너지 및 점성소산율은 항상 일정한 것으로 하였다.

$$U_0 = B_0 = \text{const}, W_0 = 0, U = U_0, B = B_0, k = k_0, \epsilon = \epsilon_0 \quad (37)$$

방류구에서  $k$  및  $\epsilon$ 의 값은 다음과 같은

McGuirk와 Papadimitriou(1986)의 경험식을 사용하였다.

$$k_0 = 0.0025U_0^2, \quad \varepsilon_0 = k_0^{3/2}H_0 \quad (38)$$

(4) 벽면( $X=0$ ,  $0 < Z < h-H_0$ )에서 경계조건 (B4)

유속은 Non-Slip 조건을 가정하고 난류부력 및 난류운동에너지 흐름을(flux)은 없다고 가정하였다.

$$U=W=0, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \quad (39)$$

(5) 하류단( $X=L$ )에서 경계조건

하류단에서는 흐름의 유출입이 가능하고 경계면에 평행인 연직유속은 없다고 가정하고, 경계면에 수직인 유속성분과 난류부력 흐름을(flux), 난류에너지 및 점성소산율의 경사는 없다고 가정하였다.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

(6) 초기조건

초기조건으로서 표 2와 같은 정지한 균질유체에 방류구 조건 즉, 식 (37) 및 식 (38)과 같은 유체가 정상적으로 유입하는 것으로 가정하였다.

## 4. 계산결과 및 고찰

### 4.1 평균유동장

2차원 表層密度噴流의 내부 유동구조의 파악 및 본 모형의 적용성을 검증할 목적으로, 실험결과와의 비교를 위해 表層密度噴流의 유동을 지배하는 매개변수로서  $Fdo = U_0 / \sqrt{(\Delta\rho_0/\rho_0)g \cdot H_0}$  로 정의되는 밀도 Froude수가  $Fdo=3.3$ ,  $6.0$  및  $9.0$ 인 경우에 대해서 수치실험을 실시하였으며,  $Fdo=3.3$ 은 부력이 지배적인 흐름의 예로서,  $Fdo=6.0$  및  $9.0$ 은 운동량이 지배적인 흐름의 예로서 선정하였다. 여기서,  $U_0$ 는 방류구 유속,  $B_0 = \Delta\rho_0/\rho_0 \cdot L$

$\rho_0 = \rho_a - \rho_0$ ,  $\rho_0$ 는 주위수의 밀도,  $\rho_0$ 는 放流水의 밀도이다.

그림 3 및 그림 4는 밀도 Froude수  $Fdo=3.3$ 인 경우에 방류구 수심  $H_0$ 로 무차원화한 유하방향의 각 지점  $X/H_0=4, 10, 20$  및  $40$ 에서의 방류구 유속  $U_0$ 와 방류구의 부력  $B_0$ 로 무차원화한 연직방향의 유속 및 부력분포에 대해  $k-\varepsilon$  모형과 代數應力모형(ASM)으로 수치실험한 결과를 비교한 것이다. 또한, 그림 5 및 그림 6은 밀도 Froude수,  $Fdo=6.0$ 인 경우에 대해서 전술한  $Fdo=3.3$ 인 경우와 같은 방법으로 수치실험한 결과를 비교한 것이다. 유하위치  $X/H_0=4$ 까지는 난류전단영역(core region)이며,  $X/H_0=10$ 까지는 운동량 탁월영역(entrainment region)을 대표하고 있고,  $X/H_0=20$  및  $X/H_0=40$ 까지는 각각 유하방향에 따른 천이영역(transitional region) 및 부력의 영향이 탁월한 성층영역(stratified region)을 나타낸다. 수치실험에서 비교 대상이 된 실험치는 申辻(1984)의 실험결과이다.

$k-\varepsilon$ 모형 및 代數應力모형(ASM)에 의한 수치실험의 결과는 밀도 Froude수에 따른 경향 즉, 밀도 Froude수가 작을수록 밀도차가 크게 되어 연직방향의 퍼짐은 부력의 영향을 받아 억제되고, 따라서 수평방향의 퍼짐이 크게 되는 일반적인 경향을 전반적으로 잘 나타내고 있다. 운동량이 탁월한 유하방향  $X/H_0=10$ 까지는  $k-\varepsilon$  모형과 代數應力모형(ASM)의 경우 평균유속 및 평균부력에 있어서 각각 실험결과와 잘 일치하고 있으나, 代數應力모형(ASM)의 경우가  $k-\varepsilon$  모형의 경우보다 잘 일치하고 있다. 그러나, 부력에 의한 성층효과가 지배적인 하류영역인  $X/H_0=40$ 에서는  $k-\varepsilon$  모형의 경우 연직방향으로 과대하게 확산되어 실험치와의 일치도가 나빠지고 있다. 특히 이러한 경향은 평균부력의 분포에 현저하게 나타나며, 밀도 Froude수가 증가할수록 더 큰 차이를 나타낸다.

한편 代數應力모형(ASM)을 이용하여 계산한 평균유속 및 평균부력의 유하방향변화는  $k-\varepsilon$ 모형의 계산결과에 비해 월등히 개선되어 실험치와 매우 잘 일치하고 있다. ASM에서는 부력에 의한 성층효과가 계산결과에 잘 반영되어, 평균유속과 평균부력분포의 연직방향으로의 확산이 억제되고



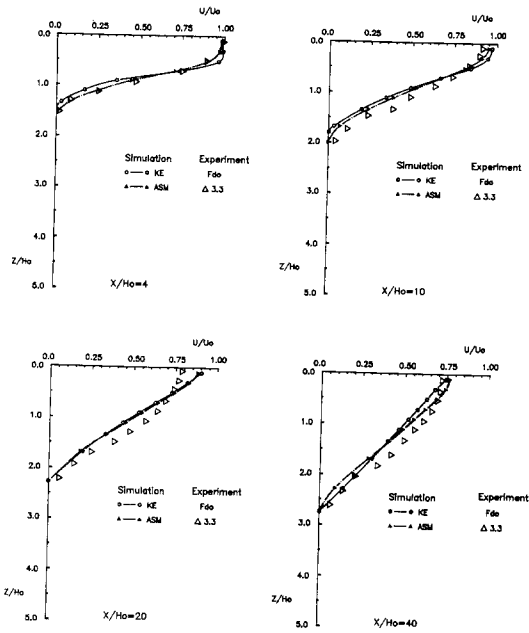


그림 3. 평균유속(U)의 연직분포(Fdo=3.3)

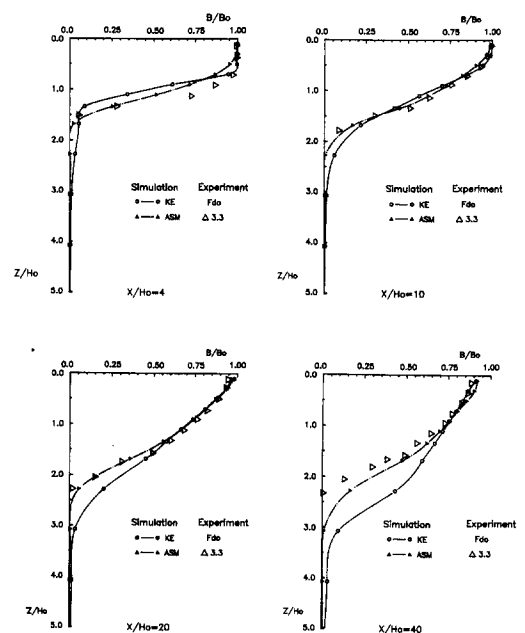


그림 4. 평균부력(B)의 연직분포(Fdo=3.3)

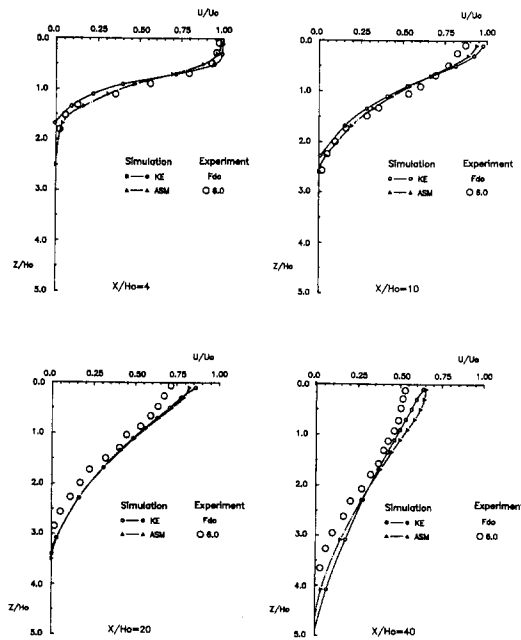


그림 5. 평균유속(U)의 연직분포(Fdo=6.0)

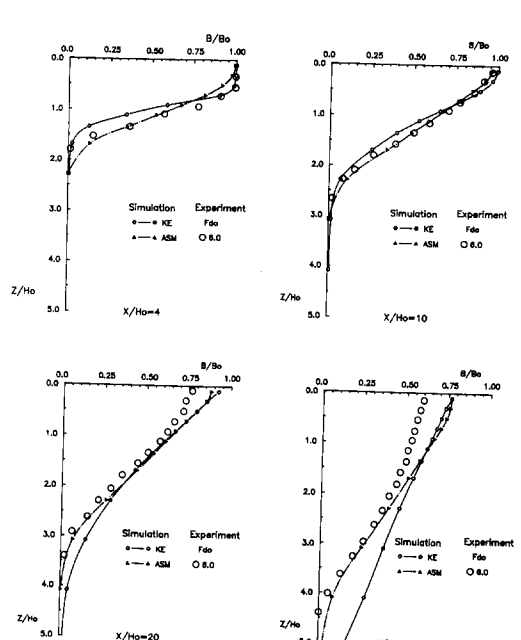


그림 6. 평균부력(B)의 연직분포(Fdo=6.0)

음이 명료하게 나타나 있다. 특히 하류방향으로 진행함에 따라 부력의 영향이 탁월해지므로 따라서 성층효과가 우세해지면, 난류의 등방성을 전제로하여  $k$ 와  $\epsilon$ 의 2개의 스칼라량만으로 와동점성계수  $\nu_t$  및 와동확산계수  $\Gamma_t$ 를 산정하여 난류변동성분을 구하므로 난류의 비등방성이 고려되지 않은  $k-\epsilon$  모형의 한계성이 명료하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 따라서 2차원 表層密度噴流의 동역학적 구조를 파악하기 위해서는 난류의 이방성을 고려한 代數應力모형(ASM)을 사용한 경우 훨씬 개선된 결과를 얻을 수 있음이 확인되어, 代數應力모형(ASM)의 타당성이 입증되었다. 그러나 밀도 Froude수가 증가함에 따라 부력 탁월영역에서 수 표면 부근에서의 평균유속과 평균부력의 계산치와 실험치의 일치도가 약간 떨어지는 것을 알 수 있다. 이에 대한 원인으로서는 응력-변형율항의 모델링에 기인하는 것, 대수방정식을 유도하는 과정에서 도입한 가정 즉, 국소평형 가정과  $\overline{u_i u_j}$  및  $\overline{u_i b}$  /  $k$ 의 시간적·공간적 변화가  $\overline{u_i u_j}$  및  $\overline{u_i b}$  자체의 변화에 비해 매우 작은 유동에 한정한다는 가정 등에 기인하는 것, 실험에서 계측의 精度에 기인하는 것 등을 생각할 수 있으며, 모델링 과정에 기인하는 사항을 추론하기 위해서는 더욱 상세한 고찰이 필요할 것으로 판단된다. 실험의 精度에 관해서는,  $F_{do}=3.3$ 의 경우보다  $F_{do}=6.0$ 의 경우에  $X/H_o=20$ 보다 하류에서 평균유속 및 평균부력이 25% 이상 작은 것으로 관측되고 있으며, 또한 성층의 정도도 훨씬 미약하여 유속 또는 밀도의 변동이 상대적으로 클 것으로 예상되는데, 따라서 하류영역에서는 이러한 물리량의 계측에 오차가 포함될 가능성이 비교적 클 것으로 추측할 수 있다. 이러한 추측은 충분한 고찰을 거쳐 검증되어야 할 것이다. 따라서 수표면의 존재에 의한 난류수송의 감소와 성층효과와의 관련성에 대해서는 앞으로 보다 깊은 연구가 요구되고 있다.

또한 본 연구에서 적용한 비정수압 SIMPLE 알고리즘을 이용한 代數應力모형(ASM)의 수치실험 결과는 정수압 가정에 의한 室田 등(1989)과 김기홍(1995)의 수치실험 결과와 비교하여 상당히 개선되었음을 확인하였다. 따라서 본 연구에서 적용한 비정수압 대수응력 난류모형은 본 연구에서 대

상으로 하는 表層密度噴流뿐만 아니라, 최근 온수 방류 및 하수처리수 방류방법의 일환으로 연구대상 이 되고 있는 연직방향의 운동이 탁월한 鉛直放流 密度噴流 및 底面放流 密度噴流의 유동구조를 파악 하는데 적용이 가능할 것으로 생각된다.

## 4.2 난류변동장

그림 7 과 그림 8은 각각 밀도 Froude수에 따른  $k-\epsilon$  모형과 代數應力모형(ASM)의 레이놀즈 응력  $\overline{uw}$ 의 연직분포를 나타낸다. 그림 9는  $X/H_o=40$ 에서 밀도 Froude수에 따른 난류강도,  $\sqrt{u'^2}$ ,  $\sqrt{w'^2}$  및  $\sqrt{b'^2}$ 의 연직방향 분포를 나타낸다. 레이놀즈 응력 분포는 운동량 탁월영역인  $X/H_o=4.0$ 을 제외하고는 두 모형에 의한 수치실험 결과가 수리 실험 결과보다 전반적으로 큰 값을 나타내고 있다. 또한 유하방향으로 진행함에 따라 레이놀즈 응력  $\overline{uw}$ 의 값은 감소하고 있음을 알 수 있다. 이는 유하 방향으로 진행함에 따라 부력의 효과가 탁월해짐으로 인해 성층안정성이 강화되어 연직방향으로 운동량의 난류수송이 억제되는 것을 의미한다. 본 연구에서 적용된 代數應力모형(ASM)의 계산 결과가  $k-\epsilon$  모형의 결과보다 약간 개선되고 있으며, 레이놀즈 응력의 수리실험 결과에 대한 밀도 Froude수에 따른 정성적인 경향을 잘 재현하고 있다. 한편 레이놀즈 응력에 대한 수치실험 결과가 수리실험치보다 다소 큰 값을 나타내고 있으나  $X/H_o=10$  보다 하류로 가면 난류량의 크기가  $10^{-2}$  정도임을 고려한다면 비교적 양호한 정도로 재현하고 있다고 할 수 있다.

그림 10은 代數應力모형(ASM)에 의해 계산된 와동점성계수  $\nu_t$ 의 연직방향 분포를 밀도 Froude수에 따라 나타낸 것이다. 밀도 Froude수가 클수록 즉, 부력에 비해 관성력이 큰 흐름일수록  $\nu_t$ 의 값이 크게 되고,  $\nu_t$ 의 최대치가 나타나는 깊이가 증가하는 경향을 잘 재현하고 있다. 代數應力모형(ASM)과  $k-\epsilon$ 모형과의 비교를 위해 밀도 Froude수  $F_{do}=3.3$  및  $6.0$ 의 경우에  $X/H_o=40$  지점에서 와동점성계수의 계산결과를 비교한 것을 그림 11에 나타내었다.  $k-\epsilon$ 모형에 의한 와동점성계수의 값에 비해 代數應力모형(ASM)에 의한 계산치가

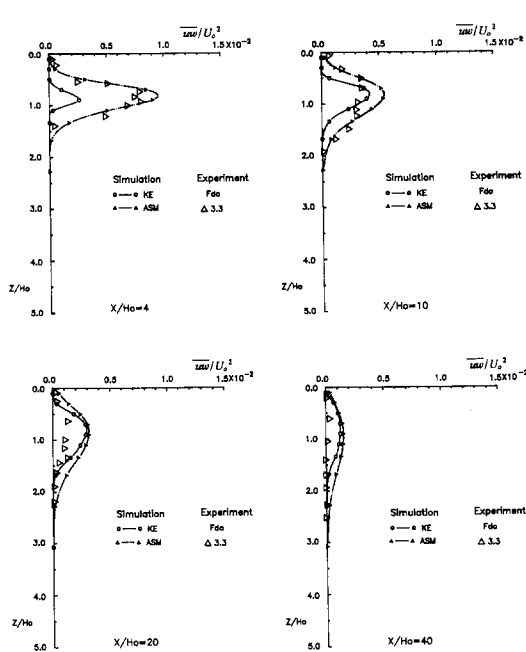


그림 7. 레이놀즈응력 ( $\overline{uv}$ )의 연직분포 ( $F_{do}=3.3$ )

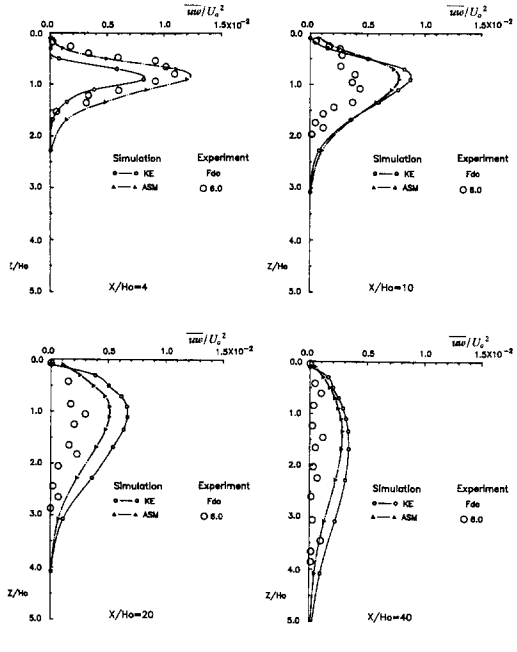


그림 8. 레이놀즈응력 ( $\overline{uv}$ )의 연직분포 ( $F_{do}=6.0$ )

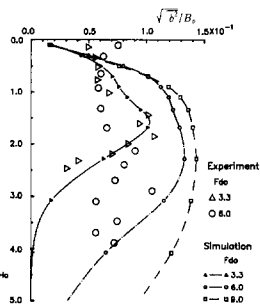
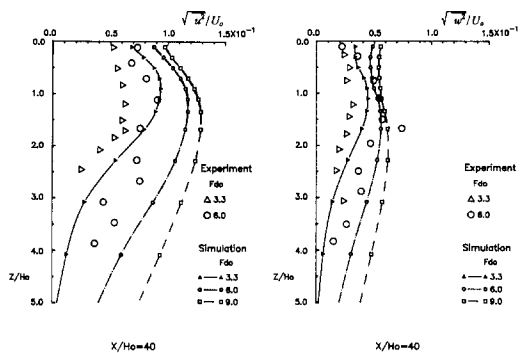


그림 9. 난류강도 ( $\sqrt{u'}$ ,  $\sqrt{w'}$  및  $\sqrt{B}$ )의 연직분포 ( $X/Ho=40$ )

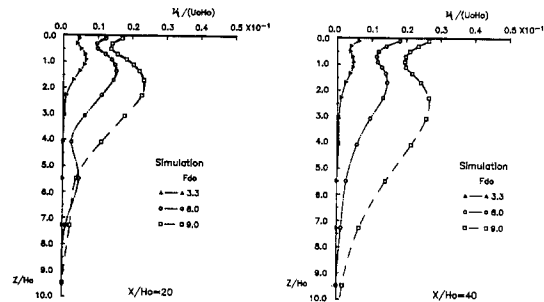
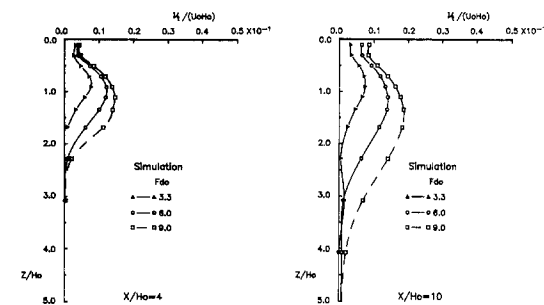


그림 10. 와동점성계수 ( $\nu_i$ )의 연직분포

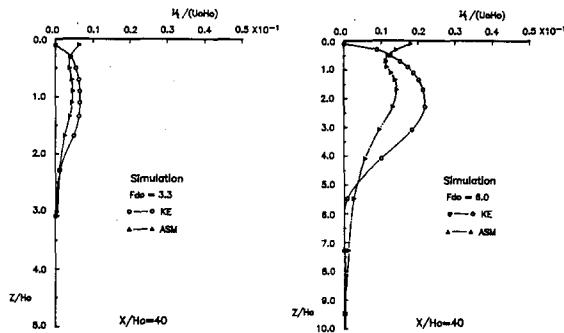


그림 11. 와동점성계수( $\nu_t$ )의 연직분포( $X/H_o=40$ )

전반적으로 작은 것을 알 수 있다. 와동점성계수의 값이 크다는 것은 운동량의 연직방향수송이 크다는 것을 의미하며, 결과적으로 평균유속이 연직방향으로 과대 하게 된다.  $k-\epsilon$ 모형에서는 와동점성계수의 값이 난류에너지  $k$ 와 점성소산율  $\epsilon$ 의 두개의 스칼라량에 의해서만 산출되기 때문에 방향성이 전혀 고려되지 않음으로 인해, 이러한 결과를 초래한 것으로 생각된다. 그에 반해 代數應力모형(ASM)에 의한 와동점성계수의 값은  $k-\epsilon$ 모형에 의한 결과보다 전반적으로 작을 뿐만 아니라, 밀도 Froude수가 감소함에 따라  $\nu_t$ 의 값이 0에 접근하는 수심이 작아지고 있음을 알 수 있다. 그 결과 연직방향으로의 운동량수송이 억제되므로써 평균 유속분포가  $k-\epsilon$ 모형에 의한 결과와 비교하여 상당히 개선되어, 그림 3과 그림 5에 나타난 바와 같이 수리실험결과에 의한 분포형과 잘 일치하게 된 것으로 생각된다. 즉, 본 연구에서 적용된 代數應力모형(ASM)의 식(14)~(19)는 레이놀즈 응력의 산출을 위하여 부력경사를 통하여 성층효과를 고려한 영향이 와동점성계수의 연직분포에 반영되고 있음이 명료하게 보여지고 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 2차원 表層密度噴流의 동역학적 구조를 파악할 목적으로 2차원 비정수압 수치모형

과 고차원 난류모형인 代數應力모형(ASM)을 사용한 수치모형을 적용하여 中辻(1984)의 수리실험 결과와 비교함으로써 본 수치모형의 적용성에 대해 검증하였다. 또한 代數應力모형(ASM)에 의한 계산결과를 국소등방성 가정에 근거를 둔,  $k-\epsilon$ 모형에 의한 계산결과와 비교함으로써, 본 연구에서 개발된 수치모형과의 차이에 대하여 검토하였다. 본 연구에서 얻어진 중요한 결과를 정리하면 아래와 같다.

(1) 代數應力모형(ASM)을 이용하여 계산한 평균유속 및 평균부력의 유하방향변화는  $k-\epsilon$ 모형의 계산결과에 비해 월등히 개선되어 실험치와 매우 잘 일치하였다. 代數應力모형(ASM)에서는 부력에 의한 성층효과가 계산결과에 잘 반영되어, 평균 유속과 평균부력분포의 연직방향으로의 확산이 억제되고 있음이 명료하게 나타나 있다. 특히 하류방향으로 진행함에 따라 성층효과가 우세해지면, 부력의 영향이 탁월해지는 관계로 난류의 등방성을 전제로 한  $k-\epsilon$  모형의 한계성이 명료하게 나타나고 있음을 알 수 있었다. 따라서 2차원 表層密度噴流의 동역학적 구조를 파악하기 위해서는 난류의 이방성을 고려한 代數應力모형(ASM)을 사용한 경우 훨씬 개선된 결과를 얻을 수 있음이 확인되어, 代數應力모형(ASM)모형의 타당성이 입증되었다.

(2) 본 연구에서 적용된 代數應力모형(ASM)에 의한 레이놀즈 응력의 계산 결과가  $k-\epsilon$  모형의 결과보다 약간 개선되고 있으며, 레이놀즈 응력의 수리실험 결과에 대한 밀도Froude수에 따른 정성적인 경향을 잘 재현하였다.

(3) 난류모형에 의한 수치실험 결과는 밀도 Froude수가 클수록 즉, 부력에 비해 관성력이 큰 흐름일수록 와동점성계수  $\nu_t$ 의 값이 크게 되고, 밀도 Froude수가 클수록  $\nu_t$ 의 최대치가 나타나는 깊이가 증가하는 경향을 잘 재현하였다. 특히 본 연구에서 적용된 代數應力모형(ASM)은 레이놀즈 응력의 산출을 위해 부력구배항에 의한 성층효과를 고려한 영향이 와동점성계수의 연직분포에 반영되고 있음이 명료하게 보여지고 있음을 알 수 있었다.

그러나 본 연구에서 적용된 대수응력모형에서는

성층효과에 의해 밀도 Froude수가 증가함에 따라 부력 탁월영역에서 수표면 부근에서의 평균유속과 평균부력의 계산치와 실험치의 일치도가 약간 떨어지는 결과를 얻었다. 따라서 수표면의 존재에 의한 난류수송의 감소와 성층효과와의 관련성에 대한 물리적 이해와 더불어, 보다 고차원 난류모형의 개발을 앞으로의 연구과제로 남겨둔다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 1993년도 후반기 해외 Post-Doc. 연수의 연구 결과이며 동재단의 연수지원에 대해 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

- 김기홍 (1995). "대수용력모델에 의한 밀도류장의 해석에 관한 연구," 박사학위논문, 경상대학교.
- 최한기 (1991). "이차원 表層密度噴流에 관한 연구," 박사학위논문, 부산대학교.
- 허재영 (1993). "二次元密度場에서의 流動을 解析하기 위한 數値모델의 開發." 한국수문학회지, 제26권, 제4호, pp. 61-71.
- 中辻 啓二 (1984). "表層密度噴流의 混合機構と擴がりに関する基礎的研究," 博士學位論文, 大阪大學.
- 室田 明, 中辻 啓二, 藤崎 豊 (1989). "亂流モデル의 成層せん斷流への適用." 土木學會 第33回水理講演回論文集, pp. 583-588.
- 岩佐 義明, 井上 和也, 劉 樹坤, 何部 徹 (1983). "琵琶湖湖流의 三次元的解析." 京都大學防災研究所年報, 第26號, B-2, pp. 531-542.
- 岩佐 義朗, 細田 尙, 伊藤 邦展 (1987). "亂流モデルによる Buoyant Surface Jet の數値解析." 京都大學防災研究所年報, 第30號, B-2, pp. 583-595.
- 道奥 康治, 辻体 剛三, 宮体 仁志 (1993). "吹送密度流의 流動·混合特性." 水工學論文集, 第37卷, pp. 293-293.
- Celik, I., and Rodi, W (1984). "Simulation of free surface effects in turbulent channel flows." *Physico-Chem. Hydrodyn.*, Vol. 5, pp. 217-227.
- Gibson, M.M., and Launder, B.E. (1976). "On the calculation of horizontal turbulent free shear flows under gravitational influence." *J. Heat Transfer*, ASME, Ser. C98, pp. 81-87.
- McGuirk, J.J., and Papadimitriou, C. (1986). "A numerical study of the internal hydraulic jump." *Intl. Symp. on Buoyant Flows*, Athene, Greece, pp. 242-255.
- Patankar, S.V. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation Press.
- Patankar, S.V., and Spalding, D.B. (1972). "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows." *Intl. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787-1806.
- Paltel, V.C., Rodi, W., and Scheuerer, G. (1985). "Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows." *J. AIAA*, Vol. 23, No. 9, pp. 1308-1319.
- Paul, J.F., and Lick, W.J. (1974). "A numerical model for a three-dimensional, variable density jet." *Report FTAS/TR73-92*, School of Engineering, Case Western Reserve University.
- Rodi, W. (1976). "A new algebraic relation for calculating the Reynolds stress." *ZAMM56*, T219-221.
- Rodi, W. (1984). "Turbulence models and their application in hydraulics." A State of the Art Review, Institut für Hydromechanik University of Karlsruhe, Germany, pp. 14-46.
- Waldrop, W.R., and Farmer, R.C. (1974). "Three-dimensional computation of buoyant plumes." *J. Geophysical Research*, Vol. 79, No. 9, pp. 1269-1276.

〈접수: 1995년 12월 16일〉