

## 공간 및 시간준위 보간 특성곡선법의 비교연구

### A Comparative Study on Spatial and Temporal Line Interpolation of Characteristic Method

백 중 철\* · 배 덕 호\*\* · 허 준 행\*\*\* · 조 원 철\*\*\*\*  
Paik, Joongcheol · Bae, Deghyo · Heo, Junhaeng · Cho, Woncheol

#### Abstract

The subject research attempts to develop a new temporal interpolation scheme for the method of characteristics. The proposed three-point time-line Lagrange interpolation Reachback (3PR) method is a temporal quadratic interpolation scheme using the three grid points near the intersection between a characteristic line and a previous time-line. The accuracy of the 3PR method is compared with those of temporal and spatial interpolation schemes such as Reachback, Upwind, and quadratic spatial interpolation methods for two pure advection problems. The results show that on the aspects of the numerical damping and/or oscillation the temporal interpolation schemes are better than the spatial ones under the same interpolation order conditions. In addition, the proposed 3PR method improves the accuracy of Reachback method as well as it contains the merits of time-line interpolation schemes.

#### 요 지

특성곡선이 통과하는 인접 시간준위에서의 3개 격자점을 이용한 시간준위 Lagrange 보간기법을 개발하여, 기존의 시간준위 보간기법인 Reachback 기법과 두가지 공간 보간기법, 즉 Upwind 기법과 3개의 공간 격자점을 이용한 공간 2차 보간기법과 함께 두가지 형태의 오염원 이송문제에 각각 적용하므로써 공간 및 시간준위 보간기법에 의한 수치해의 정확도를 비교·분석하였다. 본 연구 결과에 의하면 동일한 차수의 보간기법을 비교할 경우, 공간보간 기법보다 시간 보간기법을 이용하면 수치분산 또는 수치진동이 적은 보다 정확한 수치해를 구할 수 있는 것으로 나타났다. 한편, 본 연구에서 제시한 기법은 기존 시간준위 보간기법에 의한 해의 장점을 포함하면서 정확도를 향상시킬 수 있는 것으로 나타났다.

\* 연세대학교 토목공학과 박사과정  
\*\* 연세대학교 산업기술연구소 선임연구원  
\*\*\* 연세대학교 토목공학과 조교수  
\*\*\*\* 연세대학교 토목공학과 교수

## 1. 서론

특성곡선법(method of characteristics, MOC)은 천이류(transient flow) 해석에 있어서 이론적, 물리적 타당성을 가진 방법으로 알려져 있으며, 수공학적 제반 문제들을 해석하기 위해서 부정류 방정식을 수치해석할 때 처음으로 이용된 방법중의 하나이다. MOC에는 특성곡선격자법(grid of characteristics, GC)과 특정시간간격(specified time interval, STI) 기법이 있다. 이중 정확해에 대한 보간근사해를 갖는 STI기법은 적용상의 이점 때문에 특성곡선법을 적용할 때 선호되고 있다(Lai, 1986). 전형적인 STI기법은 한쌍의 특성곡선이 사각형 격자위에 위치하게 되며, 각 계산 시간 단계의 격자점에서의 미지값은 변수의 보간에 의해서 구하게 된다(Hartree, 1952).

현재까지 계산 격자 내에서의 공간 및 시간준위(time line)에 대한 보간기법에 관한 연구가 많이 이루어졌다. 보간방법의 선택은 수치해의 정확도에 중요한 영향을 미친다. 지금까지 알려진 바로는 두 격자점에 의한 선형 보간은 수치해의 수치분산(numerical damping)을 크게 발생시킨다(Roach, 1976). 3개 격자점을 이용한 2차 보간(quadratic interpolation)을 이용한 기법은 보다 양호한 보존 특성을 가지고 있으나 상대적으로 큰 수치진동(numerical oscillation)을 발생시킨다(Baptista 등, 1984). 또한 4개 격자점을 이용한 3차 보간(cubic interpolation) 기법 보다는 2개 격자점에 의한 헤르미트 3차 보간(Hermite cubic interpolation) 기법에 의한 수치해가 보다 우수한 것으로 나타났다(Holly와 Preissmann, 1977). 또한, 보간 격자점을 거리방향에 대해서 외부(outward)로 확장한 기법에 대한 연구도 이루어졌다(Chang과 Richards, 1971; Vardy, 1977; Wiggert와 Sundquist, 1977). 한편 계산의 효율성을 고려하여 특성곡선법을 시간에 대해서 하나의 시간단계 이상 후방(backward)으로 확장하는 개념도 도입되었다(Streeter와 Wylie, 1967). Trikha(1977)는 다중관수로계 해석을 위해서 시간준위 보간기법을 도입하였으며, 그 후 시간준위에 대한 선형 보

간방법인 Reachback기법을 이용하여 관수로 흐름 및 개수로 흐름을 수치모의한 연구가 많이 이루어졌으며, 각 기법들은 그에 상응하는 장단점을 가지고 있다(Wylie, 1980; Goldberg와 Wylie, 1983; Lai, 1988).

본 연구에서는 특성곡선이 통과하는 인접 시간준위에서의 3개 격자점을 이용한 시간준위에 대한 보간(이하 3PR ; three points time line Lagrange interpolation Reachback) 기법을 이용하므로써, 국내에서는 잘 알려져 있지 않은 기존의 시간준위 선형 보간기법인 Reachback 기법에 의한 해의 정확도를 향상시켰다. 한편 공간에 대한 선형 보간기법인 Upwind 기법과 시간에 대한 선형 보간기법인 Reachback 기법 그리고 본 연구에서 제시한 3PR기법과 3개의 격자점을 이용한 공간 2차 보간(이하 3PQI, three point spatial quadratic interpolation)기법을 정확해가 존재하는 두가지 형태의 오염원 이송문제에 각각 적용하여 공간 및 시간준위 보간기법에 의한 수치해의 정확도를 비교·분석하였다.

## 2. 기본이론

1차원 흐름에서 완전히 혼합된 오염물질의 순수 이송(pure advection)은 다음식 (1)과 같이 나타내어 진다.

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

여기서,  $C(x,t)$ =농도,  $u(x,t)$ =시간중속 유속을 나타내며, 주어진 시간과 거리에서의 오염원의 농도(본 연구에서는  $\phi=C$ )는  $U=u(x,t)$ 라 할 때 식 (1)로부터 다음과 같이 간략하게 나타낼 수 있다.

$$\phi + U\phi_x = 0 \quad (2)$$

그림 1은 이송방정식 해석을 위한 시간 및 공간(temporal and spatial) Reachback 기법의 거리-시간에 대한 사각형 격자망을 나타낸다. 특성곡선은 계산시간( $t=t_{k+1}$ ) 단계에서의 격자점과 일치하

도록 위치시킨다. 물리적인 파의 전파속도(wave celerity)  $r(=dx/dt=u \pm c)$ 와 계산 전파속도(computational celerity)  $r(=\Delta x/\Delta t)$ 의 비는 Courant 수  $C_r=r/r$ 이다. 여기서  $r$ 는 물리적인 흐름조건에 의해서만 결정되며,  $r$ 은 선택한 격자의 구조와 크기에 의해서 결정된다.

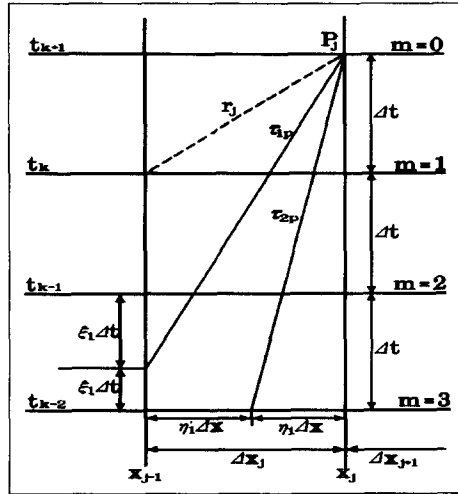


그림 1. Reachback 기법의 격자망도

시간 Reachback 기법은 특성곡선이 현 계산단계의 후방에 위치하게 되며 이에 상응하는 공간 보간기법보다 수치분산이 적게 발생한다. 공간 Reachback 기법은 비선형성이 강하지 않은 경우 현 계산시간단계에서 보다 이전 계산단계에서 실행하면 특성곡선과 격자망의 교차점이 인접 격자점과 보다 가까이 위치하므로 일반적으로 보다 정확한 해석결과를 보인다(Goldberg와 Wylie, 1983; Lai, 1988). Reachback 기법은  $C_r$ 에 따라서 특성곡선과 격자와의 교차점이 변하므로 Reachback 공간 보간기법과 Reachback 시간 보간기법을 선택적으로 이용한다. 본 수치해석에서는 시간 Reachback 기법에 의한 수치해석의 정확도를 고려하여 특성곡선이 시간준위 격자와 일치하지 않는 초기 계산단계에서만 공간 Reachback 기법을 이용하였고 나머지는 Reachback 시간 보간기법을 이용하였다. Reachback 기법에서 종속변수  $\phi$ 는 Courant 수의 조건에 따라서 인접 두 격자점을 이

용한 선형보간을 통해서 다음 식을 이용하여 구하게 된다(그림 1 참고).

$$\phi_1 = \xi_1 \phi_{j-1}^{k-m} + \xi_1' \phi_{j-1}^{k+1-m} \quad (3a)$$

$$\phi_2 = \eta_1 \phi_{j-1}^{k-m} + \eta_1' \phi_{j-1}^{k-m} \quad (3b)$$

여기서 식 (3a)는 시간에 대한 Reachback 기법, 식 (3b)는 공간에 대한 Reachback 기법이며,  $m$ =Reachback 수,  $\xi_1$ =시간보간에 대한 가중값,  $\eta_1$ =공간보간에 대한 가중값이며,  $\xi_1 + \xi_1' = 1$ ,  $\eta_1 + \eta_1' = 1$ 이다. 이들 보간에 대한 가중값은 다음과 같다.

$$\xi_1 = \frac{\Delta x_j / \Delta t}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{ip}} = \frac{r_i}{r_{ip}}, \quad \xi_1' = 1 - \xi_1 \quad (4a)$$

$$\eta_1 = \frac{dx/dt}{\Delta x_j / \Delta t} = \frac{mr_{2p}}{r_i}, \quad \eta_1' = 1 - \eta_1 \quad (4b)$$

Reachback 기법은  $C_r < 1$ 일 때  $C_r$ 의 역수의 소수점 이하부분이 영 또는 영에 가까운 값을 가지는 경우는 초기계산단계에서의 영향을 잘 제어하면 정확도에 근사한 수치해를 구할 수 있지만, 그렇지 않은 경우는 수치분산을 비교적 크게 발생시키는 단점이 있다(Goldberg와 Wylie, 1983; Wylie, 1980; Lai, 1986, 1988).

본 연구에서는  $\phi^{k+1}$  값을 계산하기 위해서 ( $j, k+1$ )지점을 통과하는 특성곡선이  $j-1$  공간격자선의 시간준위 격자와 교차하는 지점의 인접 3개 격자점을 이용한 Lagrange 보간기법에 의한 Reachback 기법인 3PR 기법을 개발하였다. 이 기법의 실제 적용에 있어서 3개 격자점에서의 기지값을 이용할 수 없는 초기 계산단계에서는 Reachback 시간준위 및 Reachback 공간준위 보간기법을 각각 이용하였으며, 3PR 기법의 해석을 위한 격자망도는 그림 2와 같다.

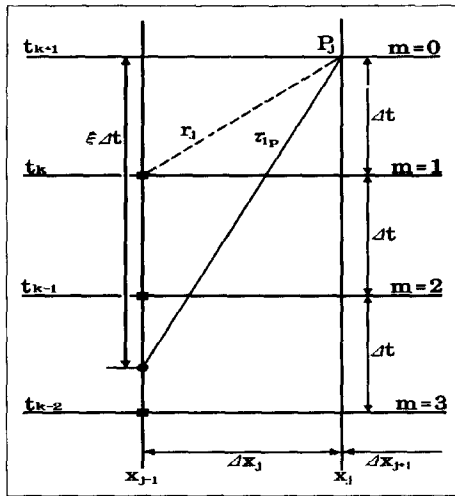


그림 2. 3개의 격자점을 이용한 Reachback 기법의 격자망도

여기서 구하고자 하는  $\phi^{k+1}$  값은 3PR 기법에 의한 인접 3개의 격자점에 해당하는 계산시간단계( $k-m+1, k-m, k-m-1$ )에서의  $\phi$  값을 이용하여 다음과 같이 구하게 된다.

$$\phi_j^{k+1} = a_0 \phi_{j-1}^{k-m+1} + a_1 \phi_{j-1}^{k-m} + a_2 \phi_{j-1}^{k-m-1} \quad (5)$$

여기서,

$$a_i = \prod_{j=0}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad i=0, 1, 2 \quad (6)$$

윗식에서  $a_i$ 는  $x$ 에 대한 Lagrange 보간다항식 계수이며(Carnahan 등, 1969),  $x$ 는 계산지점의 특성곡선이 인접격자와 교차하는 지점(그림 2에서 원,  $\bullet$ )에 해당하는 시간  $t_{k+1}-\xi \Delta t$ 를 나타내며,  $x_i$ 는 Lagrange보간에서 사용되는 3개의 격자점(그림 2에서 사각형,  $\blacksquare$ )의 위치에 해당하는 시간을 나타낸다.

### 3. 기법의 적용

본 연구에서는 시간에 대한 선형 보간기법인 Reachback 기법과 공간에 대한 선형 보간기법인 Upwind 기법 그리고 본 연구에서 제시한 3PR 기법과 공간 2차보간 기법인 3PQI 기법을 Gauss형 농도분포와 진행파형(advancing front) 농도분포의 이송문제에 각각 적용하여, 각 기법에 의한 수치해와 정확해를 비교·분석하므로써 검증을 실시하였다.

#### 3.1 초기조건 및 경계조건

먼저 균일한 폭을 갖는 긴 수로에서 Gauss형 농도분포의 이송 문제에 적용하였으며, 초기조건은 다음 식 (7)과 같으며(Toda와 Holly, 1986), 상류단 경계조건은  $C(0, t)=0$ 으로 하였다.

$$C(x, 0) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_0 t_0}} \exp\left[-\frac{(x-U_0 t_0)^2}{4D_0 t_0}\right] \quad (7)$$

식 (7)은 유속  $U_0$ , 종확산계수  $D_0$ 로 일정한 흐름에 단위 흐름당 질량  $M$ 이  $x=0$ 에서 순간적으로 방류되어  $t_0$  시간이 경과한 후의 농도분포로서  $x_0 = U_0 t_0$ 에서 첨두값을 갖는 Gauss형 분포를 나타낸 것이다. 식 (7)에서  $M=3000 \text{ kg/m}^2$ ,  $U_0=0.5 \text{ m/s}$ ,  $D_0=20 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $t_0=4000 \text{ sec}$ 로 하여 산정한 결과를  $\Delta x=200 \text{ m}$ 인 각 격자점에서의 초기농도치로 부과하였다.

두번째 적용은 진행파형(advancing front)의 이송 문제로, 초기조건 산정식은 다음식 (8)과 같이 주어진다(Toda와 Holly, 1986).

$$C(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x-U_0 t_0}{2\sqrt{D_0 t_0}}\right) + \exp\left(\frac{U_0 t_0}{D_0}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x+U_0 t_0}{2\sqrt{D_0 t_0}}\right) \right\} \quad (8)$$

여기서 유속  $U_0=0.5 \text{ m/s}$ , 종확산계수  $D_0=10 \text{ m}^2/\text{s}$  그리고  $t_0=4000$  초를 조건으로 계산한 결과를  $\Delta x=200 \text{ m}$ 인 각 격자점에서의 초기치로 부과하였으며,  $x=0$ 인 상류단 경계조건으로는  $C(0, t)=1.0$ 으로 부과하였다.

### 3.2 결과분석

본 연구에서는 Noye가 제시한 7가지 무차원 척도  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ 을 이용하여 각 수치 기법의 정확도를 분석하였으며 각각 다음과 같이 정의된다(Noye, 1987; 전경수와 이길성, 1994).

$$E_1 = |C - CE|_{\max} / CE_{\max} \quad (9)$$

$$E_2 = \sum_{i=1}^{I_{\max}} |C_i - CE_i| / \sum_{i=1}^{I_{\max}} CE_i \quad (10)$$

$$E_3 = (C_{\max} - CE_{\max}) / CE_{\max} \quad (11)$$

$$E_4 = \text{Min}(C_i) CE_{\max} \quad (12)$$

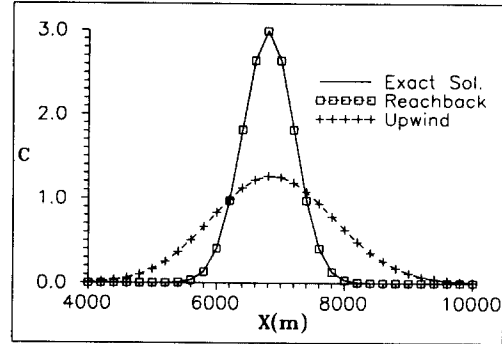
$$E_5 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{I_{\max}} (C_i - |C_i|) / \sum_{i=1}^{I_{\max}} CE_i \quad (13)$$

$$E_6 = (X_p - XE_p) / \Delta x \quad (14)$$

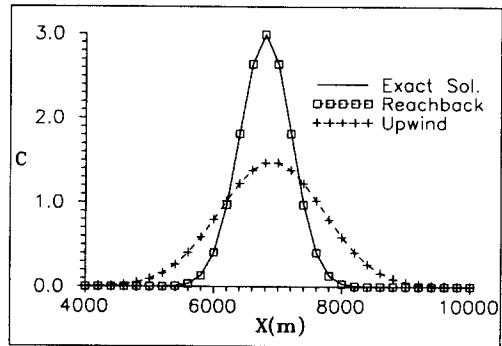
$$E_7 = \left( \sum_{i=1}^{I_{\max}} C_i / \sum_{i=1}^{I_{\max}} CE_i \right) - 1 \quad (15)$$

여기서  $C$ 와  $CE$ 는 각 기법에 의한 수치해와 정확해를 나타내며,  $X_p$ 와  $XE_p$ 는 수치해와 정확해의 최대농도 발생지점을 나타내며,  $I_{\max}$ 는 거리방향 격자수를 나타낸다.  $E_1$ 은 주어진 시간에서 가장 큰 오차를 그리고  $E_2$ 는 일반화된 평균오차를 나타내는 것으로서 전반적인 정확도에 대한 척도이며,  $E_3$ 는 수치분산 정도,  $E_4$ 와  $E_5$ 는 수치진동의 정도를 평가하는 척도이다. 그리고  $E_6$ 은 최대농도 발생지점의 오차를 각각 평가하는 척도이며,  $E_7$ 은 질량보존의 오차를 평가하는 척도이다.

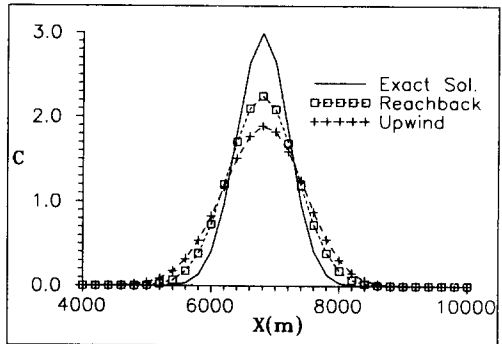
그림 3은 Gauss형 농도분포의 초기조건에 대해서  $U=0.5$  m/sec,  $\Delta x=200$ m,  $\Delta t=100, 200, 300$ 초로 한 경우, 즉 Courant 수가 0.25, 0.50, 0.75인 경우 Reachback 기법과 Upwind 기법을 이용하여  $t=9,600$  sec에서 계산한 결과를 도시한 것이다. 그림 3에서 나타난 것처럼 Upwind 기법은 모든 경우에 있어서 큰 수치분산(numerical



(a) Cr=0.25



(b) Cr=0.5



(c) Cr=0.75

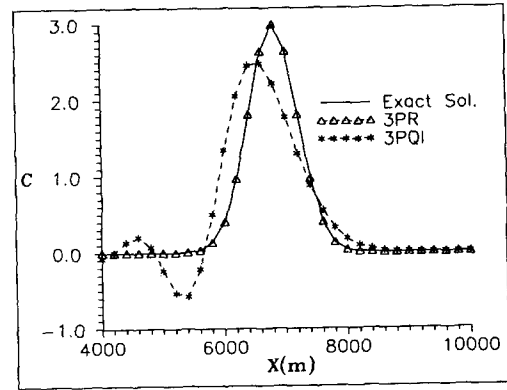
그림 3. Gauss형 분포에 대한 Reachback 및 Upwind 기법에 의한 수치해와 해석해의 비교

dissipation, damping)을 나타내며, Courant 수가 증가함에 따라 수치분산의 양이 감소함을 알 수 있다. 기존 Reachback 기법은 Courant 수가 0.25

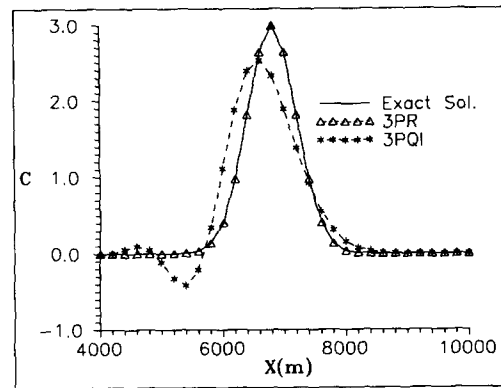
와 0.5인 경우 정확해와 거의 비슷한 결과를 보이는 한편, Courant 수가 0.75인 경우 비교적 큰 수치분산을 보이고 있지만, Upwind 기법에 의한 수치해보다 정확도가 향상된 결과를 나타냈다. 즉, 기존의 Reachback 기법은 Courant 수의 역수의 소수점 이하 부분이 0 또는 0에 가까운 경우는 정확해에 근사한 결과를 보이지만 그렇지 않은 경우 어느 정도의 수치분산을 동반함을 나타내고 있다. 한편 Reachback 기법과 Upwind 기법 모두 선형 보간기법이므로 수치진동(numerical oscillation, wiggle)은 보이지 않고 있다.

그림 4는 그림 3과 동일한 조건하에서 3PQI 기법과 본 연구에서 제시한 3PR 기법을 이용하여 계산한 결과를 도시한 것이다. 그림 4에서 나타난 것처럼 3PQI 기법은 농도치의 이송이 전반적으로 지체되며, 큰 수치진동을 발생시키는 것으로 나타났다. 이러한 이송지체와 수치진동은 Courant 수가 증가함에 따라 감소하는 것으로 나타났다. 이에 비해 3PR 기법에 의한 수치해는 Courant 수가 0.25와 0.5인 경우 정확해와 거의 동일한 결과를 보이고 있으며, Courant 수가 0.75인 경우 수치분산을 발생시키지만, 3PQI 기법에 의한 수치해와 비교해 보면 수치진동은 거의 발생하지 않으며 수치분산도 현저히 감소한 양호한 결과를 보이고 있다. 한편, 그림 3과 그림 4에서 알 수 있듯이 3PR 기법에 의한 수치해는 Courant 수가 0.25와 0.5인 경우 기존 Reachback 기법에 의한 수치해와 동일한 우수한 결과를 보이고 있으며, Courant 수가 0.75인 경우 기존 Reachback 기법에 의한 수치해와 비교해 보면 수치분산이 현저히 감소한 결과를 보이고 있다.

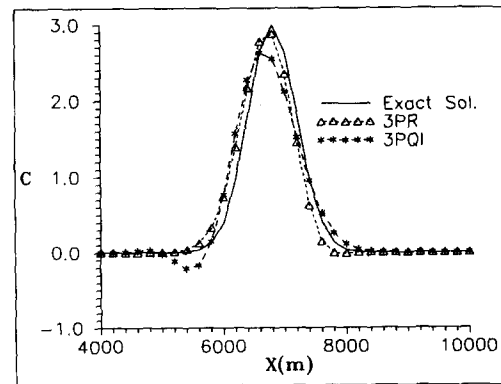
표 1은 그림 3과 그림 4에서 설명한 각 기법을 이용하여 일정 계산시간 간격으로 반복계산을 수행했을 때 총계산이 9600 초와 일치하는 각각의 Courant 수에 대해서 수치해석한 결과의 정확도를 분석한 결과이다. 표 1에 나타난 것처럼 Courant 수가 0.05, 0.10, 0.20, 0.25, 0.5인 경우, 즉 Courant 수의 역수의 소수점 이하 부분이 0인 경우 시간준위 보간기법인 Reachback 기법과 3PR 기법에 의한 수치해는 수치분산과 수치진동이 없는 정확해와 거의 동일한 계산결과를 보이고 있으며,



(a)  $Cr=0.25$



(b)  $Cr=0.5$



(c)  $Cr=0.75$

그림 4. Gauss형 분포에 대한 3PR 및 3PQI 기법에 의한 수치해와 해석해의 비교

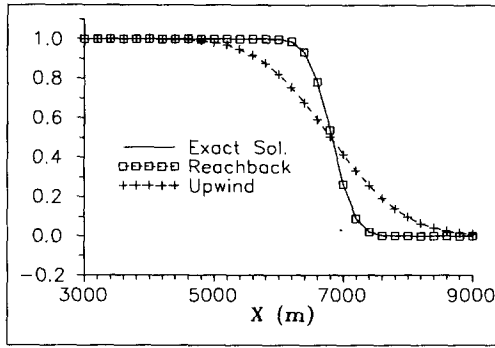
그렇지 않은 경우, 즉 대표적으로 Courant 수가 0.15, 0.30, 0.40, 0.60, 0.75, 0.80인 경우는 동일한 차수의 공간 보간기법과 비교해 보면 수치분산

과 수치진동이 감소한 보다 정확한 결과를 보이고 있다. 본 연구에서 제시한 3PR 기법은 3PQI 기법에 비해 모든 조건에서 보다 정확한 수치해석 결과를 보이고 있으며, 3PQI 기법을 이용했을 경우 발생하는 최대농도치 이송의 지체현상도 보이고 있지 않다. 한편 3PR 기법을 이용했을 경우 Courant 수의 역수가 정수가 되지 않는 경우 미소한 수치진동현상은 동반하지만, 기존 Reachback 기법에 비해 정확도가 향상된 것으로 나타났다. 따라서 실제

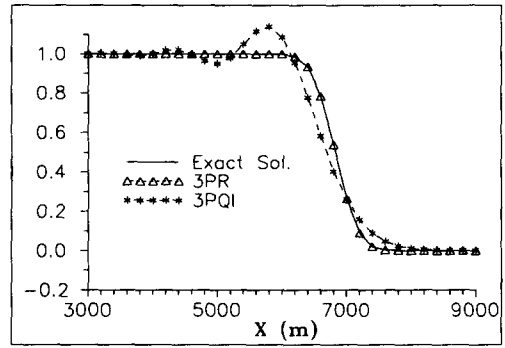
부정류 및 부등류 문제에 적용할 경우, 즉 계산지점마다 유속이 변하는 경우는 이 유속변화에 따라서 계산시간간격 및 계산지점간격을 이용하여 Courant 수를 일정하게 유지하는 것이 상당히 비효율적이며 거의 불가능하다 할 수 있다. 이와 같은 문제에 본 연구에서 제시한 3PR기법을 적용할 경우, 보다 우수한 수치해석을 할 수 있을 것으로 나타났다.

표 1. Gauss형 분포의 이송에 대한 계산결과의 오차 비교

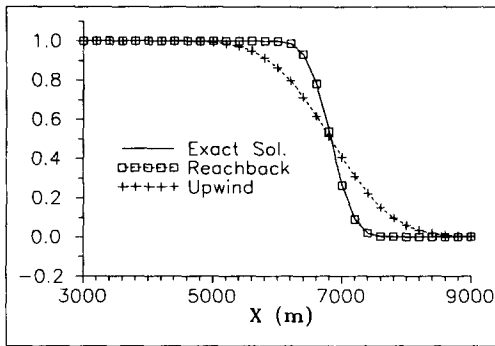
기 법	Courant 수	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
Upwind	0.05	0.61433	0.84924	-0.61433	0	0	0	0.00000
	0.10	0.60544	0.83113	-0.60544	0	0	0	-0.00000
	0.15	0.59589	0.81245	-0.59589	0	0	0	-0.00000
	0.20	0.58562	0.79441	-0.58562	0	0	0	-0.00000
	0.25	0.57453	0.77504	-0.57453	0	0	0	-0.00000
	0.30	0.56249	0.75418	-0.56249	0	0	0	0.00000
	0.40	0.53497	0.70709	-0.53497	0	0	0	-0.00000
	0.50	0.50147	0.65093	-0.50147	0	0	0	-0.00000
	0.60	0.45940	0.58234	-0.45940	0	0	0	-0.00000
	0.75	0.36935	0.44333	-0.36935	0	0	0	-0.00000
0.80	0.32733	0.38241	-0.32733	0	0	0	0.00000	
Reachback	0.05	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.10	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.15	0.03010	0.02881	-0.03010	0	0	0	-0.00000
	0.20	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.25	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.30	0.05889	0.05690	-0.05890	0	0	0	-0.00000
	0.40	0.10096	0.10076	-0.10096	0	0	0	-0.00000
	0.50	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.60	0.16969	0.17822	-0.13969	0	0	0	-0.00000
	0.75	0.21065	0.22604	-0.21065	-0.00009	-0.00003	0	-0.00000
0.80	0.19174	0.20197	-0.19174	-0.00041	-0.00018	0	0.00000	
3PQI	0.05	0.39899	0.65553	-0.16205	-0.23631	-0.15367	-2	-0.00001
	0.10	0.39082	0.62777	-0.16680	-0.22431	-0.14163	-2	-0.00000
	0.15	0.38226	0.60177	-0.17124	-0.21300	-0.13101	-2	-0.00000
	0.20	0.37323	0.57667	-0.17178	-0.20223	-0.12140	-1	-0.00000
	0.25	0.36365	0.55228	-0.17024	-0.19184	-0.11270	-1	-0.00000
	0.30	0.35341	0.52775	-0.16801	-0.18167	-0.10451	-1	0.00000
	0.40	0.33043	0.47664	-0.16156	-0.16125	-0.08896	-1	0.00000
	0.50	0.30291	0.42111	-0.15259	-0.13949	-0.07397	-1	-0.00000
	0.60	0.26891	0.35892	-0.14135	-0.11497	-0.05889	-1	-0.00000
	0.75	0.19933	0.24758	-0.12175	-0.07093	-0.03504	-1	-0.00000
0.80	0.16913	0.20783	-0.11537	-0.05454	-0.02683	-1	0.00000	
3PR	0.05	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.10	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.15	0.01400	0.01974	-0.00601	0	0	0	-0.00000
	0.20	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.25	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.30	0.02502	0.03216	-0.01357	-0.00028	-0.00011	0	0.00000
	0.40	0.03798	0.05614	-0.00676	0	0	0	-0.00000
	0.50	0.00000	0.00000	0.00000	0	0	0	-0.00000
	0.60	0.09257	0.13409	-0.02628	-0.00215	-0.00064	0	-0.00000
	0.75	0.14005	0.20929	-0.03907	-0.00492	-0.00162	0	0.00000
0.80	0.15939	0.24028	-0.04374	-0.00338	-0.00107	0	0.00000	



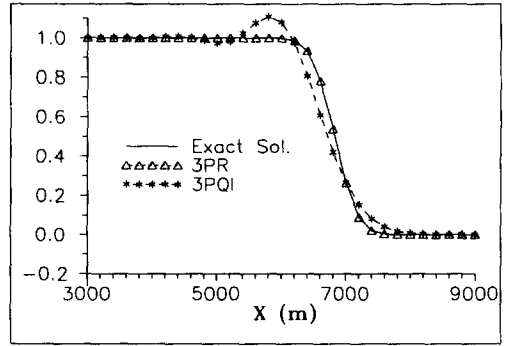
(a) Cr=0.25



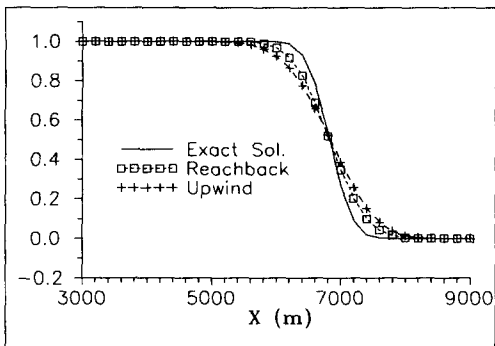
(a) Cr=0.25



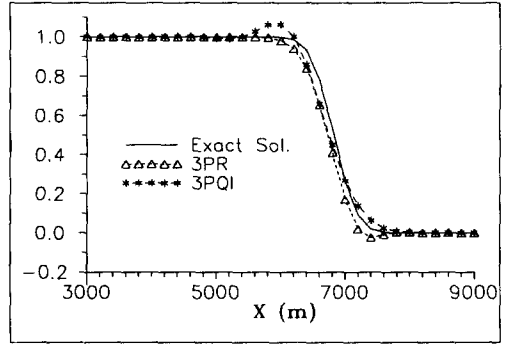
(b) Cr=0.5



(b) Cr=0.5



(c) Cr=0.75



(c) Cr=0.75

그림 5. 진행파형의 이송에 대한 Reachback 및 Upwind 기법에 의한 수치해와 해석해의 비교

그림 6. 진행파형의 이송에 대한 3PR 및 3PQI 기법에 의한 수치해와 해석해의 비교

그림 5는 진행파형(advancing front)의 초기조건에 대해서  $U=0.5$  m/sec,  $\Delta x=200$  m,  $\Delta t=100$ , 200, 300초로 한 경우, 즉 Courant 수가 0.25, 0.

5, 0.75인 경우 Reachback 기법과 Upwind 기법을 이용하여  $t=9,600$  sec에서 계산한 결과를 도시한 것이다. Gauss형 농도분포의 이송에서 나타난



표 2. 진행파형(advancing front)의 이송에 대한 계산결과의 오차 비교

기 법	Courant 수	E1	E2	E3	E4	E5
Upwind	0.25	0.25611	0.07058	0.0	0	0
	0.50	0.21950	0.05365	0.0	0	0
	0.75	0.16812	0.03241	0.0	0	0
Reachback	0.25	0.00000	0.00000	0.0	0	0
	0.50	0.00000	0.00000	0.0	0	0
	0.75	0.11212	0.01940	0.0	0	0
3PQI	0.25	0.20088	0.03798	0.13863	0	0
	0.50	0.17268	0.02847	0.10818	0	0
	0.75	0.12102	0.01737	0.06339	0	0
3PR	0.25	0.00000	0.00000	0.0	0	0
	0.50	0.00000	0.00000	0.0	0	0
	0.75	0.12679	0.01835	0.0	-0.02431	-0.00100

것처럼 Upwind 기법은 모든 경우에 있어서 큰 수치분산을 나타내며, Courant 수가 증가함에 따라 수치분산의 양은 감소하고 있다. 기존 Reachback 기법은 Courant 수가 0.25와 0.5인 경우 정확해와 거의 비슷한 우수한 결과를 보이는 한편, Courant 수가 0.75인 경우 비교적 큰 수치분산을 보이고 있지만, Upwind 기법에 의한 수치해보다 정확도가 향상된 결과를 나타냈다.

그림 6은 그림 5에서와 동일한 조건하에서 3PQI 기법과 본 연구에서 제시한 3PR 기법을 이용하여 계산한 결과를 도시한 것이다. 그림 6에서도 Gauss형 분포의 선형이송 문제에 대한 해석결과와 유사한 결과를 나타내고 있음을 알 수 있다. 즉, 3PQI 기법에 의한 수치해는 Courant 수가 증가함에 따라 감소하기는 하지만 비교적 큰 수치진동을 발생시키고 있으며, 최대농도치 이송의 미소한 지체현상을 보이고 있다. 3PR 기법에 의한 수치해는 Courant 수가 0.25와 0.5인 경우 정확해와 거의 동일한 우수한 결과를 보이고 있으며, Courant 수가 0.75인 경우 수치분산을 발생시키지만, 3PQI 기법에 의한 수치해와 비교해 보면 수치진동이 보다 적은 비교적 양호한 결과를 보이고 있다. 한편 그림 6(c)에서 알 수 있듯이 Courant 수가 0.75인 경우 3PR 기법도 3PQI 기법과 함께 2차 보간기법에서 전형적으로 나타나는 최대농도치 이송의 미소한 지체현상을 보이는 것으로 나타났다.

표 2는 그림 5와 그림 6에서 설명한 각 기법에 의한 수치해의 정확도를 분석한 결과로서 Gauss형 분포의 선형 이송문제에 대한 해석결과와 유사한 결과를 나타내고 있음을 알 수 있다. 표 2에 나

타난 것처럼 Courant 수가 0.25와 0.5인 경우 시간준위 보간기법인 Reachback 기법과 3PR 기법에 의한 수치해는 수치분산과 수치진동이 없는 정확해와 거의 동일한 계산결과를 보이고 있으며, 그렇지 않은 경우도 동일한 차수의 공간 보간기법과 비교해 보면 수치분산과 수치진동이 감소한 보다 정확한 결과를 보이고 있다. 그리고 3PR 기법은 Courant 수가 0.75인 경우 최대농도치의 차이는 없으며, 3PQI 기법에 비해 전반적인 정확도의 향상은 보이고 있지 않으나, 수치진동의 양이 감소한 것으로 나타났다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 공간에 대한 선형 보간기법인 Upwind 기법과 시간에 대한 선형 보간기법인 Reachback 기법 그리고 본 연구에서 제시한 3PR 기법과 3개의 격자점을 이용한 공간 2차 보간기법인 3PQI 기법을 Gauss형 농도분포와 진행파형 농도분포의 순수 이송문제에 각각 적용해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 두가지 형태의 농도분포 이송문제에 대한 적용 결과 모두, 선형보간의 경우는 공간 보간기법 보다 시간 보간기법을 이용할 경우가 수치분산이 적은 수치해를 구할 수 있었으며, 2차 보간기법의 경우도 3PR 기법을 이용하면 3PQI 기법에 의한 수치해보다 수치분산과 수치진동이 현저히 적은 수치해를 구할 수 있는 것으로 나타났다. 즉 동일한 차수의 보간기법인 경우 공간 보간 보다는 시간보간기법이 우수한 정확도를 보이는 것으로 나타났다. 그리고 본 연구에서 제시한

3PR 기법은 Courant 수의 역수의 소수점 이하 부분이 0 또는 0에 가까운 경우 정확해와 거의 동일한 해석해를 구할 수 있는 기존의 시간 Reachback 기법의 장점을 포함하면서, 그 외의 Courant 수에 대해서도 수치해의 정확도를 향상시킬 수 있는 것으로 나타났다. 따라서 실제 자연하천에 적용시 부정류 및 부등류 문제를 보다 정확하게 해석할 수 있는 것으로 나타났다.

### 참 고 문 헌

- 전경수, 이길성 (1994). “중확산 방정식에 대한 Eulerian-Lagrangian 연산자 분리방법.” 대한토목학회논문집, 제14권, 제1호, pp. 131~141.
- Baptista, A.M., Adams, E.E., and Stolzenbach, K. D. (1984). “Eulerian-Lagrangian analysis of pollutant transport in shallow water.” *Report No. 296*, Dept. Civil Eng. MIT.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969). *Applied numerical methods*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Chang, F.F.M., and Richards, D.L. (1971). “Deposition of sediment in transient flow.” *J. Hyd. Div.*, ASCE, Vol. 97, No. HY5, pp. 837-849.
- Goldberg, D.E., and Wylie, E.B. (1983). “Characteristics method using time-line interpolations.” *J. Hyd. Engrg.*, ASCE, Vol. 109, No. 5, pp. 670-683.
- Hartree, D.R. (1952). “Some practical methods of using characteristics in the calculation of non-steady compressible flow.” *Los Alamos Rep. LA-HU-1*.
- Holly, F.M. Jr., and Preissmann, A. (1977). “Accurate calculation of transport in two dimension.” *J. Hyd. Engrg.*, ASCE, Vol. 103, No. HY11, pp. 1259-1277.
- Lai, C. (1986). “Numerical modelling of unsteady open channel flow.” *Advances in Hydroscience*, V.T. Chow and B.C. Yen, eds., Vol. 14, Academic Press, Orlando, Fla., pp. 161-333.
- Lai, C. (1988). “Comprehensive method of characteristics models for flow simulation.” *J. Hyd. Div.*, ASCE, Vol. 114, No. 9, pp. 1074-1097.
- Noye, J. (1987). “Numerical methods for solving the transport equation.” *Numerical modelling : Applications to marine systems*, J. Noye, ed., Elsevier, Amsterdam, pp. 195-229.
- Roach, P.J. (1976). *Computational fluid dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M.
- Streeter, V.L., and Wylie, E.B. (1967). *Hydraulic transients*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y.
- Toda, K., and Holly, F.M. (1986). “Hybrid numerical method for linear advection-diffusion.” *Report*, IIHR, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.
- Trikha, A.K. (1977). “Variable time steps for simulating transient liquid flow by method of characteristics.” *J. Fluids Engrg.*, ASME, Vol. 99, No. 1, pp. 259-261.
- Vardy, A.E. (1977). “On the use of the method of characteristics for the solution of unsteady flows in networks.” *Proc., 2nd. Int. Conf. on Pressure Surges*, British Hydromech. Res. Assoc., Fluid Engineering, Cranfield, England, H2, pp. 15-30.
- Wiggert, D.C., and Sundquist, M.J. (1977). “Fixed-grid characteristics for pipeline transients.” *J. Hyd. Div.*, ASCE, Vol 103, No. HY12, pp. 1403-1416.
- Wylie, E.B. (1980). “Inaccuracies in the characteristics method.” *Proc., 28th, Annual hydraulic Spec. Conf.*, ASCE, Chicago, Ill., pp. 165-176.

〈집수 : 1995년 8월 23일〉