

〈論 文〉

조화진동유동을 포함한 직선파이프계의 혼돈운동 연구

Chaotic Vibration of a Straight Pipe Conveying Oscillatory Flow

박철희* · 홍성철** · 정옥***
Chul-Hui Pak, Sung-Chul Hong and Wook Jung

〈1996년 2월 29일 접수 ; 1996년 4월 4일 심사완료〉

Key Words : Oscillatory Flow (진동유동), Averaging Method (평균방법), Chaotic Motion (혼돈운동), Homoclinic Orbit (호모크리닉궤도), Melnikov Method (Melnikov 방법)

ABSTRACT

In this paper chaotic motions of a straight pipe conveying oscillatory flow and being subjected to external forces such as earthquake are theoretically investigated. The nonlinear partial differential equation of motion is derived by Newton's method. In this equation, the nonlinear curvature of the pipe and the thermal expansion effects are contained. The nonlinear ordinary differential equation transformed from that partial differential equation is a type of Hill's equations, which have the parametric and external excitation term. This original system is transferred to the averaged system by the averaging theory. Bifurcation curves of chaotic motion of the piping system are obtained in the general case of the frequency ratio, n by applying Melnikov's method. Numerical simulations are performed to demonstrate theoretical results and show strange attractors of the chaotic motion.

1. 서 론

유체가 흐르는 파이프계에 대한 연구^(1~11)들은 대체로 선형진동 이론과 유체가 흐를 때 파이프에 작용하는 힘을 고려함으로써 파이프 구조물의 유체유발진동 및 안정성을 다루고 있다. 특히, 유체가 일정한 유속을 가지고 흐르는 경우에 관한 연구^(1~6)들에서는 파이프의 지지방법에 따라서 좌굴(static instability)과 플러터(dynamic instability) 형태의 불안정의 존재가 증명되었고, 유체가 맥동하는 경우^(7~11)에는 매개변수 공진(parametric resonance)이 존재한다는 것이 Chen⁽⁷⁾과 Päidoussis⁽⁸⁾ 그리고 Pak, Lee, Hong^(9~11) 등의 연구에서 밝혀졌다.

파이프계에서의 비선형성을 고려한 연구는 최근에 Päidoussis, Li와 Rand⁽¹⁴⁾에 의해 수행되어졌다. 그들은 외팔보 형태의 파이프에서 호프(Hopf) 또는 주기배가(periodic doubling)등의 분기현상을 통하여 혼돈이 일어남을 이론적으로 보이고 실험을 통하여 입증하였다. 그러나 비선형을 고려한 연구는 최근에 와서야 이루어지고 있으며, 그 실적은 매우 미진하다. 그리고 그 연구내용은 직선파이프에 일정한 유체가 흐르는 경우에 한정되어 있으며 혼돈운동의 존재를 이론적으로 완벽하게 해결하고 있지는 않다.

1963년 Melnikov⁽¹⁵⁾는 혼돈운동이 발생함을 나타낼 수 있는 호모크리닉 궤도교차(transverse homoclinic orbit)의 존재를 섭동법(perturbation method)에 의해 처음으로 제안하였는데 이는 혼돈운동의 존재를 완벽하게 이론적으로 접근할 수 있는 방법으로 알려져 있다. 또한 Holmes⁽¹⁶⁾는 약비선형계(weakly nonlinear system)에서 평균방법(averaging method)을 적용함으로써 호모크리닉 궤도교차가 존

*정회원, 인하대학교 기계공학과

**정회원, 한라공업전문대학 기계과

***인하대학교 기계공학과

재함을 보이고, 혼돈운동(chaotic motion)이 발생하는 Smale의 편자(Smale horseshoe)가 위상공간(phase space)상에 나타남을 보였다. 이를 바탕으로 Yagasaki^(17,18)는 매개변수 가진(parametric excitation)과 외부가진(external excitation)을 받는 1자유도 약비선형계를 모델로 평균방법에 의하여 근사적 분계(nearly integral system)을 구성하고 이에 대하여 Melnikov방법을 처음으로 사용함으로써 혼돈운동이 발생함을 이론적으로 규명하고 있다.

현재까지의 연구 논문들을 살펴볼때 실제 현장에서 많이 존재하는 펌프와 밸브에 의하여 맥동유체가 흐르는 파이프계의 비선형거동에 관한 연구는 발표되지 않고 있다. 따라서 본 연구에서는 펌프와 밸브에 의하여 공급되는 고온의 맥동유체가 흐르는 파이프계가 파이프를 지지하고 있는 hanger나 지지대를 통하여 지진이나 혹은 외부간진력을 받을때, 파이프계의 비선형 거동을 호모클리닉 궤도(homoclinic orbit)의 존재 및 Melnikov방법을 통하여 혼돈운동의 존재여부를 파악하고자 한다. 이렇게 함으로써 맥동유체가 흐르는 파이프계의 비선형 거동에 대한 분기(bifurcation) 및 혼돈운동을 이론적으로 규명하므로써, 산업플랜트 등에 많이 사용되는 파이프계에서 실제로 발생하는 진동 메카니즘(mechanism)을 규명한다.

2. 운동방정식

2.1 운동방정식의 유도

조화 진동유동을 포함한 파이프계의 운동방정식을 유도하기 위하여, Fig. 1과 같이 길이가 l , 단면적이 A , 그리고 단위길이당 질량이 m_p 인 파이프계를 모델링하였다. 이 파이프계는 열 팽창에 의하여 압축력을 받고 있으며 지지부가 운동을 하는 형태이다. 이 때, 지지부의 변위는 v_g 이고, 지지부에 상대적인 파이프의 변위는 v 이다. 따라서 파이프의 총 변위는 $w = v + v_g$ 가 된다.

한편, 운동 방정식을 유도하는데 다음과 같은 가정을 하였다.

- ① 내부 유체는 비압축성이다.
- ② 유체의 속도 분포는 단면에서 균일하다.
- ③ 파이프는 평면내에서 운동을 하며 수직 방향의 변위만 갖는다.
- ④ 회전 관성 및 전단에 의한 변형은 무시한다.

Fig. 2는 변형된 파이프의 형상을 나타낸다. 이때, r 은 위치벡터로 변형 전의 한 점이 수직으로 w 만큼

변형한 후에 놓이는 공간 상의 위치를 나타낸다. t 와 n 은 각각 이 점의 접선과 법선 단위벡터이고, ds 와 dx 는 변형후와 변형전 파이프 미소요소의 길이고, 위치벡터는 다음 식으로 표현된다.

$$r(s, t) = xi i + w(x, t) k \tag{1}$$

이 때, 접선 벡터 t 는 위치 벡터 r 을 미분함으로써 식 (2)와 같게 된다.

$$t = \frac{\partial r}{\partial s} = [i + w' k] \frac{dx}{ds} \tag{2}$$

여기서 $()' = \partial/\partial x$. 또한 식 (2)에서 dx/ds 는 다음의 관계식으로 근사적으로 유도된다.

$$\left| \frac{\partial r}{\partial s} \right| = \sqrt{1 + w'^2} \frac{dx}{ds} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{dx}{ds} = (1 + w'^2)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} w'^2$$

한편, 위치벡터 r 을 두 번 미분 함으로써, 곡률 κ 와 법선 벡터 n 을 유도할 수 있다. 위치 벡터를 두 번 미분하면,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} = \frac{1}{(1 + w'^2)^{3/2}} (-w' w'' i + w'' k) \tag{4}$$

가 되고, 곡률은 식 (4)의 크기로써, 다음과 같이 유도된다.

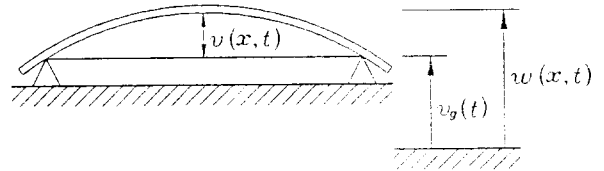


Fig. 1 The deflected piping system with moving supports

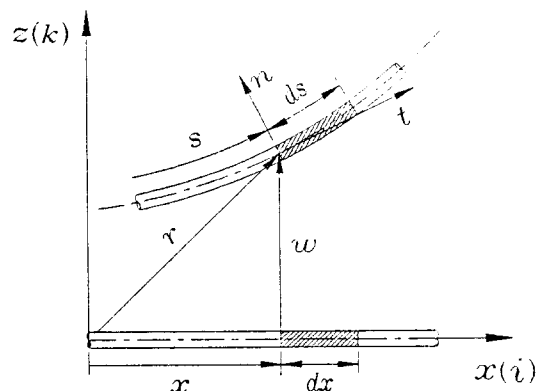


Fig. 2 The piping system in the deflected and undeformed position

$$x = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \cong w'' - \frac{3}{2}w'^2w'' \quad (5)$$

그리고, 식 (4)를 식 (5)로 나눔으로써 법선 벡터 n 은 아래와 같이 근사적으로 쓸 수 있다.

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+w'^2}}(-w' \mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$\cong (-w' + \frac{1}{2}w'^3) \mathbf{i} + (1 - \frac{1}{2}w'^2) \mathbf{k} \quad (6)$$

유체의 속도와 가속도를 유도하기 위하여 Fig. 3과 같이 변형전과 변형후의 파이프 내부를 흐르는 유체의 미소요소를 생각한다. Fig. 3에서 c 와 c^* 는 변형전과 변형후의 유체의 속도이고, A_f 와 A_f^* 는 변형전과 변형후의 유체의 단면적이다. 이때, 유체의 연속 조건을 사용하면 변형후 파이프내의 유체속도는 아래와 같이 표현된다.

$$c^* = \frac{A_f}{A_f^*} c = \frac{ds}{dx} c \quad (7)$$

그러므로, 유체의 속도 V_f 는

$$V_f = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) (x\mathbf{i} + w\mathbf{k}) \quad (8)$$

또한, 유체의 가속도 A_f 는

$$A_f = \frac{D^2\mathbf{r}}{Dt^2} = \frac{\partial c}{\partial t} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w \mathbf{k} \quad (9)$$

가 된다.

파이프계의 미소요소를 Fig. 4와 같이 파이프요소와 유체요소로 나누어 생각할 수 있다. 식 (9)에서 유도된 유체의 가속도를 이용하여 Fig. 4에 도시한

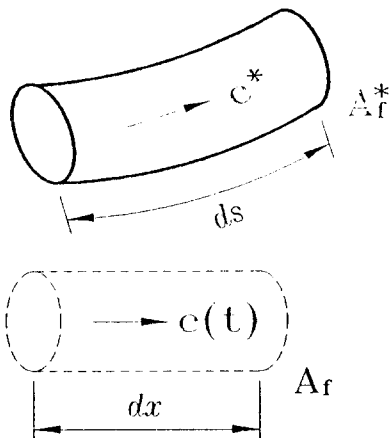


Fig. 3 The element of fluid in the deflected and undeflected form

파이프와 유체요소에 대한 평형방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial s} (V + T) ds + F + F_s = \rho_p A^* ds \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial s} ds - F - F_s = \rho_f A_f^* ds \frac{D^2 \mathbf{r}}{Dt^2} \quad (11)$$

여기서, V 는 전단력, T 는 인장력, F 는 파이프와 유체의 상호 작용력, F_s 는 마찰력, P 는 압력, ρ_p 와 ρ_f 는 파이프와 유체의 밀도이다. 식 (10)과 식 (11)로부터 F 와 F_s 를 소거하면

$$\frac{\partial}{\partial x} (V + T - P) = \rho_p A \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \rho_f A_f \frac{D^2 \mathbf{r}}{Dt^2} \quad (12)$$

가 된다. 식 (12)에서 각 항은 아래와 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$T = (T_0 + EA \frac{ds - dx}{dx}) t$$

$$\cong [T_0 + \frac{1}{2}(EA - T_0)w'^2] \mathbf{i}$$

$$+ [T_0 w' + \frac{1}{2}(EA - T_0)w'^3] \mathbf{k} \quad (13)$$

여기서 T_0 는 파이프에 작용하는 초기 인장력이다. 전단력 V 는

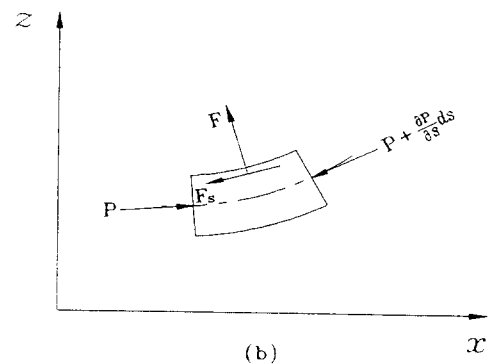
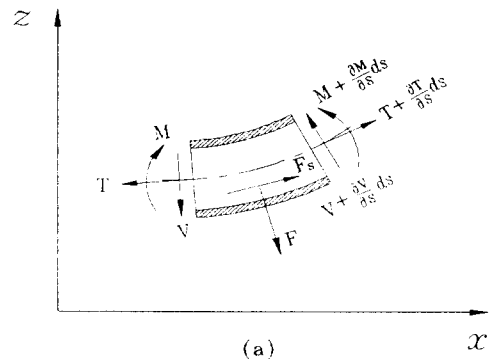


Fig. 4 Free-body diagram: (a) pipe element, (b) fluid element

$$\mathbf{V} = -\frac{\partial M}{\partial s} \mathbf{n} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(EI \frac{ds}{dx} \chi \right) \mathbf{n}$$

$$\cong EI [w' w''' \mathbf{i} + (-w'''' + 2w' w'' + 2w^2 w''') \mathbf{k}] \quad (14)$$

압력, \mathbf{P} 는

$$\mathbf{P} = Pt \cong P\mathbf{i} + (Pw' - \frac{1}{2} Pw'^3) \mathbf{k} \quad (15)$$

식 (13), 식 (14) 그리고 식 (15)를 식 (12)에 대입하여 정리하면, 내부유동을 포함한 파이프의 비선형 굽힘 방정식을 다음과 같이 얻게된다.

$$EIw'''' - (T_0 - P)w'' - \frac{3}{2}(EA - T_0 + P)w'^2 w''$$

$$- EI(2w''^3 + 8w'w''w'' + 2w'^2 w''') \quad (16)$$

$$+ (m_p + m_f)\ddot{v} + m_f \left(\frac{\partial c}{\partial t} w' + 2cw' + c^2 w'' \right) = 0$$

여기서 $(\cdot) = \partial/\partial t$ 이다. 식 (16)에서 변위 $w(x, t) = v(x, t) + v_g(t)$ 이므로 식 (16)에 대입하면, 최종적으로 내부에 유체가 흐르고 파이프의 지지부가 가진되는 파이프계의 비선형 굽힘방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$EI(v'''' - 2v''^3 - 8v'v''v'' - 2v'^2 v''') - (T_0 - P)v'' - \frac{3}{2}(EA - T_0 + P)v'^2 v''$$

$$+ (m_p + m_f)\ddot{v} + m_f \left(\frac{\partial c}{\partial t} v' + 2cv' + c^2 v'' \right)$$

$$= -(m_p + m_f)\ddot{v}_g \quad (17)$$

위와 같은 결과식에 다음과 같이 Kelvin-voigt 모형의 댐핑을 고려하여 대입한다.

$$E = E \left(1 + a \frac{\partial}{\partial t} \right) = E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \quad (18)$$

여기서 $E^* = Ea$, a 는 댐핑계수이다. 그러면 내부유동을 포함한 파이프의 비선형 굽힘방정식^(19,20)은 다음과 같이 구해진다.

$$EI(v'''' - 2v''^3 - 8v'v''v'' - 2v'^2 v''') + E^* I \dot{v}''''$$

$$- \frac{3}{2}(EA - T_0 + P)v'^2 v'' - (T_0 - P)v''$$

$$+ (m_p + m_f)\ddot{v} + m_f \left(\frac{\partial c}{\partial t} v' + 2cv' + c^2 v'' \right)$$

$$= -(m_p + m_f)\ddot{v}_g \quad (19)$$

2.2 무차원 운동방정식

식 (19)에서 각 변수의 영향을 고찰하기 위해 아래의 무차원항을 사용하여 무차원 방정식으로 표현한다.

$$\eta = \frac{v}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{m_f}{EI}} lc, \quad \eta_g = \frac{v_g}{l},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{EI}{m_p + m_f}} \frac{t}{l^2}, \quad \xi = \frac{m_f}{m_p + m_f},$$

$$\Gamma_0 = \frac{T_0 l^2}{EI}, \quad \Gamma_1 = \frac{EA l^2}{EI}, \quad \Gamma_2 = \frac{P_0 l^2}{EI},$$

$$\sigma = \left(\frac{EI}{m_f + m_p} \right)^{1/2} \frac{a}{l^2}$$

위의 무차원항들을 식 (19)에 대입함으로써 무차원 운동방정식은 아래와 같이 얻어진다.

$$\ddot{\eta} + \sqrt{\xi} \dot{c} \eta' + 2\sqrt{\xi} \bar{c} \dot{\eta}' \bar{c}^2 \eta'' + \sigma \dot{\eta}''''$$

$$+ (\eta'''' - 2\eta''^3 - 8\eta' \eta'' \eta'' - 2\eta'^2 \eta''') - (\Gamma_0 - \Gamma_2) \eta''$$

$$- \frac{3}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_0 + \Gamma_2) \eta'^2 \eta'' = -\ddot{\eta}_g \quad (20)$$

2.3 Galerkin 방법

편미분 방정식을 상미분 방정식으로 전환하기 위해서 Galerkin방법을 사용한다. 그리고 파이프계를 흐르는 유체가 조화진동유동을 하는 경우이므로, 유체의 속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{c} = c_0(1 + \bar{K} \cos \omega_c \tau) \quad (21)$$

여기서 c_0 은 평균유속, \bar{K} 는 매개변수 가진의 크기이고, ω_c 는 매개변수 가진의 진동수이다. 한편 지지부의 변위는 다음과 같이 가정한다.

$$\eta_g = G \cos \omega \tau \quad (22)$$

그리고 Galerkin 방법을 적용하기 위해서 편미분 방정식 (20)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\eta = \Sigma \phi_n(\xi) q_n(\tau), \quad \phi_n(\xi) = \sqrt{2} \sin(n\pi\xi) \quad (23)$$

여기서 $q_n(\tau)$ 는 일반화 좌표이고 $\phi_n(\xi)$ 단순지지된 파이프의 정규모드이다. 본 연구에서는 간략하게 하기 위해서 정규모드의 한 항만 고려하였다. 식 (21), 식 (22), 그리고 식 (23)을 편미분 방정식 (20)에 대입하고 $\phi_m(\xi)$ 를 곱해준 후에 ξ 에 대해 0에서 1까지 적분해 주면 다음과 같은 비선형 상미분방정식을 얻게 된다.

$$\ddot{q} + \bar{\delta} \dot{q} + (\omega_0^2 - \bar{\beta} \cos(\omega_c \tau)) q + \bar{\alpha} q^3$$

$$= \bar{\gamma} \cos(\omega \tau) \quad (24)$$

여기서

$$\bar{\delta} = \sigma \pi^4$$

$$\omega_0^2 = \pi^4 + \pi^2(\Gamma_0 - \Gamma_2 - c_0^2)$$

$$\bar{\beta} = 2 c_0^2 \bar{K} \pi^2$$

$$\bar{\alpha} = -2\pi^6 + \frac{3}{4} \pi^4 (\Gamma_1 - \Gamma_0 + \Gamma_2)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} G\omega^2$$

유도된 비선형방정식 (24)는 비선형 비제차 Hill의 방정식(Hill's equation)이다. 일반적으로, 선형 Hill의 방정식에서는 매개변수 공진(parametric resonance)인 주공진(primary resonance)과 부공진(secondary resonance)이 존재하며, 주공진에서 불안정 영역이 크다^(7,8,11). 따라서, 주로 $\omega \approx \omega_0$, $\omega_c \approx 2\omega_0$ 인 경우에 대해서 연구를 하지만 본 연구에서는 좀더 일반적인 경우에 대해 고찰하기 위해 $\omega \approx \omega_0$ 그리고 $\omega_c \approx n\omega_0$ 라 가정한다.

3. 평균 시스템과 호모크리닉 궤도

3.1 평균시스템

평균방법을 적용하기 위해 두개의 작은 매개변수를 사용한다. 이 때 작은 매개변수 ϵ , μ 는 $0 < \epsilon \ll \mu \ll 1$ 인 관계를 만족한다고 가정한다. 그리고 식 (24)에서 $\bar{\alpha} = \epsilon\alpha$, $\bar{\delta} = \epsilon\mu\delta$, $\bar{\beta} = \epsilon\mu\beta$, 그리고 $\bar{\gamma} = \epsilon\gamma$ 라고 하자. 또한, ω_c 와 ω_0 은 조절 매개변수(detuning parameter) Ω 와 ν 를 도입하므로써 다음의 식으로 표현된다.

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \epsilon\Omega, \quad \omega_c = n\omega + \epsilon\nu \quad (25)$$

식 (25)를 식 (24)에 대입하고 정리하면 식 (24)는 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 + \epsilon\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} q \\ \bar{q} \end{cases} + \epsilon \begin{cases} 0 \\ -\mu\delta\dot{q} + \mu\beta\cos(n\omega\tau + \delta\nu\tau)q - aq^3 + \gamma\cos\omega\tau \end{cases} + O(\epsilon^2) \quad (26)$$

다음과 같은 van der Pol 좌표변환식을 식 (26)에 적용한다.

$$\begin{cases} r \\ s \end{cases} = A \begin{cases} q \\ \bar{q} \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos\omega\tau & -\omega^{-1}\sin\omega\tau \\ -\sin\omega\tau & -\omega^{-1}\cos\omega\tau \end{bmatrix}, \\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\omega\tau & -\sin\omega\tau \\ -\omega\sin\omega\tau & -\omega\cos\omega\tau \end{bmatrix} \quad (27)$$

그러면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{r} = -\frac{\epsilon}{\omega} F(r, s, \tau) \sin\omega\tau \quad (28a)$$

$$\dot{s} = -\frac{\epsilon}{\omega} F(r, s, \tau) \cos\omega\tau \quad (28b)$$

여기서

$$\begin{aligned} F(r, s, \tau) = & \Omega(r \cos\omega\tau - s \sin\omega\tau) \\ & - a(r \cos\omega\tau - s \sin\omega\tau)^3 + \gamma \cos\omega\tau \\ & + \mu\{\delta\omega(r \sin\omega\tau + s \cos\omega\tau) \\ & + \beta \cos(n\omega\tau + \epsilon\nu\tau)(r \cos\omega\tau - s \sin\omega\tau)\} \end{aligned} \quad (29)$$

우선 약비선형계의 해석에 유용하게 사용되는 평균이론⁽²¹⁾에 대해 살펴보면 다음과 같다.

새로운 변수 $\bar{\tau} = \epsilon\nu\tau$ 를 도입하면 식 (28)은 아래와 같은 형태이다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \epsilon\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega\tau) + \mu\mathbf{g}(\mathbf{x}, \bar{\tau}, \omega\tau) \}, \quad \bar{\tau} = \epsilon\nu \quad (30)$$

식 (30)의 우항은 τ 에 대해 $T = 2\pi/\omega$ 의 주기를 갖고 있으므로 식 (30)을 주기 T 에 대해서 평균하면 식 (30)의 평균 시스템(averaged system)은 아래와 같은 형태로 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \epsilon\{ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) + \mu\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}, \epsilon\nu\tau) \}, \\ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega\tau) d\tau, \\ \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}, \tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{y}, \bar{\tau}, \omega\tau) d\tau \end{aligned} \quad (31)$$

이 때, 식 (31)을 식 (30)에 대한 평균시스템이라고 한다. $\mathbf{x}(\tau)$ 와 $\mathbf{y}(\tau)$ 가 각각 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 와 $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ 를 초기치로 갖는 고유시스템(original system) 식 (30)과 평균시스템 식 (31)의 해라 하면, 평균이론(averaging theory)이란 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + O(\epsilon)$ 이면, $\tau \sim 1/\epsilon$ 일 때도 $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}(\tau) + O(\epsilon)$ 이라는 정리이다. 즉 평균이론은 평균 시스템 식 (31)과 고유 시스템 식 (30)의 해가 시간이 흐른 뒤에도 $O(\epsilon)$ 의 범위내에서 두 계의 동적 특성이 일치한다는 정리이다. 그러므로 본 연구에서는 고유 시스템보다 평균시스템을 해석하는 것이 더 간편하므로 평균 시스템을 구하여 고유 시스템의 동적특성을 고찰하고자 한다.

앞에서 언급한 평균이론을 식 (28)에 적용하고 $\tau \rightarrow (2\omega/\epsilon)t$ 로 치환해주면 다음과 같은 평균 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{r} = & - \left\{ -\Omega s + \frac{3}{4}a(r^2 + s^2)s + \mu\delta\omega r \right. \\ & \left. - 2\mu\beta \frac{\sin(n\pi)}{(n^2 - 4)n\pi} [-2s \cos(n\pi + \nu_0 t) \right. \\ & \left. + nr \sin(n\pi + \nu_0 t)] \right\} \quad (32a) \\ \dot{s} = & - \left\{ \Omega r - \frac{3}{4}a(r^2 + s^2)r + \mu\delta\omega s + \gamma \right. \\ & \left. + 2\mu\beta \frac{\sin(n\pi)}{(n^2 - 4)n\pi} [-2r \cos(n\pi + \nu_0 t) \right. \end{aligned}$$

$$+ n^2 r \cos(n\pi + \nu_0 t) + ns \sin(n\pi + \nu_0 t) \Big\} \quad (32b)$$

여기서 $\nu_0 = 2\omega\nu$ 이다. 다음과 같은 좌표변환식

$$J = \frac{r^2 + s^2}{2}, \quad \phi = \tan^{-1}(s/r) \quad (33)$$

를 식 (32)에 적용하면 식 (32)는 다음과 같이 변환된다.

$$J = -\gamma\sqrt{2}J \sin\phi + \mu \left\{ \beta J \frac{\sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} [(n+2)\sin(n\pi-2\phi+\nu_0 t) - (n-2)\sin(n\pi+2\phi+\nu_0 t)] - 2\delta\omega J \right\} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \phi = & -\Omega + \frac{3}{2}\alpha J - \frac{\gamma}{\sqrt{2}J} \cos\phi \\ & - \mu\beta \frac{\sin(n\pi)}{2n(n^2-4)\pi} \{ 2(n^2-4)\cos(n\pi+\nu_0 t) \\ & + n(n+2)\cos(n\pi-2\phi+\nu_0 t) \\ & + n(n-2)\cos(n\pi+2\phi+\nu_0 t) \} \quad (34b) \end{aligned}$$

3.2 호모클리닉 궤도

식 (34)의 고정점(fixed point)과 호모클리닉 궤도(homoclinic orbit)를 구하기 위해 식 (34)에서 $\mu = 0$ 이라 하면, 식 (34)는 다음과 같이 적분가능한 해밀턴계(integrable Hamiltonian system),

$$J = -\gamma\sqrt{2}J \sin 2\phi \quad (35a)$$

$$\dot{\phi} = -\Omega + \frac{3}{2}\alpha J - \frac{\gamma \cos\phi}{\sqrt{2}J} \quad (35b)$$

가 되며 식 (35)의 고정점과 호모클리닉 궤도는 Yagasaki^(17,18)에 의하여 유도되었으며 그 과정은 다음과 같다.

식 (35)에서 $\alpha > 0$, $\Omega > 0$, 그리고 $0 < \gamma < (4/9)(\Omega^3/\alpha)^{1/2}$ 이면 식 (35)의 위상유형(phase portrait)을 나타낸 Fig. 5에서 보는 바와 같이 식 (35)는 세 개의 고정점 p_1, p_2, p_3 를 갖는다. 이때, 세 개의 고정점 중에서 $p_1(j_1, \pi)$, $p_3(j_3, 0)$ 는 center이고 $p_2(j_2, \pi)$ 는 하이퍼볼릭 안장점(hyperbolic saddle point)이며, 세 개의 고정점 $j_1, j_2, j_3 (0 < j_1 < j_2 < j_3)$ 는 다음과 같은 3차방정식의 근이다.

$$J^3 - 2\left(\frac{2\Omega}{3\alpha}\right)J^2 + \left(\frac{2\Omega}{3\alpha}\right)^2 J - 2\left(\frac{\gamma}{3\alpha}\right)^2 = 0 \quad (36)$$

식 (35)의 해밀턴 에너지(Hamiltonian energy)는 아래와 같이 구해진다.

$$H(J, \phi) = -\Omega J + \frac{3}{4}\alpha J^2 - \gamma\sqrt{2}J \cos\phi \quad (37)$$

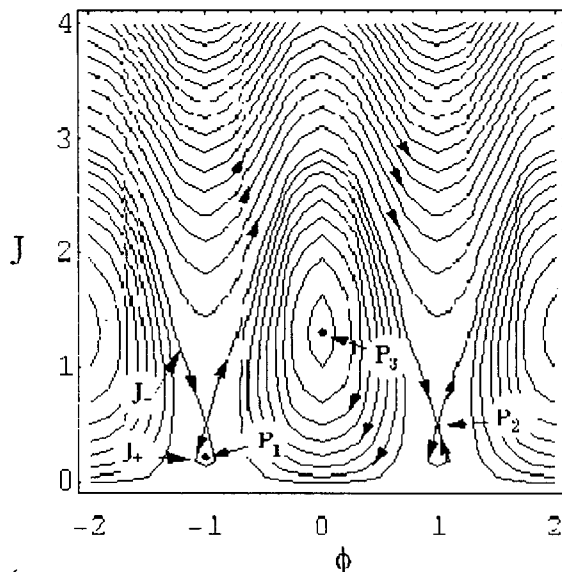


Fig. 5 Phase portrait of eq.(35)

이때, 하이퍼볼릭 안장점 $p_2(j_2, \pi)$ 의 해밀턴 에너지수위(Hamiltonian energy level)는 식 (37)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H(j_2, \pi) = H_0 \quad (38)$$

따라서 식 (38)은 두 개의 호모클리닉 궤도 Γ_+, Γ_- 와 안장점 p_2 로 구성된다. 이때 식 (38)을 이용하여 식 (35)를 적분하면 호모클리닉 궤도 $\Gamma_{\pm} = (J_{\pm}(t), \phi_{\pm}(t))$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} J_{\pm}(t) = & \pm \frac{2r_+ r_-}{(r_+ - r_-) \cosh \pm (r_+ + r_-)} + j_2 \quad (39) \\ \phi_{\pm}(t) = & \arccos \left[\frac{1}{\gamma\sqrt{2}J_{\pm}(t)} \left(-\Omega J_{\pm}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{4}\alpha J_{\pm}^2(t) - H_0 \right) \right] \end{aligned}$$

여기서 $a = 3\alpha\sqrt{-r_+ r_-}/4$, $r_{\pm} = 2(k \pm \sqrt{2kj_2})$ 이고, $k = 2\Omega/3\alpha - j_2$ 이다.

4. Melnikov 방법

4.1 Melnikov 이론

Melnikov 이론⁽²¹⁾은 특정한 계에서 혼돈운동의 존재를 이론적으로 규명할 수 있는 유일한 방법으로 Melnikov에 의해서 개발되었다. 여기서는 우선 Melnikov 이론에 대해서 간략히 살펴보기로 한다.

이 방법은 아래의 (가정 1)과 (가정 2)를 포함하는 다음과 같은 형태의 계에 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \mu g(x, t) \\ x &= \begin{Bmatrix} J \\ \phi \end{Bmatrix} \in \mathbf{R}^2, \quad 0 < \mu \ll 1 \end{aligned} \quad (40)$$

(가정 1) $\mu=0$ 일 때, 식 (40)은 해밀턴계가 된다.

$$J = \frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad \phi = -\frac{\partial H}{\partial J} \quad (41)$$

(가정 2) 해밀턴계인 식 (41)은 Fig. 6에서와 같이 하이퍼볼릭 안장점 p_2 에 대한 호모크리닉 궤도 Γ_{\pm} ($J_{\pm}(t)$, $\phi_{\pm}(t)$)를 갖는다.

이와 같은 계에서 $\mu(>0)$ 가 매우 작은 경우, Fig. 6에서와 같이 섭동된 안장점(perturbed saddle point) p_2^{μ} 와 섭동된 안정 매니폴드(perturbed stable manifold) $W^s(p_2^{\mu})$ 그리고 섭동된 불안정 매니폴드(perturbed unstable manifold) $W^u(p_2^{\mu})$ 가 비섭동된 안장점(unperturbed saddle point) p_2 와 비섭동된 안정 매니폴드(unperturbed stable manifold) $W^s(p_2)$ 그리고 비섭동된 불안정 매니폴드(unperturbed unstable manifold) $W^u(p_2)$ 의 근방에 존재한다. 이때 $W^s(p_2^{\mu})$ 와 $W^u(p_2^{\mu})$ 사이의 거리는 다음과 같이 정의된다.

$$d_{\pm}(t_0) = \left| \frac{\mu M_{\pm}(t_0)}{f(\Gamma_{\pm}(t_0))} \right| + O(\mu^2) \quad (42)$$

여기서 밑첨자 +와 -는 각각 이 invariant manifold의 아래쪽과 위쪽을 나타낸다. 식 (42)에서 분자의 $M_{\pm}(t_0)$ 를 Melnikov 함수라고 부르며 다음과 같이 정의된다.

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Gamma_{\pm}(t)) \wedge g(\Gamma_{\pm}(t), t+t_0) dt \quad (43)$$

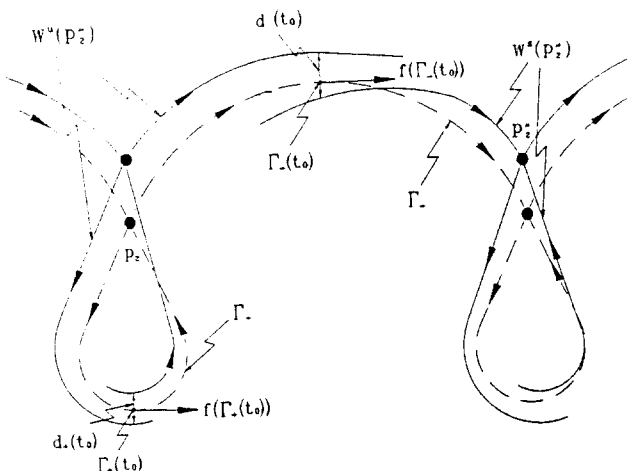


Fig. 6 Perturbed manifolds and the distance function

여기서 $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$ 이다. $M_{\pm}(t_0)$ 가 simple zero이면, 즉,

$$M_{\pm}(t_0) = 0, \quad \frac{\partial M_{\pm}(t_0)}{\partial t_0} \neq 0 \quad (44)$$

이면 $d_{\pm}(t_0)$ 또한 simple zero가 된다. $d_{\pm}(t_0)$ 가 simple zero라는 것은 $W^s(p_2^{\mu})$ 와 $W^u(p_2^{\mu})$ 가 교차한다는 것을 의미한다. Smale-Birkoff homoclinic 이론⁽²¹⁾에 따르면 이러한 교차가 발생한다는 것은 혼돈운동이 발생한다는 것을 의미한다. 따라서 Melnikov 함수가 주어진 계에 대해서 혼돈운동의 존재를 이론적으로 규명할 수 있다.

4.2 Melnikov 함수

앞절의 Melnikov 이론에서 살펴본 바와 같이 평균 시스템 식 (34)의 $\mu=0$ 일 때 식 (35)와 같이 해밀턴계가 되고 그 계의 하이퍼볼릭 안장점 p_2 와 식 (39)의 호모크리닉 궤도 $\Gamma_{\pm} = [J_{\pm}(t), \phi_{\pm}(t)]$ 가 존재하므로 Melnikov 이론을 적용하여 혼돈운동의 존재를 이론적으로 고찰할 수 있다. 그러므로 평균 시스템 식 (34)에 대한 Melnikov 함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(\Gamma_{\pm}(t)) g_2(\Gamma_{\pm}(t), t+t_0) \\ &\quad - f_2(\Gamma_{\pm}(t)) g_1(\Gamma_{\pm}(t), t+t_0)] dt \end{aligned} \quad (45)$$

여기서

$$\begin{aligned} f_1(q_{\pm}^0(t)) &= -\gamma \sqrt{2J_{\pm}(t)} \sin \phi_{\pm}(t) \\ f_2(q_{\pm}^0(t)) &= -\Omega + \frac{3}{2} \alpha J_{\pm}(t) - \frac{\gamma \cos \phi_{\pm}(t)}{\sqrt{2J_{\pm}(t)}} \\ g_1(q_{\pm}^0(t), t+t_0) &= \beta J_{\pm}(t) \frac{\sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} \\ &\quad \times \left\{ (n+2) \sin[n\pi - 2\phi_{\pm}(t) + \nu_0(t+t_0)] \right. \\ &\quad \left. - (n-2) \sin[n\pi + 2\phi_{\pm}(t) + \nu_0(t-t_0)] \right\} - 2\delta \omega J_{\pm}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(q_{\pm}^0(t), t+t_0) &= -\beta \frac{\sin(n\pi)}{2n(n^2-4)\pi} \\ &\quad \times \left\{ 2(n^2-4) \cos[n\pi + \nu_0(t+t_0)] \right. \\ &\quad \left. + n(n+2) \cos[n\pi - 2\phi_{\pm}(t) + \nu_0(t+t_0)] \right. \\ &\quad \left. + n(n-2) \cos[n\pi + 2\phi_{\pm}(t) + \nu_0(t+t_0)] \right\} \end{aligned}$$

식 (45)를 유수정리(residue theorem)를 사용하여 적분하면 다음과 같은 Melnikov 함수가 얻어진다.

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t_0) &= \frac{4\pi\beta}{27\alpha^2\gamma^2 \sinh\left(\frac{4\pi\nu_0}{3\alpha\rho}\right)} \left[M_1 \cosh\left(\frac{4\nu_0\theta_0^{\pm}}{3\alpha\rho}\right) \right. \\ &\quad \left. \pm M_2 \sinh\left(\frac{4\nu_0\theta_0^{\pm}}{3\alpha\rho}\right) \right] = \frac{16\delta\omega}{3\alpha} \left(\Omega\theta_0^{\pm} \mp \frac{9}{8}\rho\alpha \right) \end{aligned} \quad (46)$$

이 적분과정은 매우 복잡하여 중간과정은 부록에 기술하였다. 식 (46)의 M_1 과 M_2 는 다음 식과 같다.

$$M_1 = \nu_0 \{ -54A_{34}\alpha\gamma^2 + 27A_{34}aj_2(2\Omega - 3aj_2)^2 + A_{12}\nu_0(2\Omega - 3aj_2)(2\Omega + 9aj_2) - 4A_{12}\nu_0^3 \},$$

$$M_2 = 36A_{34}\alpha\gamma^2\Omega - 18A_{34}aj_2\Omega(2\Omega - 3aj_2)^2 - 18AB_{12}\alpha\gamma^2\nu_0 + 9A_{12}aj_2\nu_0(2\Omega - 3aj_2)^2 - A_{34}\nu_0^3(2\Omega - 3aj_2)(2\Omega + 9aj_2) + 4A_{34}\nu_0^4.$$

여기서 θ_0^\pm , A_{12} , AB_{12} , A_{34} 는 부록에 정리되었다. 식 (46)은 다음과 같은 형태

$$M_\pm(t_0) = \beta \sin(\nu_0 t_0 + \phi) \cdot C_\pm(\alpha, \gamma, \Omega, \nu_0) + \delta\omega D_\pm(\alpha, \gamma, \Omega) \quad (47)$$

로 표현될 수 있으며, 이때 Melnikov 함수가

simple zero가 될 조건식⁽²²⁾은 다음과 같다.

$$\beta/\delta\omega > |D_\pm(\alpha, \gamma, \Omega)/C_\pm(\alpha, \gamma, \Omega, \nu_0)| = R_\pm(\alpha, \gamma, \Omega, \nu_0) \quad (48)$$

따라서 유도된 Melnikov 함수 식 (46)으로부터 혼돈운동의 존재조건식 (48)을 얻을 수 있으므로 평균시스템 식 (34)에서 야기되는 혼돈운동의 발생범위를 얻을 수 있다. 평균이론에서 언급되었던 바와 같이 평균시스템에서 혼돈운동이 존재한다는 것은 고유시스템에서도 혼돈운동이 존재한다는 것을 의미하게 되어 고유시스템의 혼돈운동을 규명할 수 있다.

Fig. 7은 매개변수 가진진동수와 고유진동수의 비인 n 의 변화에 따른 분기영향을 고찰하기 위해 n 의

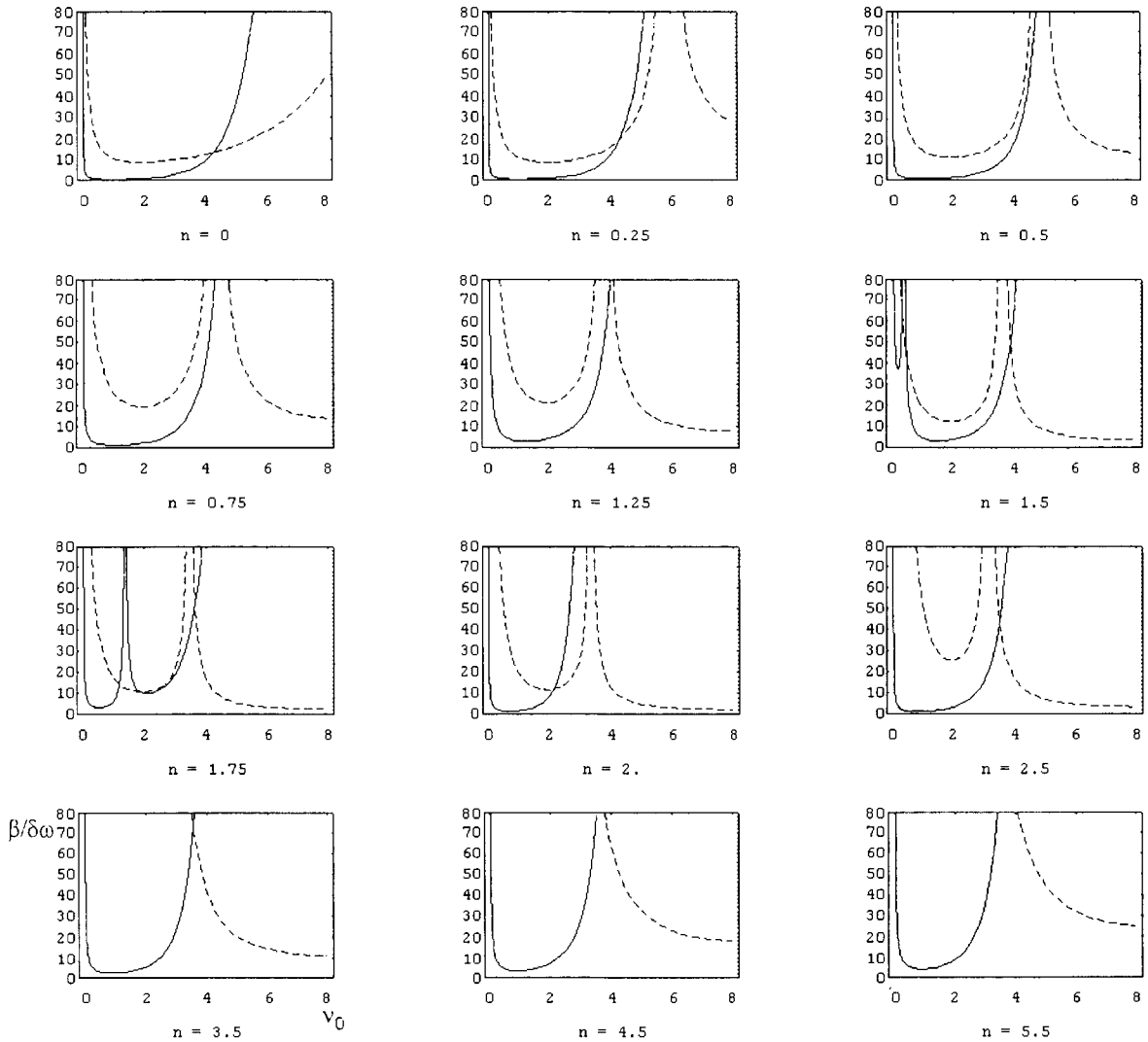


Fig. 7 Homoclinic bifurcation curves when $\alpha=2$, $\gamma=1.5$, $\Omega=3$. $R_+(\nu_0)$ and $R_-(\nu_0)$ are, respectively, plotted as dashed and solid lines on ν_0 - $\beta/\delta\omega$ space

변화에 따라 호모크리닉 분기곡선 $\beta/\delta\omega=R_{\pm}(\alpha, \gamma, \Omega, \nu_0)$ 를 그린 것으로써 곡선의 윗쪽이 혼돈운동이 발생하는 영역이다. $n=1$ 과 $n=3$ 이상인 정수일 경우에는 Melnikov 함수가 t_0 에 관계없이 항상 상수가 되어 혼돈운동이 발생하지 않는다. $n=1$ 과 $n=3$ 이상의 정수인 계에 대해서는 아직 연구된 바가 많지 않으므로 앞으로의 연구되어야 하겠다. Fig. 7의 결과와 같이 진동수비 n 에 따라 혼돈운동의 존재영역이 이론적으로 파악되었으므로, 이 결과는 다음의 수치해석을 통하여 검증하고자 한다.

5. 수치해석

Fig. 7의 결과와 같이 진동수비 n 에 따라 혼돈운동의 존재영역이 이론적으로 파악되었으므로, 이 결과를 고유시스템 식 (24)와 평균시스템 식 (33)의 수치해석을 통하여 검증하고자 한다. 진동수비 n 이 0과 2인 경우에 대해서는 Yangasaki^(17,18)의 연구를 통하여 검증된 바 있으므로, 본 연구에서는 일반적인 진동수비 $n=0.25$ 와 $n=1.75$ 인 경우에 대해서 고유시스템과 평균시스템의 프앙카레 사상(Poincaré map)과 시간응답(time response)를 통해 운동양상의 변화와 혼돈운동의 존재를 고찰하였다.

Fig. 8은 $n=1.75$ 일 때 고유시스템 식 (24)의 프앙카레 사상이다. Fig. 8(a)는 Fig. 7의 호모크리닉 분기곡선 아래영역에 해당하는 매개변수값인 경우로서 준주기적인 운동양상을 보인다. 호모크리닉 분기곡선 바로 윗영역의 매개변수 값인 경우는 Fig. 8(b)와 같이 주기배가 분기현상(period doubling bifurcation)이 발생함을 알 수 있다. Fig. 8(c)는 호모크리닉 분기곡선 상단영역의 매개변수 값일 때이다. 이 그림에서는 혼돈적 끌개(chaotic attractor)를 발견할 수 있다. Fig. 8의 프앙카레 사상을 통하여 혼돈운동으로 가는 경로가 주기배가 분기임을 알 수 있다. Fig. 9은 Fig. 8에 해당하는 시간응답이다. Fig. 10(a), (b)는 평균시스템의 $J-\phi$ 공간과 $r-s$ 공간상에서의 프앙카레 사상으로써 평균시스템의 기이한 끌개(strange attractor)를 보다 명확하게 관찰할 수 있다. Fig. 11과 Fig. 12는 각각 $n=0.25$ 일 때 고유시스템과 평균시스템의 프앙카레 사상으로써 $n=1.75$ 인 경우와 마찬가지로 고유시스템의 프앙카레 사상에서 주기배가현상이 발생함을 볼 수 있으며, 호모크리닉 분기곡선 상단영역의 파라미터값에서 역시 혼돈운동이 발생함을 알 수 있다.

이와 같은 수치해석결과는 혼돈운동이 발생할 경계를 나타내는 Fig. 7의 호모크리닉 분기곡선 상단영

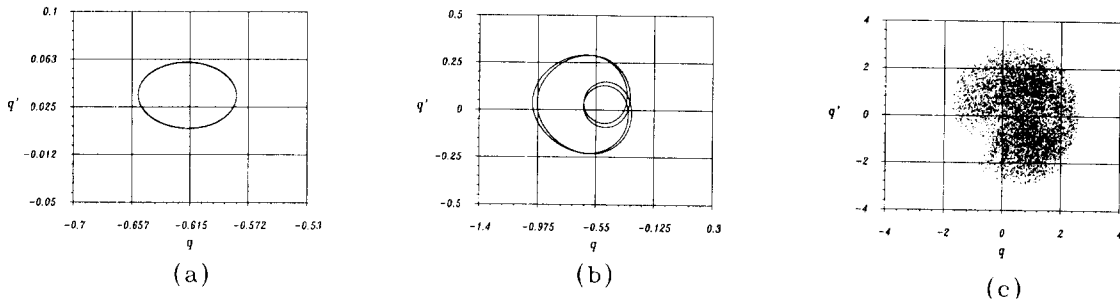


Fig. 8 Poincaré maps of the original system (24) with $\bar{\alpha}=0.2$, $\bar{\gamma}=0.15$, $\omega=1.14$, $\bar{\delta}=0.004386$, and (a) $\bar{\beta}=0.025$; (b) $\bar{\beta}=0.19$; (c) $\bar{\beta}=0.45$ when $n=1.75$.

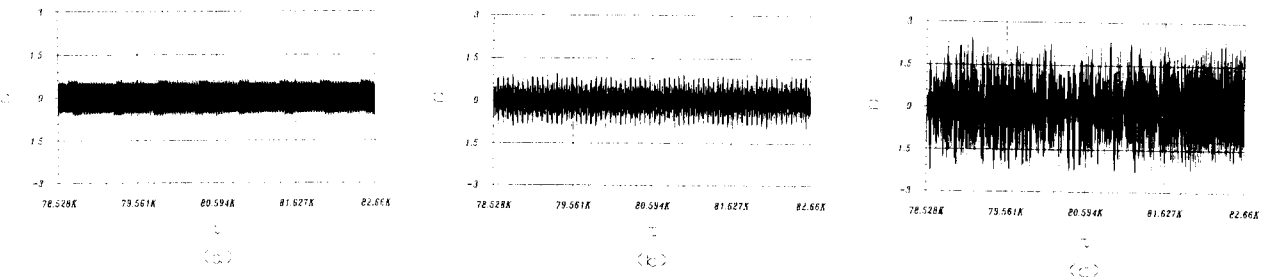


Fig. 9 Time responses of the original system (24) with $\bar{\alpha}=0.2$, $\bar{\gamma}=0.15$, $\omega=1.14$, $\bar{\delta}=0.004386$, and (a) $\bar{\beta}=0.025$; (b) $\bar{\beta}=0.19$; (c) $\bar{\beta}=0.45$ when $n=1.75$.

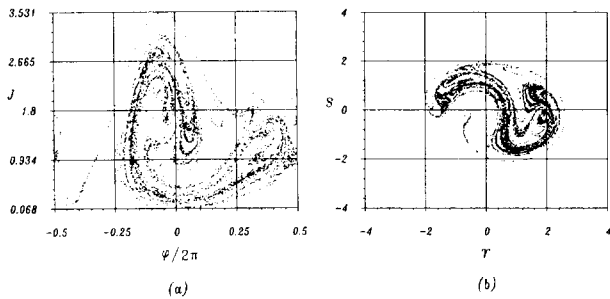


Fig. 10 (a) Poincaré map on ϕ - J space (b) Poincaré map on r - s space, for the averaged system with $\alpha=2$, $\gamma=1.5$, $\Omega=3$, $\nu_0=2.0$, $\mu\beta=1.9$, and $\mu\delta\omega=0.05$ when $\mu=1.75$.

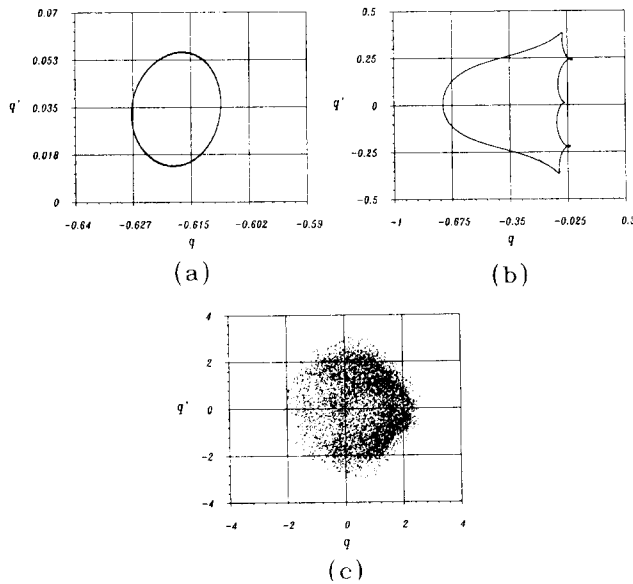


Fig. 11 Poincaré maps of the original system (24) with $\bar{\alpha}=0.2$, $\bar{\gamma}=0.15$, $\omega=1.14$, $\bar{\delta}=0.004386$, and (a) $\bar{\beta}=0.025$; (b) $\bar{\beta}=0.82$; (c) $\bar{\beta}=1.25$ when $\mu=0.25$.

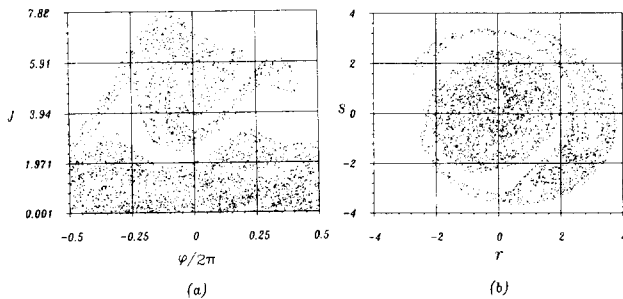


Fig. 12 (a) Poincaré map on ϕ - J space (b) Poincaré map on r - s space, for the averaged system with $\alpha=2$, $\gamma=1.5$, $\Omega=3$, $\nu_0=2.0$, $\mu\beta=12.5$, and $\mu\delta\omega=0.05$ when $\mu=0.25$

역에서 혼돈운동이 발생한다는 이론적인 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 조화진동유동을 포함한 직선파이프계의 혼돈운동에 대해서 연구되었다. 곡률의 비선형성을 고려하여 파이프계의 비선형 운동방정식이 유도되었다. 평균이론과 Melnikov 방법을 사용함으로써 호모클리닉 궤도 교차(transverse homoclinic orbit)와 그로 인해 발생하는 파이프계의 혼돈운동의 존재영역을 이론적으로 규명할 수 있었고, 또한 이론적으로 증명되어진 혼돈운동의 존재를 수치해석을 통해 검증하였다. 수치해석을 수행함으로써 호모클리닉 궤도 교차의 발생을 확인할 수 있었으며, 혼돈운동의 경로가 주기배가 분기현상이라는 것을 알 수 있었다. 본 연구의 결과는 여러 준주기적으로 가진되어지는 1자유도 약비선형계에 유용하게 적용되어질 수 있으리라 판단된다. 한편, 파이프계의 비선형 거동, 혼돈운동 및 유체유발진동 구조를 파악할 수 있으므로 파이프계를 구성하는 변수들의 설계범위 및 진동방지에 활용될 수 있어 파이프계의 안전설계 및 진동제어에 기여할 수 있다.

후 기

본 연구는 1994년도 교육부 학술 연구조성비(기계공학 : ME 94-D-09)에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) Housner, G. W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, pp. 205~209.
- (2) Páidoussis, M. P., 1966, "Dynamics of Flexible Slender Cylinders in Axial Flow, Part I and II," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 26, pp. 717~751.
- (3) Chen, S. S., 1972, "Vibration and Stability of a Uniformly Curved Tube Conveying Fluid," Journal of Acoustical Soc. of America, Vol. 51, pp. 223~232.
- (4) Chen, S. S., 1972, "Flow-Induced In-Plane Instabilities of Curved Pipes," Nuclear Engineering and Design, Vol. 23, pp. 29~38.
- (5) Chen, S. S., 1973, "Out-of-Plane Vibration and

Stability of Curved Tubes Conveying Fluid," Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, pp. 362~368.

(6) Pak, C.H., S.C. Hong, and T.Y. Kim, 1991, "Out-of-Plane Vibration of Angled Pipes Conveying Fluid," Korea Nuclear Society, Vol. 23, pp. 306~315.

(7) Chen, S. S., 1971, "Dynamic Stability of a Tube Conveying Fluid," Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol. 97, pp. 1469~1485.

(8) Pädoussis, M.P., and C. Sundarajan, 1975, "Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying pulsating Fluid," Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, pp. 780~784.

(9) 박철희, 이우식, 홍성철, 김태룡, 1991, "비정상 유동을 포함한 파이프계의 안정성해석," 대한기계학회논문집, 제15권, 제5호, pp. 1512~1521.

(10) 홍성철, 1992, "비정상 내부유동을 포함한 파이프의 진동 및 안정성해석," 인하대학교 박사학위논문.

(11) Lee, U., C.H. Pak, and S.C. Hong, 1995, "Dynamics of Piping System with Internal Unsteady Flow," Journal of Sound and Vibration, Vol. 180(2), pp. 297~311.

(12) Pädoussis, M.P. and F.C. Moon, 1988, "Non-linear and Chaotic Fluid-Elastic Vibrations of a Flexible Pipe Conveying Fluid," Journal of Fluid and Structures, Vol. 2, pp. 567~591.

(13) Pädoussis, M.P., G. X. Li, and F.C. Moon, 1989, "Chaotic Oscillations of the Autonomous System of a Constrained Pipe Conveying Fluid," Journal of Sound and Vibration, Vol. 135, pp. 1~19.

(14) Pädoussis, M.P., G.X. Li, and R.H. Rand, 1991, "Chaotic Motions of a Constrained Pipe Conveying Fluid," Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 559~565.

(15) Melnikov, V.K. 1963, "On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations," Transactions of the Moscow Mathematical Society, Vol. 12, pp. 1~56.

(16) Holmes, P.J. and J.E. Marsden, 1982, "Horse-shoes in Perturbations of Hamiltonian Systems with Two Degree of Freedom," Communications in Mathematical Physics, Vol. 82, pp. 523~544.

(17) Yagasaki, K., M. Sakata, and K. Kimura, 1990,

"Dynamics of a Weakly Nonlinear System subjected to Combined Parametric and External Excitation," Journal of Applied mechanics, Vol. 57, pp. 209~217.

(18) Yagasaki, K., 1991, "Chaos in a Weakly Non-linear Oscillator with Parametric and External Resonances," Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 244~250.

(19) C. Semler, G.X. Li and M.P. Pädoussis, 1994, "The Non-linear Equations of Motion of Pipes Conveying Fluid," Journal of Sound and Vibration, 169(5), pp. 577~599.

(20) Pädoussis, M.P., Issid, N.T., 1974, "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid," Journal of Sound and Vibration, Vol. 33(3), pp. 267~294.

(21) Guckenheimer, J., and Holmes, P.J., 1983, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, Chap. 4.

부 록

본문의 식 (46)을 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_{\pm}(t_0) = M_{\pm}^a(t_0) + M_{\pm}^b(t_0) + M_{\pm}^c(t_0) + M_{\pm}^d(t_0) + M_{\pm}^e(t_0) \quad (A1)$$

여기서

$$M_{\pm}^a(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta J_{\pm}(t) \{ (A_1 - B_1) \cos \nu_0(t + t_0) - (A_2 - B_2) \sin \nu_0(t + t_0) \} dt, \quad (A2a)$$

$$M_{\pm}^b(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \beta J_{\pm}(t) \left\{ \Omega - \frac{3}{2} \alpha J_{\pm}(t) + \frac{\gamma \cos \phi_{\pm}(t)}{\sqrt{2} J_{\pm}(t)} \right\} \times \{ A_3 \cos \nu_0(t + t_0) - A_4 \sin \nu_0(t + t_0) \} dt, \quad (A2b)$$

$$M_{\pm}^c(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \delta \omega J_{\pm}(t) \left\{ -\Omega + \frac{3}{2} \alpha J_{\pm}(t) - \frac{\gamma \cos \phi_{\pm}(t)}{\sqrt{2} J_{\pm}(t)} \right\} dt, \quad (A2c)$$

$$M_{\pm}^d(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \beta J_{\pm}(t)}{\gamma^2} \left\{ \Omega - \frac{3}{2} \alpha J_{\pm}(t) \right\} \left\{ -\Omega J_{\pm}(t) + \frac{3}{4} \alpha J_{\pm}^2(t) - H_0 \right\} \times \{ A_1 \cos \nu_0(t + t_0) - A_2 \sin \nu_0(t + t_0) \} dt, \quad (A2d)$$

$$M_{\pm}^e(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\beta J_{\pm}^2(t)}{\gamma^2} \left\{ -\Omega + \frac{3}{2} a J_{\pm}(t) \right\} \times \{ A_3 \cos \nu_0(t+t_0) + A_4 \sin \nu_0(t+t_0) \} dt. \quad (A2e)$$

이 때

$$A_1 = \frac{n \sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} \cos(n\pi),$$

$$A_2 = \frac{n \sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} \sin(n\pi),$$

$$A_3 = \frac{2 \sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} \sin(n\pi),$$

$$A_4 = \frac{2 \sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} \cos(n\pi),$$

$$B_1 = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} \cos(n\pi),$$

$$B_2 = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} \sin(n\pi),$$

이다.

본문의 식 (39)를 식 (A2)에 대입하고 유수정리를 사용하여 식 (A2)의 적분을 행하면 다음과 같이 된다.

$$M_{\pm}^a(t_0) = \mp \frac{8\pi\beta\nu_0 \sinh(4\nu_0\theta_0^{\pm}/3\alpha\rho)}{3\alpha \sinh(4\pi\nu_0/3\alpha\rho)} AB_{12} \quad (A3a)$$

$$M_{\pm}^b(t_0) = \frac{8\pi\beta}{3\alpha \sinh(4\pi\nu_0/3\alpha\rho)} \{ -3\nu_0 \cosh(4\nu_0\theta_0^{\pm}/3\alpha\rho)$$

$$\pm 2\Omega \sinh(4\nu_0\theta_0^{\pm}/3\alpha\rho) \} A_{34} \quad (A3b)$$

$$M_{\pm}^c(t_0) = \frac{16\delta\omega}{3\alpha} \left\{ \frac{9}{8} \rho\alpha \mp \Omega\theta_0^{\pm} \right\} \quad (A3c)$$

$$M_{\pm}^d(t_0) = \frac{2\beta\pi A_{12}}{\gamma^2 \sinh(4\pi\nu_0/3\alpha\rho)} \left[\frac{8\nu_0^2 \cosh(4\nu_0\theta_0^{\pm}/3\alpha\rho)}{27\alpha^2} \times \left\{ \left(\Omega - \frac{3}{2} aj_2 \right) \left(\Omega + \frac{9}{2} aj_2 \right) - \nu_0^2 \right\} \pm \frac{8\nu_0 j_2 \sinh(4\nu_0\theta_0^{\pm}/3\alpha\rho)}{3\alpha} \left(\Omega - \frac{3}{2} aj_2 \right)^2 \right] \quad (A3d)$$

$$M_{\pm}^e(t_0) = \frac{\beta\pi A_{34}}{\gamma^2 \sinh(4\pi\nu_0/3\alpha\rho)} \left[\frac{16\nu_0 j_2}{\alpha} \left(\Omega - \frac{3}{2} aj_2 \right)^2 \times \cosh(4\nu_0\theta_0^{\pm}/3\alpha\rho) \mp \frac{16}{27\alpha^2} \left\{ 18\alpha\Omega j_2 \left(\Omega - \frac{3}{2} aj_2 \right)^2 + \left(\Omega + \frac{9}{2} aj_2 \right) \left(\Omega - \frac{3}{2} aj_2 \right) \nu_0^2 - \nu_0^4 \right\} \sinh(4\nu_0\theta_0^{\pm}/3\alpha\rho) \right] \quad (A3e)$$

여기서 $\theta_0^+ = \theta_0$, $\theta_0^- = \pi - \theta_0$, $\theta_0 = \arccos[(r_+ + r_-)/(r_+ - r_-)]$, $\rho = (-r_+ r_-)^{1/2}$ 이고

$$A_{12} = A_1 \sin(\nu_1 t_0) + A_2 \cos(\nu_0 t_0),$$

$$A_{34} = A_3 \cos(\nu_0 t_0) + A_4 \sin(\nu_0 t_0),$$

$$AB_{12} = (A_1 - B_1) \sin(\nu_0 t_0) + (A_2 - B_2) \cos(\nu_0 t_0)$$

이다.