

〈論 文〉

전단 및 단면 관성효과를 고려한 회전 외팔보의 모델링 및 진동해석

Modeling and Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams Considering Shear and Rotary Inertia Effects

신 상 하* · 유 홍 희**

S.H. Shin and H.H. Yoo

〈1996년 2월 7일 접수 ; 1996년 3월 16일 심사완료〉

Key Words : Rotating Cantilever Beams(회전 외팔보), Natural Frequency Variation(고유진동수 변화), Shear Effect(전단 효과), Rotary Inertia Effect(단면관성 효과), Timoshenko Beam Theory(티모센코 보이론), Slenderness Ratio(세장비)

ABSTRACT

This paper presents a modeling method for the vibration analysis of a rotating beam the slenderness ratio of which is relatively small. The smaller the slenderness ratio becomes, the larger the shear and rotary inertia effects become. Such effects become critical for the accurate estimation of the natural frequencies and modeshapes, especially higher frequencies and modes, as the angular speed increases. It is also shown that the effects are important for the accurate estimation of the critical angular speed of the beam.

1. 서 론

터보 엔진이나 발전기 그리고 항공기 등에는 회전 운동을 하는 외팔보 형태의 구조물이 흔히 등장하며 이러한 구조물의 진동에 대한 연구는 일찍부터^(1,2) 시작되었다. 현재까지 발표되어온 문헌들을⁽³⁻⁵⁾ 살펴보면, 대개 두께가 얇거나 길이가 긴 세장보에 적용되는 Euler 보 이론에 근거한 연구결과가 많은 것을 쉽게 확인할 수 있다. 이는 세장비가 큰 보 형태가 실제적으로 공학적 예제에 많이 등장하기 때문이다. 그러나 실제의 구조물들은 종종 세장비가 비교적 작은 값을 가지며 (즉 보가 두껍거나 길이가 짧음) 이들에 관한 정확한 해석결과를 얻으려면 Euler 보 이론에서는 무시되었던 전단 및 단면관성 효과들을 고

려할 필요가 생긴다.

회전운동이 없이 정지한 보에 대해서는 전단 및 단면관성 효과들을 일찍부터 고려되어 왔으나, 회전 운동을 하는 보에 관해서는 그 연구결과들이⁽⁶⁻⁹⁾ 그리 많지 않다. 그 이유는 보의 회전운동으로 인해 발생하는 원심력을 고려한 운동방정식의 유도과정이 매우 복잡하기 때문이라 판단된다. 실제로 이들 논문에서는 최종 결과나 주요과정만을 제시하고 수식 유도과정의 대부분을 생략한 채 그 연구의 고유성을 서로 다른 수치해석방법, 즉 Miklestad-Holzer 방법, 멱급수를 이용한 준해석적 방법, 유한요소법을 적용하는 데서 찾고있다. 이러한 모델링 유도과정의 복잡성을 해결하기 위해 최근 새로운 동적 모델링 방법이^(10,11) 제시되었다. 이 모델링방법은 기존 방법들과 달리 인장 및 굽힘방향 운동방정식이 모두 선형으로 유도되므로 진동해석을 위한 식의 유도과정이 훨씬 간명해지는 것을⁽¹²⁾ 보여주었다. 본 연구에서는 이 새로운 모델링 방법에 기초하여 세장비가

*한양대학교 대학원

**정회원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과

비교적 작은 보의 진동해석을 위해 전단효과와 단면 관성효과를 고려한 Timoshenko 보이론에 근거한 모델링을 유도하는 것을 목표로 하였다.

본 논문은 앞서 발표된 세장비가 작은 회전 외팔보에 관한 기존의 연구결과들과 비교하여 다음과 같은 고유한 연구결과를 담고 있다. 첫째, 운동방정식 유도를 위한 전 과정을 상세히 기술하였다. 둘째, 회전에 따른 보의 강성변화를 회전축 반경과 회전각 속도, 그리고 세장비에 대한 명시적 행렬형태로 나타내었다. 셋째, 세장비 변화에 따른 Euler 보이론과 Timoshenko 보이론에 의한 고유진동수의 차이뿐만 아니라 모드형상의 차이도 구하여 보여주었다. 넷째, Euler 보이론과 Timoshenko 보이론에 의한 임계각속도(회전주파수와 고유주파수가 일치하는 각 속도)의 예측차이를 보여주었다. 본 연구에서는 효율적 수치계산을 위해 Rayleigh-Ritz 가상모드 방법을 사용하였다.

2. 운동 방정식

2.1 운동 방정식의 유도

본 연구에서는 보는 균일하고 등방성이며 단면은 대칭으로 일정하며 따라서 보 단면의 도심과 탄성축은 서로 일치한다는 가정과, 보는 일정 평면내에서 회전운동을 하며 면내방향 굽힘 변형만 일어난다는 가정을 사용하였다. 이러한 가정들은 보의 회전운동과 전단 및 단면관성 효과에 의한 진동특성 변화에 연구의 초점을 맞추기 위해 기타 효과들이 생략된 운동방정식을 간명히 유도하기 위한 것이다.

Fig. 1은 반경 r 의 강체 축에 고정되어 회전운동

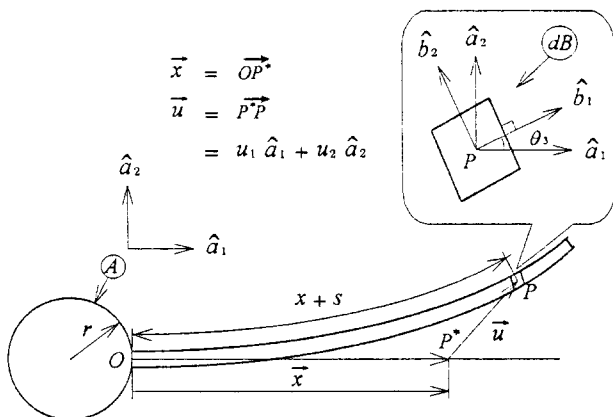


Fig. 1 Configuration of a Timoshenko beam attached to rigid hub

을 하는 외팔보를 보여준다. 그림에서 축 A에 부착된 서로 수직인 단위벡터들이 나타나 있으며, x 는 보의 고정점 O로부터 변형전 탄성축상의 임의질점 P*까지의 거리를, (\vec{u}) 는 그 질점에서의 탄성변위를, s 는 그 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 그림 1 중 확대된 그림은 질점 P를 도심으로 갖는 보의 미소부분을 나타내며 기준틀 A의 좌표계와 변형후 보의 미소부분 dB의 자세관계를 나타낸다.

모드방법을 이용해 상미분 운동방정식을 구하기 위해서 s, u_2, θ_3 는 다음과 같이 근사화된다.

$$s = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \quad (2)$$

$$\theta_3 = \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \quad (3)$$

여기서 $\phi_{1j}(x), \phi_{2j}(x)$ 는 인장과 굽힘 변위의 모드 함수들을, $\phi_{3j}(x)$ 는 탄성축의 기울기의 모드함수, $q_{aj}(t)$ 는 시간의 함수인 일반좌표들, 그리고 μ_a 는 그 수를 각각 나타낸다. 변형에 따른 보의 임의 미소부분 dB의 각속도 $\vec{\omega}^{dB}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{dB} &= \vec{\omega}^A + {}^A\vec{\omega}^{dB} \\ &= (\omega_3 + \dot{\theta}_3) \hat{a}_3 \end{aligned} \quad (4)$$

변형에 따른 보의 임의 질점 P점의 속도 \vec{v}^P 는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + {}^A\vec{v}^P + \vec{\omega}^A \times (\vec{x} + i\vec{t}) \quad (5)$$

여기서 \vec{v}^O 는 O점의 속도, ${}^A\vec{v}^P$ 는 P점의 강체 A에 대한 상대속도, $\vec{\omega}^A$ 는 축 A의 각속도, \vec{x} 는 O점에서 P*점까지의 벡터, $i\vec{t}$ 는 P*점에서 P점까지의 벡터를 나타내며 이들을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{v}^O = r\omega_3 \hat{a}_2 \quad (6)$$

$${}^A\vec{v}^P = \dot{u}_1 \hat{a}_1 + \dot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (7)$$

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \hat{a}_3 \quad (8)$$

$$\vec{x} = x \hat{a}_1 \quad (9)$$

$$i\vec{t} = u_1 \hat{a}_1 + u_2 \hat{a}_2 \quad (10)$$

식 (6)과 (8)에서 ω_3 는 축 A의 일정 회전속력을 의미한다. 미소 탄성체 dB의 각가속도 \vec{a}^{dB} 는 다음과 같다.

$$\vec{a}^{dB} = (\dot{\omega}_3 + \dot{\theta}_3) \hat{a}_3 \quad (11)$$

P점의 가속도 \vec{a}^P 는 속도 \vec{v}^P 를 이용한 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\vec{a}^P = \frac{^A d \vec{v}^P}{dt} + \vec{\omega}^A \times \vec{v}^P \quad (12)$$

식 (12)에서 우변 첫째항의 첨자 A는 그 기준틀에 대한 벡터의 미분을 의미한다. 이상의 식들에 나타나는 u_1 은 s 와 u_2 로 나타낼 수 있으며 [참고문헌 (11) 참조] 이를 이용하여 \vec{v}^P 를 구한 후 \dot{q}_{ai} 를 일반속력으로 하여 편속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^X \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^X \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} = \left(-\int_0^x \phi'_{2i} \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi'_{2j} q_{2j} d\sigma \right) \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^X \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{3i}} = 0 \quad (15)$$

또, $\vec{\omega}^{dB}$ 의 \dot{q}_{ai} 에 대한 미분 값을 구하면 다음과 같이 편각속도가 구해지게 된다.

$$\frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial \dot{q}_{1i}} = \frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial \dot{q}_{2i}} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial \dot{q}_{3i}} = \phi_{3i} \hat{a}_3 \quad (17)$$

이상에서 구한 식들을 이용하여 다음 식으로부터 단면관성효과를 고려한 일반관성력을 구할 수 있다[참고문헌 (13) 참조]

$$F_i^* = -\int_0^L \rho v_i^P \cdot \vec{a}^P dx - \int_0^L \vec{\omega}_i^{dB} \cdot (\vec{a}^{dB} \cdot \underline{I} + \vec{\omega}^{dB} \times \underline{I} \cdot \vec{\omega}^{dB}) dx \quad (18)$$

여기서 L 은 보의 길이, ρ 는 단위길이당 질량, $\underline{I} dx$ 는 dB 의 관성 Dyadic, v_i^P 와 $\vec{\omega}_i^{dB}$ 는 각각 i 번째 편속도와 편각속도를 나타낸다. 그런데 평면운동시 \underline{I} 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{I} = \rho \frac{I_3}{A} \hat{a}_3 \hat{a}_3 \quad (19)$$

여기서 I_3 는 \hat{a}_3 축에 대한 면적 모멘트, A 는 보의 단면적을 나타낸다.

본 연구에서는 보의 자유진동해석을 위한 모델링을 유도하는 데 목적을 두고 있으므로 보에 작용하는 외력을 고려하지 않는다. 외력이 작용하지 않을 때 일반작용력은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (20)$$

여기서 U 는 보의 탄성에너지로 전단효과를 고려하면 다음 식과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L EI_3 \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L kGA \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \theta_3 \right)^2 dx \quad (21)$$

여기서 E 는 탄성 계수, G 는 전단 계수, k 는 보의 단면 형상 계수를 나타낸다. 이상의 결과를 이용하여 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} \int_0^L \rho \phi_{1j} \phi_{1j} dx \ddot{q}_{1j} - 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{1j} \phi_{2j} dx \dot{q}_{2j} \\ & - \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} \int_0^L \rho \phi_{1j} \phi_{1j} dx q_{1j} - \dot{\omega}_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{1j} \phi_{2j} dx q_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \int_0^L EA \phi'_{1j} \phi'_{1j} dx q_{1j} \\ & = \omega_3^2 \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx + r\omega_3^2 \int_0^L \rho \phi_{1i} dx \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{2j} \phi_{2j} dx \ddot{q}_{2j} + 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_1} \int_0^L \rho \phi_{2j} \phi_{1j} q_{1j} dx \\ & + \dot{\omega}_3 \sum_{j=1}^{\mu_1} \int_0^L \rho \phi_{2j} \phi_{1j} dx q_{1j} - \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{2j} \phi_{2j} dx q_{2j} \\ & + \frac{1}{2} \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho (L^2 - x^2) \phi'_{2j} \phi'_{2j} dx q_{2j} \\ & + r\omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho (L-x) \phi'_{2j} \phi'_{2j} dx q_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L kGA \phi'_{2j} \phi'_{2j} dx q_{2j} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L kGA \phi'_{2j} \phi_{3j} dx q_{3j} \\ & = -r\dot{\omega}_3 \int_0^L \rho \phi_{2i} dx - \dot{\omega}_3 \int_0^L \rho x \phi_{2i} dx \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L \rho I_3 \phi_{3j} \phi_{3j} dx \ddot{q}_{3j} - \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L kGA \phi_{3j} \phi'_{2j} dx q_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L kGA \phi_{3j} \phi_{3j} dx q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L EI_3 \phi'_{3j} \phi'_{3j} dx q_{3j} \\ & = -\dot{\omega}_3 \int_0^L \rho I_3 \phi_{3i} dx \end{aligned} \quad (24)$$

운동방정식을 무차원화 하려면 다음과 같이 시간, 공간, 및 일반좌표 변수들을 무차원화 한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (25)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (26)$$

$$y_i \equiv \frac{q_i}{L} \quad (27)$$

식 (25)에서

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI_3}} \quad (28)$$

식 (25)~(27)의 무차원 변수들을 이용하여 유도된 무차원 운동방정식을 관찰해보면 다음과 같은 3개의

무차원 매개변수들이 나타남을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\delta \equiv \frac{r}{L} \quad (29)$$

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{AL^2}{I_3}} \quad (30)$$

$$\omega \equiv \omega_3 T \quad (31)$$

식 (29) ~ (31)에 정의된 매개변수들을 이용하여 표시된 운동방정식은 다음과 같다.

$$M_{11} \dot{y}_{1j} - 2\omega M_{12} \dot{y}_{2j} - \omega^2 M_{11} y_{1j} - \dot{\omega} M_{12} y_{2j} + \alpha^2 K_{11}^s y_{1j} = \omega^2 N_1 + \delta \omega^2 P_1 \quad (32)$$

$$M_{22} \dot{y}_{2j} + 2\omega M_{21} \dot{y}_{1j} + \dot{\omega} M_{21} y_{1j} - \omega^2 M_{22} y_{2j} + \delta \omega^2 K_{22}^{G1} y_{2j} + \omega^2 K_{22}^{G2} y_{2j} + \frac{kG\alpha^2}{E} K_{22}^s y_{2j} - \frac{kG\alpha^2}{E} K_{23}^s y_{3j} = -\dot{\omega} N_2 - \delta \dot{\omega} P_2 \quad (33)$$

$$M_{33} \dot{y}_{3j} - \frac{kG\alpha^4}{E} K_{32}^s y_{2j} + \frac{kG\alpha^4}{E} M_{33} y_{3j} + \alpha^2 K_{33}^s y_{3j} = -\dot{\omega} P_3 \quad (34)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{ab} &= \int_0^1 \phi_{ai} \phi_{bj} d\xi \\ K_a^s &= \int_0^1 \phi_{ai, \xi} \phi_{aj, \xi} d\xi \\ K_{ab}^s &= \int_0^1 \phi_{ai, \xi} \phi_{bj} d\xi \\ K_{ab}^{G1} &= \int_0^1 (1 - \xi) \phi_{ai, \xi} \phi_{bj, \xi} d\xi \\ K_{ab}^{G2} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \xi^2) \phi_{ai, \xi} \phi_{bj, \xi} d\xi \\ P_a &= \int_0^1 \phi_{ai} d\xi, \quad N_a = \int_0^1 \xi \phi_{ai} d\xi \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 서로 대응하는 x 와 ξ 에 대해 $\phi_{ai}(x)$ 의 값은 $\phi_{ai}(\xi)$ 의 값과 동일하다.

2.2 진동 방정식

인장방향과 굽힘방향 운동간의 자이로스코픽 연성 효과는 보의 회전각속도가 큰 경우에 동특성에 상당한 영향을 미치나 본 연구에서는 이 효과를 무시한다는 가정을 사용하였다. 이때 식 (33)과 (34)의 두 운동방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$M\ddot{y} + Ky = 0 \quad (36)$$

여기서

$$M = \begin{bmatrix} M_{22} & 0 \\ 0 & M_{33} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{2i} \\ y_{3i} \end{bmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{2i} \\ \dot{y}_{3i} \end{bmatrix} \quad (39)$$

식 (38)의 강성행렬의 값은 다음과 같다.

$$K_{22} = \delta \omega^2 K_{22}^{G1} + \omega^2 K_{22}^{G2} + \frac{kG\alpha^2}{E} K_{22}^s - \omega^2 M_{22} \quad (40)$$

$$K_{23} = -\frac{kG\alpha^2}{E} K_{23}^s \quad (41)$$

$$K_{32} = -\frac{kG\alpha^4}{E} K_{32}^s \quad (42)$$

$$K_{33} = \alpha^2 K_{33}^s + \frac{kG\alpha^4}{E} M_{33} \quad (43)$$

모드해석을 위해 열벡터 y 를 다음과 같이 나타낸다.

$$y = e^{i\lambda\tau} \eta \quad (44)$$

여기서 λ 는 고유진동수이고 η 는 모드형상을 나타내는 열벡터이다. 식 (44)를 (36)에 대입 정리하면 다음과 같다.

$$-\lambda^2 M \eta + K \eta = 0 \quad (45)$$

식 (45)에서 K 는 비대칭 행렬이므로 모드해석방법은 복소모드해석방법을 적용해야 한다.

3. 수치해석

수치해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드들로는 고정된 외팔보의 굽힘진동모드들을 사용하였고 θ_3 의 가상모드들은 굽힘방향 변위의 가상모드들을 공간좌

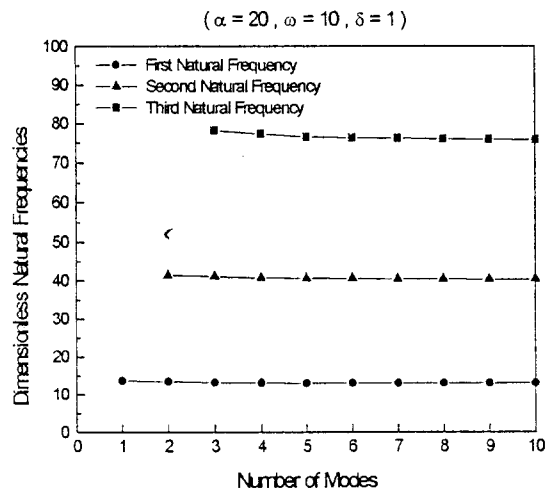


Fig. 2 Convergence of natural frequencies

표 x 로 한번 미분한 함수들을 사용하였다. 보의 단면형상계수 k 의 값은 사각형단면의 경우에 해당하는 1.1769를 사용하였다[참고문헌 (14) 참조].

Fig. 2는 해석에 사용된 모드 수 증가에 따른 고유진동수들의 수렴을 대표적으로 보여준다. 그림에서 수평축은 u_2 와 θ_3 를 위해 각각 사용된 모드수를 나타내는데 모드수의 증가에 따라 고유진동수들이 빠르게 수렴하는 것을 관찰할 수 있다. 각각의 변수를 위한 모드수가 9개 일때와 10개 일 때를 비교하여보면 서로 최대 0.16% 정도의 차이가 있음을 수치적으로 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 이 정도의 차이를 해의 충분한 수렴으로 간주하고, 이후 결과들은 항상 10개의 모드들을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 3은 세장비 α 가 20이고 (보의 길이가 두께의 약 5배에 해당하는 경우) 축반경비 δ 가 1일 때 회전각속도의 증가에 따른 가장 낮은 세 고유진동수들의 변화를 보여준다. 그림에서 실선과 점선은 Timoshenko보 이론과 Euler보 이론에 근거한 모델링을 사용한 해석결과를 각각 나타낸다. 두 경우 모두 회전각속도의 증가에 따른 고유진동수의 증가를 보여주는데, Euler 보 이론이 Timoshenko 보 이론보다 큰 값의 결과를 제공하는 것을 알 수 있다. 또한 두 이론은 1차보다 2차 이상의 고유진동수에서 상당한 차이를 갖게되는 것을 보여주며 회전각속도가 커질수록 그 차이가 증가하는 것도 알 수 있다.

Fig. 4는 무차원 회전각속도 ω 는 10, 축 반경비 δ 는 1일 때 세장비의 변화에 따른 가장 낮은 세 고유

진동수의 변화를 보여준다. 여기서 관찰할 수 있듯이 세장비가 커질수록 단면관성효과와 전단효과에 의한 두 이론간의 차이가 점점 줄어드는 것을 관찰할 수 있다. α 가 70일 때(보의 길이가 두께의 약 20배에 해당하는 경우) 두 이론에 의한 결과는 세번째 고유진동수의 경우도 서로 약 2% 이내의 차이에 머무르는 것을 확인할 수 있었다. 그림에서 Timoshenko이론에 의한 결과가 α 가 0으로 갈 때 고유진동수를 0으로 예측하는 것은 단순히 α 가 0으로 가면 전단효과에 의한 영향이 없어지기 때문에

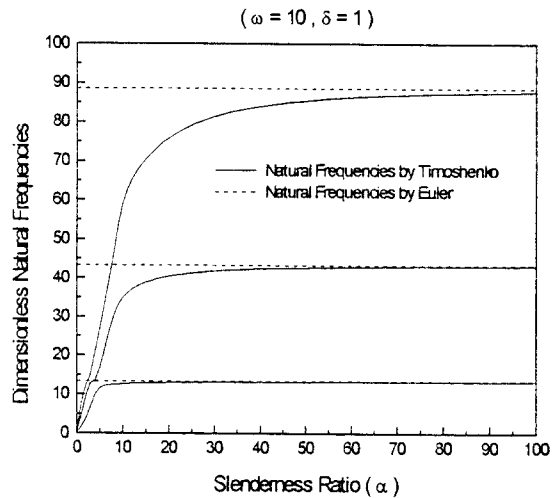


Fig. 4 Comparison of natural frequencies between the thick beam and the thin beam

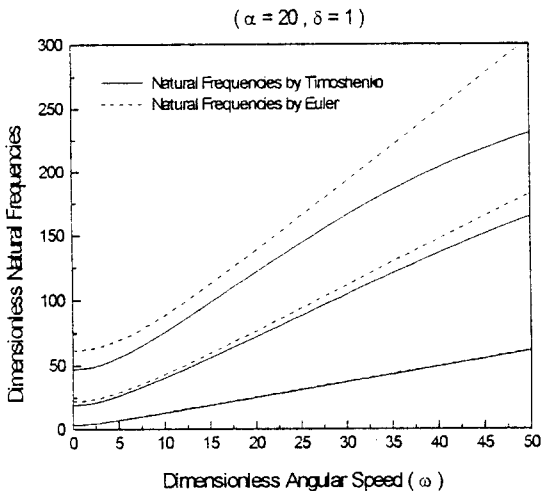


Fig. 3 Dimensionless natural frequencies vs dimensionless angular speed

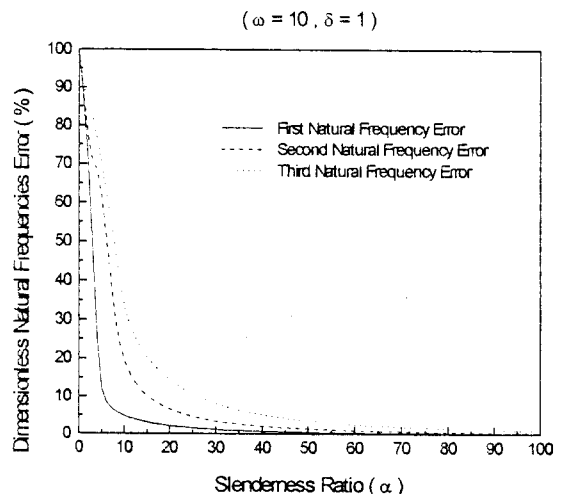


Fig. 5 Percentage error of the dimensionless natural frequencies between the thick beam and the thin beam

강체운동에 의한 고유진동수값이 구해지기 때문이다.

Fig. 5는 Timoshenko 보이론과 Euler 보이론에 의해 예측된 고유진동수값 간의 오차를 나타낸다. α 가 20인 경우는 세 번째 고유진동수에서 14.4%의 큰 차이가 발생하였으나 α 가 70인 경우는 단지 1.9%의 차이만이 발생하는 것을 확인할 수 있었다. 이것은 단면관성효과나 전단효과는 세장비가 큰 경

Table 1 Comparison of the critical angular speed ($\delta=0.5$)

	Timoshenko 보이론	Euler 보이론	Error Percent
$\alpha=10$	7.10	10.28	30.93
$\alpha=20$	8.75	10.28	14.88
$\alpha=30$	9.41	10.28	8.46
$\alpha=40$	9.73	10.28	5.35
$\alpha=50$	9.90	10.28	3.70
$\alpha=60$	10.00	10.28	2.72
$\alpha=70$	10.07	10.28	2.04

우 고려되지 않아도 되나 세장비가 작아질수록 그 영향이 커진다는 일반적 가설이 회전하는 외팔보의 경우에도 성립한다는 것을 의미한다.

Table 1는 δ 는 0.5일 때, 보의 회전각속도와 고유진동수가 일치하는 주파수인 임계각속도를 Euler 보이론과 Timoshenko 보이론을 이용해 구한 값과 그 오차를 보여주고 있다. 표가 보여주듯이 세장비가 클 경우에는 두 이론에 의한 임계각속도의 예측에 별 차이가 없으나 세장비의 값이 작아짐에 따라 두 이론에 의한 임계각속도의 예측값은 큰 차이를 나타낸다. 따라서 세장비가 아닌 경우 임계각속도의 올바른 예측을 위해서는 Timoshenko 보이론의 사용이 꼭 필요한 것을 알 수 있다.

Fig. 6은 세장비 α 는 20, 축반경비 δ 는 1, ω 는 50 일 때 두 해석모델에 의해 구해진 모드 형상 차이를 보여주고 있다. 이 결과는 두 해석이론에 의한 결과가 고유진동수와 마찬가지로 저차모드에서는 별 차이를 주지 않으나 고차모드에서는 상당한 차이를 주는 것을 보여준다. 특별히 3차 모드의 경우 최대 진폭이 보의 자유단 끝이 아닌 약간 안쪽으로 이동된 위치에 존재하는 것도 흥미있는 결과이다.

4. 결 론

본 논문은 단면관성과 전단효과를 고려한 Timoshenko 보이론에 근거한 회전하는 외팔보의 진동해석 모델링을 제시하였으며 수치해석을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다. Timoshenko 보이론과 Euler 보이론에 의한 수치해석 결과의 차이는 세장비가 커짐에 따라 무시할 만큼 감소한다. 특히 세장비 α 가 70(즉 길이가 두께의 약 20배) 이상이면 세번째 고유진동수에서도 2 퍼센트 미만의 미소한 차이만을 발생시킨다. 또한 두 이론은 세장비가 작아짐에 따라 모드 형상 예측, 특히 고차모드의 예측에 큰 차이를 보여주었으며, 고유진동수가 회전각속도와 일치하는 임계각속도의 예측에도 큰 차이를 보여주었다. 따라서 일반적 경우와 마찬가지로 보가 회전하는 경우에도 작은 세장비에서 정확한 해석결과를 얻기 위해서는 Timoshenko 보이론의 사용이 필요하다는 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British

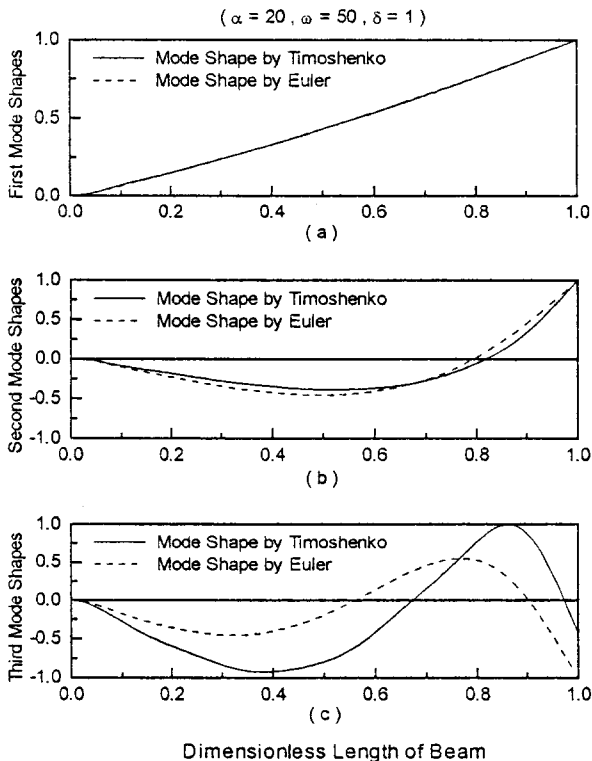


Fig. 6 Variations of first three mode shapes

- A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," J. of Appl. Mech Trans, Am. Soc. mech, Engrs, 25, pp. 28~30.
 - (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. Sound and Vibration, 56, pp. 175~185.
 - (4) Hoa, S., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass" J. Sound and Vibration, 67, pp. 369~381.
 - (5) Wright, A., Smith C., Thresher, R., and Wang, J., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," J. of Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 197~202.
 - (6) Krupka, R. M. and Baumanis, A.M., 1969, "Bending-Bending Mode of a Rotating Tapered-Twisted Turbomachine Blade Including Rotatory Inertia and Shear Deformation" J. of Engineering for Industry, 91, pp. 1017~1024.
 - (7) Stafford, R.O. and Giurgiutiu, 1975, "Semi-Analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams" Int. J. of Mechanical Sciences, Vol. 17, pp. 719~727.
 - (8) Abbas, B.A., 1985, "Dynamic Analysis of Thick Rotating Blades with Flexible Roots" The Aeronautical Journal, 89, pp. 10~16.
 - (9) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," Int. J. of Mech. Sci., Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
 - (10) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," J. Guidance, Control, and Dynamics, 10, pp. 139~151.
 - (11) Yoo, H.H., Ryan, R.R. and Scott R.A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams undergoing Overall Motions," J. of Sound and Vibration, 181(2), pp. 261~278.
 - (12) 유흥희, 1991, "회전 외팔보의 굽힘진동 해석," 대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 891~898.
 - (13) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics: Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.
 - (14) Pilkey, W.D., Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices, John Wiley & Sons Inc., New York.