

〈論 文〉

회전관성 효과를 고려한 탄성 다물체 동역학에 관한 연구

A Study of Flexible Multibody Dynamics with Rotary Inertia

김 성 수*

Sung-Soo Kim

〈1996년 2월 15일 접수 ; 1996년 4월 22일 심사완료〉

Key Words : Flexible Multibody Dynamics(탄성다물체 동역학), Rotary Inertia(회전관성), Deformation Mode(변형모드)

ABSTRACT

A virtual work form of flexible multibody dynamic formulation with rotary inertia has been derived. For the analysis of large flexible multibody systems, deformation modal coordinates have been employed to represent coupled motion between gross and vibrational motion. For the efficient evaluation of the entries in the mass matrix, a flexible body has been treated as a collection of mass points. The rotary inertia was generated from the consistent mass matrix in a finite element model. Deformation mode shapes were obtained from finite element analysis. Bending and twisting vibration analyses of a cantilever have been carried out to see rotary inertia effects. A space flexible robot simulation has been also carried out to show effectiveness of the proposed formulation. This formulation is effective to the model that consists of beam, plate, or shell element that contains rotational degree of freedom at the nodal point. It is also effective to the flexible body model to which a large lumped rotary inertia is attached.

1. 서 론

최근 컴퓨터를 이용한 로봇, 자동차, 농업용 기계, 우주 관련 기계 등, 기계 시스템의 동역학 해석은 설계의 검증과 방향제시 등에 이용되어 실제 제품 생산에 많은 비용을 절감시키고 있으며, 또한 새로운 설계를 통한 제품의 향상을 가능하게 하고 있다. 이러한 컴퓨터를 이용한 해석에는 실제 기계 시스템의 물리적 특성을 정확하게 표현할 수 있는 수학적 모델 형성과 그에 따른 해석 방법 개발이 필수적이다.

또한 최근 기계 시스템의 작업에 있어서의 고속화와 기계 요소들의 경량화는 기계 요소의 거대 거동(gross motion)과 더불어 탄성적 변형(elastic deformation)과 진동을 초래하게 한다. 이러한 변형과 진동은 기계의 본래적인 기능의 저하 등 많은 문제점을 포함하고 있다. 설계에 있어서 이러한 문제 해결을 위한 선행 조건으로 탄성 다물체 모델의 정립과 그 동역학적 해석을 통한 설계의 검증이 필수적이며 이를 위한 다수의 해석 방법들이 개발되었다.

탄성체 부품의 동특성 해석을 위해서는 부품의 강체 병진운동과 회전운동을 나타내는 좌표계와 강체운동과 더불어 일어나는 변형운동의 좌표계가 필요하다. 이러한 방법은 70년대 초반부터 우주 항공 분야, 기계 동역학 분야, 로봇틱스 분야 등 여러 분야

*정회원, 충남대학교 공과대학 메카트로닉스공학과

에서 연구가 진행되어 왔다.

초기의 탄성체 기계 부품의 동력학 해석은 강체운동(rigid body motion)과 탄성적인 변형에 의한 운동이 서로 분리되어 있다고 가정하여 강체 운동해석을 통한 힘의 계산과 그 힘에 의한 부품의 변형계산으로 시스템을 해석하였다^(1,2).

1980년대 중반 컴퓨터의 발달과 더불어 탄성 변형과 강체운동이 연성된 라그랑지 오일러 공식을 이용한 운동방정식이 유도되었으며 탄성 변형은 주로 유한요소 해석 방법에 기초하여 고려되었다⁽³⁾. 그러므로 이 공식에서는 유한요소의 절점좌표계(nodal coordinate)가 사용되었으며 탄성체의 유한요소 모델에 사용된 모양함수(shape function)가 운동방정식에 포함되었다. 하지만 이 공식은 많은 절점 자유도를 가지고 있는 대형문제 해석에는 비효율적이며, 또한 새로운 유한요소 모델을 사용할 경우 그에 따른 모양함수를 운동방정식에 포함시켜야 하므로 번거로운 프로그램 수정작업을 수반한다.

대형문제의 효율적 해석과 운동방정식의 유한요소 모양함수 의존성으로부터 탈피하기 위하여, 변형 모드 좌표(modal coordinate)를 이용한 공식이 개발되었다^(4,5). 이 공식에서는 연속체로서의 유연물체(flexible body)를 이산된 집중질량(lumped mass)들의 집합으로 취급하여 계산의 효율성과 운동방정식의 모양함수 의존도를 제거할 수 있었다. 따라서, 범용 유한요소 프로그램을 통한 대형 문제의 독립적인 변형 모드 해석과 생성된 변형 모드데이터를 이용한 독립적인 탄성 다물체의 동력학 해석이 가능하게 되었다. 하지만 이산된 질량들의 집합으로 표현된 운동방정식은 절점의 병진 자유도만을 고려하여 유도되므로 절점의 회전자유도가 중요한 거대 거동에 수반된 보(beam)의 비틀림 변형이나 진동은 제대로 고려하고 있지 못하며 또한 집중된 회전관성 모멘트를 포함하고 있는 경우도 마찬가지로 해석의 어려움이 있다.

따라서 본 연구에서는 탄성체 요소의 굽힘 변형과 비틀림 변형해석을 가능하게 하는, 회전 관성 효과를 고려한 탄성 다물체 시스템의 동력학 운동방정식을 도출하였다. 운동방정식의 관성행렬을 효율적으로 계산하기 위하여 탄성체를 이산된 절점들의 집합으로 취급하였으며, 절점의 회전자유도를 고려한 운동방정식을 유도하였다. 절점의 집중질량과 회전관성은 유한요소 모델의 관성행렬(consistent mass matrix)로부터 생성하였다. 또한 제안된 방법을 통한 절점의 회전 관성 모멘트의 효과를 분석하기 위

하여 보의 비틀림 진동과 굽힘 진동을 컴퓨터 시뮬레이션(computer simulation)을 통하여 고찰하였으며, 탄성체 로봇의 시뮬레이션을 통하여 로봇 시스템의 탄성체 아암(arm) 비틀림 효과를 고찰하였다.

2. 회전관성을 포함한 탄성 다물체 운동 방정식

2.1 변형 좌표계를 이용한 탄성체 기구학

변형체(deformable body)의 운동을 나타내기 위해서는 물체내의 여러 점들의 절대위치(absolute position)를 고유하게 정의할 일반좌표(generalized coordinates)를 정의할 필요가 있다.

Fig. 1에서는 관성 좌표계(inertial reference frame) $x-y-z$ 에서의 변형체의 일반좌표를 나타내기 위한 변형체의 기구학적 관계가 도식적으로 나타나 있다.

물체 기준 좌표계(body reference frame) $x'-y'-z'$ 는 관성 좌표계에서 물체의 위치(position)와 자세(orientation)를 나타내기 위하여 선택되어진다. $x-y-z$ 좌표계의 기준 점으로부터 $x'-y'-z'$ 물체 기준 좌표계의 기준 점까지의 벡터 r 은 물체 기준 좌표계의 대역위치(global position)를 나타낸다.

따라서 물체 위의 한점 p 의 위치벡터(position vector)는 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$r^p = r + A(s'^p + u'^p) \tag{1}$$

여기서 A 는 $x'-y'-z'$ 좌표계에서 $x-y-z$ 좌표계로의 직교변환행렬(orthogonal transformation matrix)이다. 그리고 s'^p 는 물체가 변형되기 이전의 $x'-y'-z'$ 에서의 p 점의 위치 벡터이며, u'^p 는 $x'-y'-z'$ 좌표계에 대한 p 점의 변형에 의한 상대변위를 나타낸다. 탄성(elastic) 변형 좌표의 수를 줄이기 위하여 Rayleigh-Ritz 근사법(approximation)을 사용하

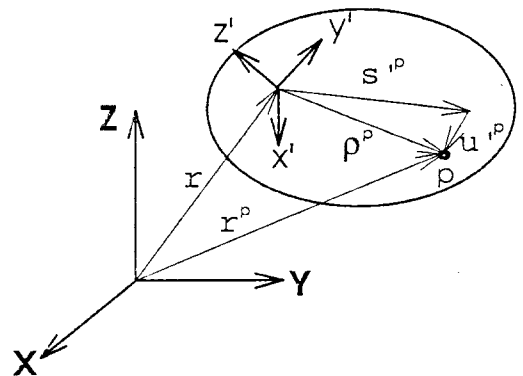


Fig. 1 Global position of a flexible body

면, 변형에 의한 변위장(displacement field) u' 은 식 (2)와 같이 변형 모드의 선형 조합(linear combination)으로 표시될 수 있다.

$$u' = \sum_{i=1}^k \Psi_i a_i \quad (2)$$

여기서 Ψ_i 는 i 번째 변형 모드이고, a_i 는 모드 좌표이다. 그리고 k 는 모드 좌표의 수이다. 따라서, p 점에서 변형에 의한 변위는 다음과 같다.

$$u'^p = \Psi^p a \quad (3)$$

Ψ^p 는 p 점에서의 병진 변형 모드 행렬이고 a 는 모드 좌표 벡터이다.

식 (3)을 식 (1)에 대입하면, 관성 좌표계에서의 p 점의 위치 벡터는 다음과 같이 된다.

$$r^p = r + A(s'^p + u'^p) \equiv r + A\rho^p \quad (4)$$

여기서 $\rho^p = s'^p + \Psi^p a$ 이다.

2.2 가상일의 원리(virtual work principle)를 이용한 탄성체 운동 방정식

공간상에서 회전과 병진 운동을 하며 동시에 탄성적 진동을 하는 탄성체의 운동방정식은 주로 직교좌표계(Cartesian coordinate)와 변형 좌표계(deformation coordinate)를 사용하여 기술되어왔다. 탄성체의 운동방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 가정을 적용한다⁽⁵⁾.

(1) 변형률(strain)과 변형변위(deformation displacement)의 근사적인 선형 관계식을 사용할 수 있도록 탄성체는 물체 기준 좌표계에 대해 작은 변위(small displacement)와 회전(small rotation)을 갖는다.

(2) 응력(stress)과 변형률(strain) 사이의 관계는 선형적인 Hook의 법칙에 의해 표현된다.

(3) 탄성체의 경계조건은 계의 운동 중에는 변화하지 않는다.

시간 t 에서의 구속조건을 만족하는 가상 변위에 의한 가상일에 관한 운동방정식은 식 (5)와 같이 표현된다⁽⁵⁾.

$$\begin{aligned} & - \int_V \mu \ddot{r}_i^p \delta r_i^p dV + \int_V f_i^p \delta r_i^p dV + \int_\sigma T_i^p \delta r_i^p d\sigma \\ & = \int_V \tau_{ij}^p \delta \epsilon_{ij}^p dV \equiv \delta W \\ & \quad i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5)$$

μ : Material density

- \ddot{r}_i : Acceleration of point p
- f_{i^p} : Body force density of point p
- T_{i^p} : Surface traction at point p
- δr_i^p : Virtual displacement of point p
- τ_{ij}^p : Stress tensor at point p
- $\delta \epsilon_{ij}^p$: Strain field variation at point p
- V : Volume of the body before deformation occur
- σ : Surface of the body before deformation occur
- δW : Virtual work

위의 식을 벡터 형태로 표현한 운동방정식은 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned} & - \int_V \mu \delta r^{pT} r^p dV + \int_V \delta r^{pT} f^p dV + \int_\sigma \delta r^{pT} T^p d\sigma \\ & = \int_V \delta \epsilon^{pT} \tau^p dV = \delta W \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\epsilon^p = [\epsilon_{xx}^p, \epsilon_{yy}^p, \epsilon_{zz}^p, 2\epsilon_{xy}^p, 2\epsilon_{yz}^p, 2\epsilon_{zx}^p]^T$
 $\tau^p = [\tau_{xx}^p, \tau_{yy}^p, \tau_{zz}^p, \tau_{xy}^p, \tau_{yz}^p, \tau_{zx}^p]^T$ 로 정의된다.

연속체로서의 탄성체 운동방정식을 컴퓨터로 계산 가능한 형태로 나타내기 위해서는 유한요소 방법을 도입하여 무한개의 자유도를 가진 연속체의 운동방정식을 유한개의 절점 자유도와 강체 운동(rigid body motion)의 자유도로 나타낼 수 있다. 하지만 서론에서 언급한 바와 같이 절점 좌표계로 변형 자유도를 나타낼 경우, 경우에 따라서 수만 개의 자유도를 필요로 하므로 비효율적인 수치해석을 수반하게 된다. 또한 식 (6)에서 보는 바와 같이 처음 3항은 변형 변위장(displacement field)을 나타내는 모양함수(shape function)에 의존하게 되며 모양함수에 관하여 유한요소 영역 내에서의 많은 계산을 수반한 수치적분이 필요하게 된다. 이러한 모양 함수식에

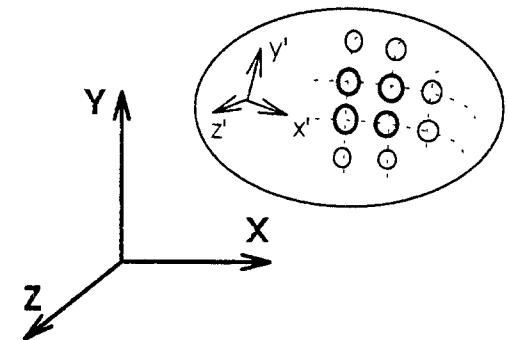


Fig. 2 Lumped mass model of a flexible body

관한 수치적분을 피하고 수치계산의 효율성을 얻기 위해서는 연속체 모델을 Fig. 2와 같이 N 개의 이산된 집중질량(lumped mass)의 집합으로 근사화시킬 수 있으며, 이와 같은 근사화된 모델에 관한 운동방정식은 식 (6)의 물체 부피에 관한 적분항(integral term)을 이산된 질량의 합(summation)의 형태로 바꾸어 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=1}^N (-\delta r^{iT} m_i \ddot{r}^i) + \sum_{i=1}^N \delta r^{iT} f^i + \sum_{i=1}^N \delta r^{iT} T^i = \delta W \quad (7)$$

- 여기서 δr^i : Virtual displacement of node i ,
- m_i : Lumped mass of node i ,
- \ddot{r}^i : Acceleration of node i ,
- f^i : Body force of node i ,
- T^i : Applied force at node i ,

여기서 N 은 절점의 개수이며, K 는 절점에 가해지는 외력(surface traction)의 개수이다.

위의 식 (7)은 절점의 병진 자유도를 가지고 있는 경우로 유한요소의 모델의 solid 요소를 사용할 때에는 상응하나 일반적으로 가장 많이 쓰이는 보 (beam), 평판(plate), 셸(shell) 요소와 같이 절점의 회전 자유도를 가지고 있는 경우는 이에 상응하는 회전 관성 모멘트(rotary moment of inertia)를 고려한 모델이 설정되어야 한다. 절점의 변형에 의한 회전 관성 모멘트를 운동방정식에 고려하기 위해서 아래와 같은 가정이 필요하다.

(1) 각 절점은 3개의 병진 자유도와 3개의 변형에 의한 회전 자유도를 가지고 있다.

(2) Fig. 3에서 물체의 기준 좌표계 $x'-y'-z'$ 와 절점의 회전 관성 모멘트를 정의하기 위하여 설정된 좌표계 $x''-y''-z''$ 는 변형 전에는 평행하다.

(3) 모든 변형은 작다.

위의 가정에 따라, 각 절점의 회전 자유도에 관한

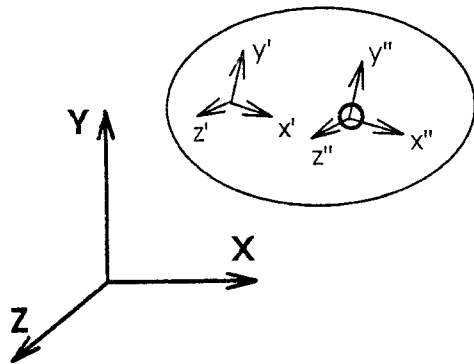


Fig. 3 Coordinate system for rotary inertia

가상일의 원리에 의한 Euler 운동방정식⁽¹¹⁾을 식 (7)에 포함시키고, 식 (7)의 하중(surface traction) T^i 를 집중하중 T_1^i 와 집중 모멘트 T_2^i 로 나누어 생각하면, 이산된 집중질량과 회전 관성 모멘트를 고려한 운동방정식은 다음과 같게 된다.

$$\sum_{i=1}^N \{ -\delta r^{iT} m^i \ddot{r}^i - \delta \pi^{iT} (J_i^i \dot{\omega}^i + \bar{\omega}^i J_i^i \omega^i) + \delta r^{iT} f_i \} + \sum_{i=1}^{K_1} (\delta r^{iT} T_1^i) + \sum_{i=1}^{K_2} (\delta \pi^{iT} T_2^i) = \delta W \quad (8)$$

여기서 K_1 과 K_2 는 각각 집중하중 T_1^i 과 집중 모멘트 T_2^i 가 가해지는 절점의 개수를 나타낸다. 또한 m_i 는 절점 i 의 집중질량, $\delta \pi^{iT}$ 는 절점 i 의 가상 회전변위(virtual rotation), J_i 는 절점 i 의 회전 관성 모멘트, T_1^i 는 절점 i 에 가해지는 집중하중벡터, T_2^i 는 절점 i 에 가해지는 $x'-y'-z'$ 에서 표현된 집중 모멘트벡터, ω^i 는 $x'-y'-z'$ 에서 표현된 절점 i 의 각속도 벡터를 나타내며, $\bar{\omega}^i$ 는 skew-symmetric 행렬로

$$\bar{\omega}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^i & \omega_y^i \\ \omega_z^i & 0 & -\omega_x^i \\ -\omega_y^i & \omega_x^i & 0 \end{bmatrix} \text{로 정의한다.}$$

가정해서 각 절점의 자유도는 3개의 병진 자유도와 3개의 변형에 의한 회전 자유도를 가지고 있으므로 아래와 같이 절점 i 에 관하여 식 (3)을 다시 정의할 수 있다.

$$u^i = \Psi_i a$$

여기서 Ψ_i 는 절점 i 의 $x'-y'-z'$ 좌표계에서 표현된 병진 모드 행렬이며 그 크기도 $3 \times$ 모드의 개수로 표시된다. 그러므로 식 (4)를 절점 i 에 관하여 다시 적으면 식 (9)와 같이 된다.

$$r^i = r + A \rho^i = r + A (s^i + \Psi_i a) \quad (9)$$

또한 탄성 변형에 의한 절점 i 의 작은 회전 θ^i 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\theta^i = \Psi_i^r a \quad (10)$$

여기서 Ψ_i^r 는 절점 i 의 $x'-y'-z'$ 좌표계에서 표현된 회전 모드 행렬이며 그 크기는 $3 \times$ 모드 개수이다.

운동방정식 (8)을 강체의 병진, 회전 좌표와 탄성 변형 모드 좌표로 표현하기 위해서 식 (9)를 두 번 미분하면 절점 i 의 병진 가속도는 아래와 같이 얻어진다.

$$\ddot{r}^i = \ddot{r} + A \bar{\omega}^i \dot{\omega}^i \rho^i + 2A \bar{\omega}^i \Psi_i^r \dot{a} - A \bar{\rho}^i \omega^i + A \Psi_i^r \ddot{a} \quad (11)$$

여기서 $\ddot{\mathbf{r}}$ 은 물체 기준 좌표계의 가속도 벡터, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 은 물체 기준 좌표계의 각가속도 벡터, $\dot{\mathbf{a}}$ 은 변형 모드 가속도 벡터를 나타낸다.

식 (10)의 회전 변위 벡터는 탄성 변형에 의한 작은 회전으로 가정한다. 그러므로 절점 i 의 관성 좌표계에 관한 절대 각속도 $\boldsymbol{\omega}^i$ 는 아래와 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^i &= \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_i \\ &\equiv \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}}\end{aligned}\quad (12)$$

여기서 $\boldsymbol{\omega}$ 는 물체 기준 좌표계의 관성 좌표계에 대한 절대 각속도, $\boldsymbol{\Omega}_i$ 는 탄성 변형에 의한 절점 i 의 물체 기준 좌표계에 관한 각속도, $\boldsymbol{\omega}'$ 은 물체 기준 좌표계의 각속도 벡터이며, 프라임 표시는 이 벡터가 물체 기준 좌표계에서 표시됨을 의미한다.

절점 i 의 각가속도 $\dot{\boldsymbol{\omega}}^i$ 는 식 (12)를 시간에 관하여 미분함으로써 얻을 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^i = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}' \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_r^i \ddot{\mathbf{a}}\quad (13)$$

위식 $\dot{\boldsymbol{\omega}}^i$ 벡터를 물체 기준 좌표계 (body reference frame) $x'-y'-z'$ 에서 나타내면 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}^i &= \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}^i = \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\Psi}_r^i \ddot{\mathbf{a}} \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\Psi}_r^i \ddot{\mathbf{a}}\end{aligned}\quad (14)$$

또한 식 (9)와 식 (12)의 속도 관계식을 해당 변분 (variation)으로 대치하면, 절점 i 의 가상 변위 $\delta \mathbf{r}^i$ 와 절점 i 의 가상 회전 변위 $\delta \boldsymbol{\pi}^i$ 는 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\delta \mathbf{r}^i = \delta \mathbf{r} - \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\rho}}^i \delta \boldsymbol{\pi}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_r^i \delta \mathbf{a}\quad (15)$$

$$\delta \boldsymbol{\pi}^i = \delta \boldsymbol{\pi}' + \boldsymbol{\Psi}_r^i \delta \mathbf{a}\quad (16)$$

여기서 $\delta \mathbf{r}$, $\delta \boldsymbol{\pi}'$, $\delta \mathbf{a}$ 는 물체 기준 좌표계의 병진 가상 변위, 회전 가상 변위, 그리고 모드좌표의 가상 변위이다.

식 (15), (16), (11), (14)를 식 (8)에 대입하면 아래와 같은 운동방정식을 얻는다.

$$-[\delta \mathbf{r}^T, \delta \boldsymbol{\pi}^i{}^T, \delta \mathbf{a}^T] \left\{ \mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}' \\ \ddot{\mathbf{a}} \end{bmatrix} + \mathbf{S} - \mathbf{Q} \right\} = \delta W \quad (17)$$

여기서

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{I} & -\sum_{i=1}^N m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}^i \\ \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}^i & -\sum_{i=1}^N m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}^i \tilde{\boldsymbol{\rho}}^i + \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i \\ \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_r^i)^T & -\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}^i + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \mathbf{J}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi}_r^i \\ \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}^i \boldsymbol{\Psi}_r^i + \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i \boldsymbol{\Psi}_r^i \\ \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \boldsymbol{\Psi}_r^i + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \mathbf{J}_i \boldsymbol{\Psi}_r^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \sum_{i=1}^N m_i \rho^i \\ \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\rho}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\rho}^i + 2 \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\rho}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} \\ \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\rho}^i + 2 \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} \\ + 2 \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} \\ + \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}'^i \\ + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \mathbf{J}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Psi}_r^i \dot{\mathbf{a}} + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}'^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N f^i + \sum_{i=1}^N T_i^i \\ \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}^i A^T f^i + \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}^i A^T T_i^i + \sum_{i=1}^N T_2^i \\ \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T A^T f^i + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T A^T T_i^i + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}_r^i{}^T T_2^i \end{bmatrix}$$

식 (17)의 내부 가상일 δW 는 식 (6)에서의 정의와 같이

$$\delta W = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p{}^T \boldsymbol{\tau}^p dV$$

로 다시 나타낼 수 있으며, 변형률 (strain) $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 는 선형적인 변형률과 변위와의 관계식으로부터

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{B} \mathbf{u}^p \quad (18)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 모드 변형률 행렬 \mathbf{B} 는 상수행렬이므로 식 (18)의 변분 (variation)을 취하면 $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^p$ 로 나타내진다. 또한 선형적인 탄성이론 (linear elasticity)에 의하여 응력 벡터는 변형률 벡터에 관하여 다음과 같은 선형적인 관계를 갖는다.

$$\boldsymbol{\tau}^p = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (19)$$

여기서 \mathbf{D} 는 재료성질에 따라 결정되는 행렬이다. 식 (18)과 식 (19)를 식 (5)에 대입하면, 내부의 가상일은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W = \int_V \delta \mathbf{u}^p{}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^p dV \quad (20)$$

식 (20)을 수치해석이 가능하게 하는 유한요소 방법⁽¹²⁾을 이용한 절점의 변위장 벡터로 나타내면

$$\delta W \cong \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (21)$$

로 표현되며, 여기서 \mathbf{K} 는 유한 요소법으로 나타낸

탄성체의 강성행렬(global stiffness matrix)이 된다. 또한 \mathbf{u}' 는 식 (22)와 같이 정의되는 절점들의 변위로 이루어진 변위장(displacement field) 벡터이며 여기서 N 은 절점의 총개수이다.

$$\mathbf{u}' = [u'^{1T}, \Theta'^{1T}, u'^{2T}, \Theta'^{2T}, \dots, \dots, \dots, u'^{NT}, \Theta'^{NT}]^T \quad (22)$$

식 (3)과 식 (10)으로 변위장 벡터를 모드 벡터로 다시 정의하면 $\mathbf{u}' = \Psi \mathbf{a}$ 로 표시되며, 여기서 Ψ 는 모드 행렬로써 행렬의 크기는 (6*절점개수)*선택된 모드 수로 나타낸다. 그러므로 식 (21)은

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \mathbf{a}^T [\Psi^T K \Psi \mathbf{a}] \\ &= [\delta \mathbf{r}^T, \delta \boldsymbol{\pi}'^T, \delta \mathbf{a}^T] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi^T K \Psi \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (23) \\ &\equiv [\delta \mathbf{r}^T, \delta \boldsymbol{\pi}'^T, \delta \mathbf{a}^T] \mathbf{U}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

가 된다.

따라서, 식 (23)을 식 (17)에 적용하면 변분원리에 의한 운동방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$[\delta \mathbf{r}^T, \delta \boldsymbol{\pi}'^T, \delta \mathbf{a}^T] \left\{ \mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}' \\ \ddot{\mathbf{a}} \end{bmatrix} + \mathbf{S} - \mathbf{Q} + \mathbf{U}(\mathbf{a}) \right\} = 0 \quad (24)$$

2.3 탄성 다물체 시스템 운동방정식

앞의 2.2절에서는 한 개의 탄성체에 관한 운동방정식이 도출되었다. m 개의 탄성체로 이루어진 탄성 다물체 시스템의 운동방정식은 다음과 같은 가상일에 의해 표시된다.

$$\delta \mathbf{q}_i^T [\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}_i^*] = 0, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (25)$$

여기서, $\delta \mathbf{q}_i = [\delta \mathbf{r}_i^T, \delta \boldsymbol{\pi}_i^T, \delta \mathbf{a}_i^T]^T$

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = [\ddot{\mathbf{r}}_i^T, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T, \ddot{\mathbf{a}}_i^T]^T$$

$$\mathbf{Q}_i^* = \mathbf{Q}_i - \mathbf{U}_i - \mathbf{S}_i$$

아래첨자 i 는 i 번째 탄성체를 나타내는 첨자이다.

운동방정식 (25)를 축약된 벡터 행렬 형태로 나타내기 위하여 아래와 같은 복합적인 상태 변수 벡터(composite state variable vector)와 복합 관성 행렬, 복합 힘 벡터를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q} &= [\delta \mathbf{q}_1^T, \delta \mathbf{q}_2^T, \dots, \delta \mathbf{q}_m^T]^T \\ \mathbf{M}^* &= \text{diag}[\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_m] \quad (26) \\ \mathbf{Q}^* &= [\mathbf{Q}_1^{*T}, \mathbf{Q}_2^{*T}, \dots, \mathbf{Q}_m^{*T}]^T \end{aligned}$$

식 (26)에 정의된 벡터와 행렬로 탄성 다물체 시스템 운동방정식 (25)를 다시 표현하면

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}^*) = 0 \quad (27)$$

로 된다.

또한 탄성체들은 서로 조인트로 연결되어 구속된 운동을 하므로 식 (27)의 해는 식 (28)과 같은 시스템의 구속 조건식을 만족해야 한다.

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (28)$$

식 (27), 식 (28)을 동시에 만족시키는 미분-대수 방정식을 세우기 위해서는 라그랑지 승수 법칙(Lagrange multiplier theorem)과 구속 조건식을 두 번 미분한 식을 이용하여 최종적으로 아래의 시스템 운동방정식이 도출된다⁽⁶⁾.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^* & \boldsymbol{\Phi}_q^T \\ \boldsymbol{\Phi}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^* \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서 $\boldsymbol{\lambda}$ 는 라그랑지 승수이며, $\boldsymbol{\gamma}$ 는 다음의 식과 같다.

$$\boldsymbol{\gamma} = -(\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\boldsymbol{\Phi}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Phi}_{tt}$$

여기서 아래첨자 q, t 는 편미분을 나타낸다.

3. 회전 관성 모멘트의 계산

수치 해석적인 방법으로 식 (17)의 운동방정식의 해를 구하기 위해서는 일반화된 관성행렬(generalized mass matrix) \mathbf{M} 과 일반화된 힘벡터(generalized force vector) \mathbf{S} 와 \mathbf{Q} 의 각 항들을 평가해야 하며 여기서 유한요소 절점의 집중 질량(lumped mass)과 집중 회전 관성 모멘트(rotary inertia)가 필요하게 된다. 집중 질량과 집중 회전 관성 모멘트는 유한요소의 모양함수(shape function)를 이용하여 생성된 탄성체의 일관된 관성행렬(consistent mass matrix)의 대각화(diagonalize)를 통하여 얻을 수 있다. 즉 절점의 집중질량은 유한요소의 요소 관성행렬(element mass matrix)의 각 행에서 해당 병진 자유도의 합으로 나타낼 수 있으며, 절점의 회전 집중 관성 모멘트는 일관된 관성행렬의 대각요소(diagonal entry)에 보정계수를 곱하므로 생성할 수 있다⁽⁷⁾. 본 연구에서는 참고문헌 (7)의 이론을 기초로, 기존의 유한 요소 프로그램 ANSYS으로부터 유한요소 관성행렬을 추출하여 대각화시키는 중간처리(interface) 프로그램⁽⁸⁾을 이용하여 절점의 집중질량과 집중 회전 관성 모멘트를 계산하였다. 즉 회전관성은 유한요소 모델의 일관된 관성행렬(consistent mass matrix)의 회전 자유도에 해당하는 대각요소(diagonal entry)를 사용하였다⁽⁷⁾.

4. 회전 관성 모멘트의 효과

2장에서 언급한 운동 방정식을 통하여 회전관성 모멘트 효과를 고찰하기 위하여 Fig. 4와 같이 3개의 외팔보 모델을 설정하였다. 범용 구조해석 프로그램인 ANSYS⁽⁹⁾를 이용하여 외팔보는 8개의 3차원 보 요소로 모델링 하였고 Fig. 4(b)와 (c)의 디스크와 구는 질량요소로 모델링하였다. 모드 해석을 통해서 비틀림 모드와 굽힘 진동 모드를 구했으며 중간 처리기⁽⁸⁾를 이용하여 집중질량 및 회전 관성 모멘트를 생성했다.

Fig. 5는 보의 비틀림 진동에 대한 응답을 나타내고 있으며 x 축 방향의 회전관성이 가장 큰 구가 접속되어 있는 보의 경우가 가장 느린 반응을 보이고 있다. 또한 비틀림 진동해석에 있어서 회전관성을 포함하지 않은 경우는 비틀림 모드에 관한 모드의 특이성(singularity)에 의해 해석이 가능하지 않았다.

Fig. 6은 첨단에 디스크나 구가 부착되어 있지 않은 외팔보의 회전관성 모멘트를 포함한 경우와 포함하지 않은 경우의 굽힘진동에 대한 응답을 나타내고 있으며, 두 경우가 같은 응답을 보이고 있다. 이는 분포된 회전관성은 굽힘 진동응답에 거의 영향을 미치지 않음을 나타내고 있다.

Fig. 7은 회전 관성 모멘트에 대한 보의 굽힘 진동

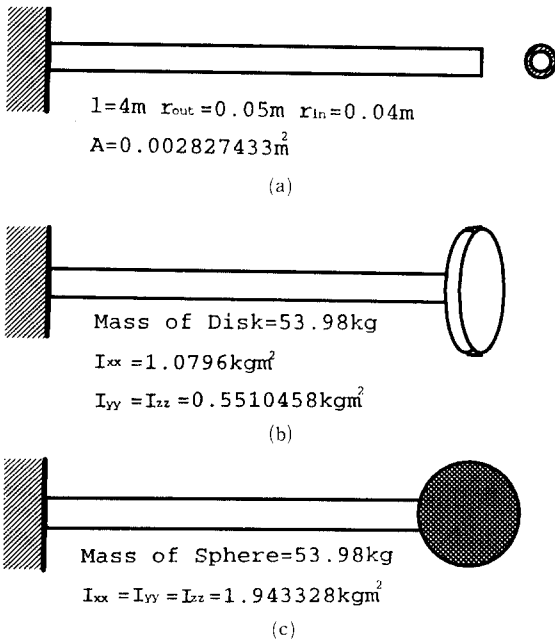


Fig. 4 Cantilever model

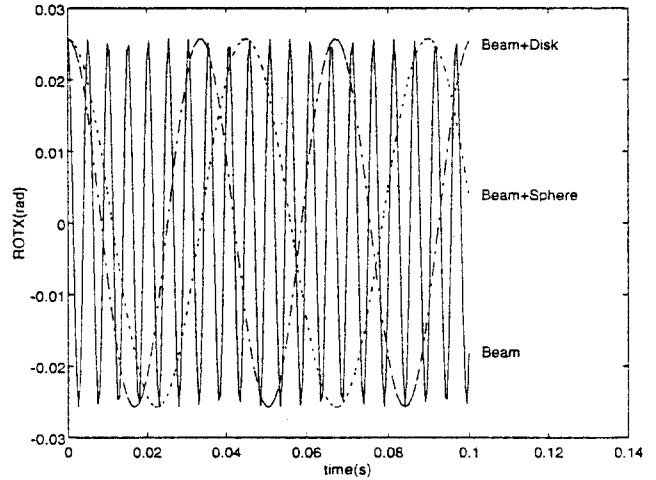


Fig. 5 Torsional displacement of the cantilever

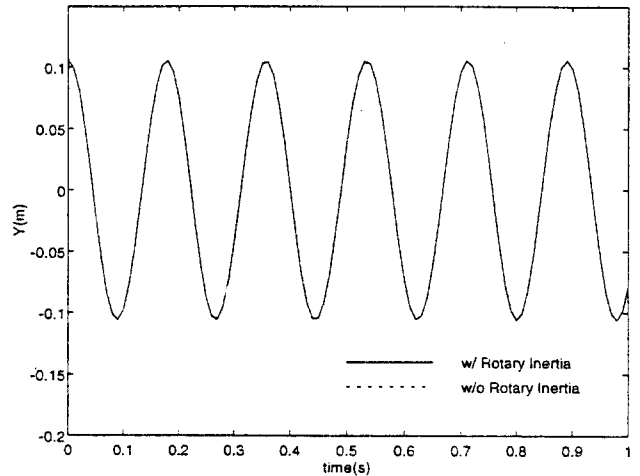


Fig. 6 Transversal displacement of the cantilever with and without rotary inertia

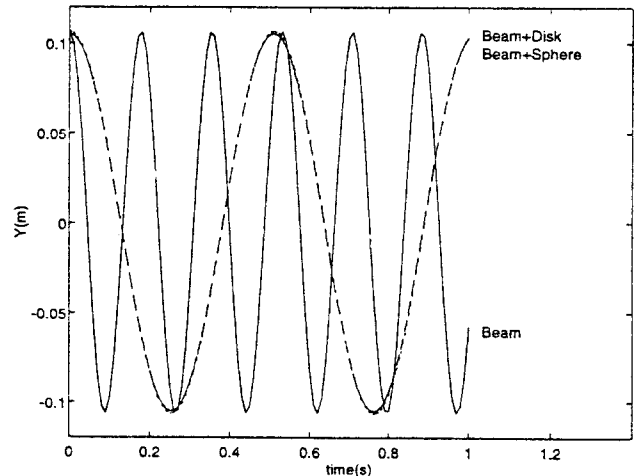


Fig. 7 Transversal displacement of the cantilever

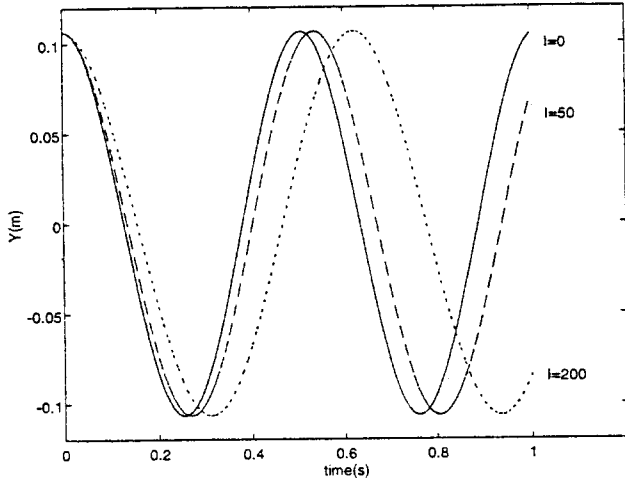


Fig. 8 Transversal displacement of the cantilever with various rotary inertia

에 관한 응답으로 Fig. 5에 비하여 느린 응답을 보이고 있다. 또한 Fig. 7에서 디스크가 부착된 경우나 구가 부착된 경우 굽힘 진동응답은 거의 같다. 이는 굽힘에 있어서는 회전 관성 모멘트의 효과보다는 집중질량의 경중이 더 중요함을 나타내고 있다. 이를 정량적으로 확인하기 위하여 보의 끝에 달려있는 구의 회전 관성 모멘트를 0, 50, 200으로 변화시켜 보았다. Fig. 8에서 같이 굽힘 진동의 응답은 회전관성 모멘트의 적은 양적 변화에는 별 변화가 없으며 50, 200과 같이 큰 회전 관성 모멘트의 구가 달려 있는 경우에 응답의 차이를 볼 수 있었다.

5. 탄성체 우주 로봇의 예

회전 관성 모멘트를 고려한 탄성 다물체 시스템 동역학 해석을 위하여 우주 로봇의 동역학 시뮬레이션이 수행되었다. Fig. 9에 나타난 탄성체 로봇은 2개의 긴 탄성체 팔과 2개의 강체 링크로 모델링되었

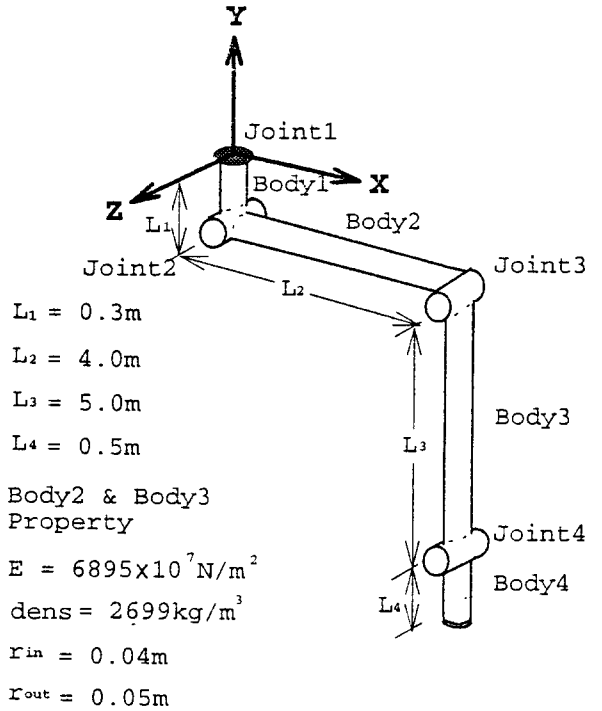


Fig. 9 A flexible manipulator system

고, 각 링크들은 회전 조인트(revolute joint)로 연결되었다⁽¹⁰⁾. 말단 링크(body 4)는 탄성체 로봇이 이동시킬 수 있는 하중(payload)을 포함하고 있다. 각 링크의 변형전의 질량과 관성 모멘트들은 Table 1에 주어졌다.

Fig. 10에 나타난 모드 해석을 위한 탄성체 팔의 유한요소 모델은 각각 8개와 10개의 3차원보 요소로 모델링 되었으며, 관절 부분의 구동기 하우징과 구동기를 모델링하기 위하여 질량 요소를 사용하였다. 각 관절에 집중된 질량과 관성 모멘트는 Table 2와 같이 선정하였다.

첫번째 탄성체 팔(body 2)의 변형을 고려하기 위해서 범용 구조해석 프로그램 ANSYS를 이용하여

Table 1 Inertia properties of the flexible manipulator system

Body No.	Mass(kg)	Principal moment of inertia(kgm ²)		
		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Body 1	50	0.0195	0.00469	0.0195
Body 2	45.786	0.09668	101.8122	101.8209
Body 3	57.234	0.11238	198.8017	198.8104
Body 4	160	0.007822	0.0834	0.0832

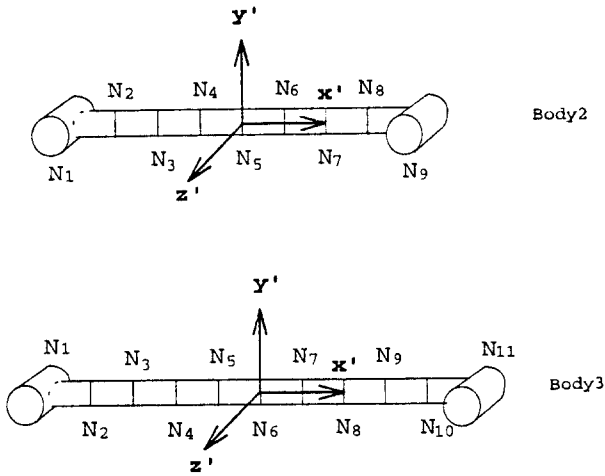


Fig. 10 Finite Element models of flexible arms

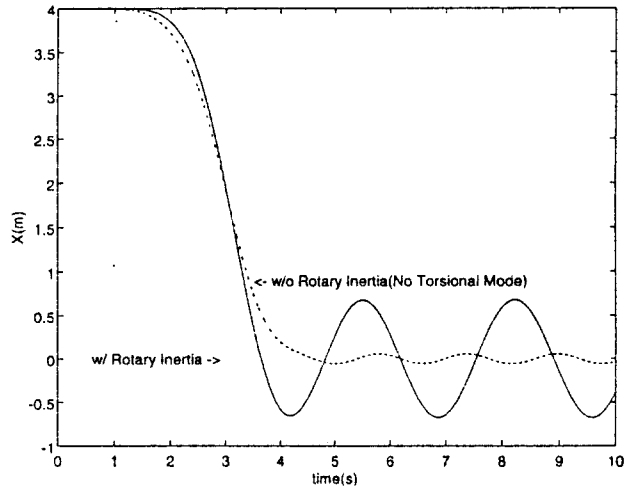


Fig. 11 X-Position of the end effector

Table 2 Lumped mass and rotary inertia of elbow joint

	Joint name	Mass(kg)	Principal moment of inertia(kgm ²)		
			I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Body 2	Joint 2	7.631	0.03616	0.03616	0.02146
	Joint 3	7.631	0.03616	0.03616	0.02146
Body 3	Joint 3	9.539	0.0451	0.0451	0.026828
	Joint 4	9.539	0.0451	0.0451	0.026828

진동 모드를 구했다. 경계조건으로는 외팔보의 경계 조건을 사용했으며, x' - y' 평면의 굽힘 모드와 x' - z' 평면의 굽힘 모드와 비틀림 모드를 선택하였고, 두 번째 탄성체 팔(body 3)의 변형을 고려하기 위해서는 마찬가지로의 경계조건으로 x' - y' 평면의 굽힘 모드와 x' - z' 평면의 굽힘 모드를 선택하였다.

탄성체 로봇의 1번 조인트를 제외한 나머지 조인트들은 제동기로 고정되고 1번 조인트는 아래와 같은 함수로 5초($T_s=5\text{sec}$) 동안에 90도 회전하도록 구동하였으며, 무중력 상태로 가정하여 시뮬레이션이 수행되었다.

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2T_s} \left(t - \frac{T_s}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \right), & 0 \leq t < T_s \\ \frac{\pi}{2}, & t \geq T_s \end{cases} \quad (30)$$

Fig. 11은 말단 링크의 x 좌표 위치를 나타내고 있으며 집중 질량만을 고려한 기존의 방법과 회전 관성 모멘트를 함께 고려한 방법이 비교되었다. 집중 질량만을 고려한 경우는 모드 관성 행렬(modal

mass matrix)의 특이성(singularity)에 의해서 비틀림 모드를 고려할 수 없고 오직 굽힘 모드만으로 시뮬레이션이 가능했으며, 회전관성 모멘트를 고려한 경우는 비틀림 진동도 함께 고려할 수 있었다.

6. 결론

본 연구에서는 탄성체 시스템의 거대운동(gross motion)에 수반된 굽힘과 비틀림 진동해석을 위하여 회전 관성 모멘트를 고려한 탄성 다물체 운동 방정식이 유도되었다. 대형 문제의 해석에도 적용 가능하도록 변형모우드 좌표계가 사용되었으며, 운동방정식의 유한 요소 모양함수로부터의 독립성을 위하여 이산화된 질점으로 구성된 탄성체 모델로부터 공식이 유도되었다. 또한 회전관성은 유한요소 모델의 일관된 관성행렬(consistent mass matrix)로부터 생성하였다. 이 공식은 보, 판, 셸 요소 등의 절점의 회전 자유도를 포함하고 있는 모델에 효과적이며, 보, 판, 셸 요소로 구성된 구조물에 큰 집중 질량과

큰 회전 관성 모멘트가 부착되어 있는 모델에 적용할 수 있다.

회전 관성 모멘트의 효과의 정량적 분석을 위하여, 외팔보의 굽힘 진동과 비틀림 진동해석을 수행하여 회전관성 효과를 고찰하였다. 회전 관성 모멘트는 비틀림 진동을 고려할 때 반드시 필요하며, 굽힘 진동에 있어서는 회전관성(rotary inertia) 효과보다는 집중질량(lumped mass)의 분포가 더욱 영향을 미쳤다. 분포된 회전관성 모멘트의 효과는 굽힘 진동응답에 있어서 거의 영향이 없었으며, 집중된 회전관성 모멘트가 부착된 경우에도 집중질량의 경중이 회전관성 모멘트의 변화보다 민감함을 알 수 있었다. 우주 로봇의 시뮬레이션을 통하여 탄성 다물체 해석이 수행되었으며, 회전관성 모멘트를 고려함으로써 집중질량(lumped mass)만을 고려할 때 가능하지 않았던 탄성체 팔의 비틀림 진동응답을 얻을 수 있었다.

후 기

이 논문은 1994년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

(1) Winfrey, R.C., 1971, "Elastic Link Mechanism Dynamics," Transaction of ASME, J. of Engineering for Industry, Vol. 93, No. 1, pp. 268~272.
 (2) Sadler, J.P. and Sandor, G.N., 1973, "A Lumped Parameter Approach to Vibration and Stress Analysis of Elastic Linkages," Transaction of ASME, J. of Engineering for Industry, Vol. 95, No. 4, pp. 549~557.
 (3) Song, J. O. and Haug, E. J., 1980, "Dynamic

Analysis of Planar Flexible Mechanisms," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 24, pp. 359~381.
 (4) Yoo, W.S. and Haug, E.J., 1986, "Dynamics of Articulated Structure, Part I: Theory," J. of Structural Mechanics, Vol. 14, No. 1, pp. 105~126.
 (5) Wu, S.C., Haug, E.J., and Kim, S.S., 1989, "A Variational Approach to Dynamics of Flexible Multibody Systems, J. of Mechanics of Structures and Mechanisms, Vol. 17, No. 1, pp. 3 ; 32.
 (6) Haug, E.J., 1989, Computer Aided Kinematics and Dynamics, Vol. I, Allyn & Bacon, Boston.
 (7) Huahn-Fern Yeh and Bernhard Dopker, 1989, "The Reduction of a Consistent Mass Matrix to a Lumped Mass Matrix", Center for Simulation and Design Optimization Department of Mechanical Engineering, The University of Iowa, Technical Report R-41.
 (8) 김성수, 유완석 외 3명, 1995, "유연 차량 동력학 해석 프로그램을 위한 중간 처리기 개발," 한국자동차공학회 추계학술대회 논문집, 제 1권, pp. 384~389.
 (9) Peter Kohnke, 1993, ANSYS User's Manual, Vol IV Theory, Swanson Analysis Systems, Inc.
 (10) Kim, S.S. and Haug, E.J., 1988, "A Recursive Formulation for Flexible Multibody Dynamics, Part I: Open-Loop Systems," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 293~314.
 (11) Greenwood, D.T., 1988, Principles of Dynamics, 2nd Edition, Prentice Hall, p. 392.
 (12) Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E., 1989, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc.