

〈論 文〉

보강재를 갖는 원통셸 구조물의 진동해석 알고리즘의 개발에 관한 연구

On Development of Vibrational Analysis Algorithm of Cylindrical Shell Structures with Stiffeners

문 덕 홍* · 여 동 준*

Deok-Hong Moon and Dong-Jun Yeo

(1996년 6월 11일 접수 ; 1996년 6월 29일 심사완료)

Key Words : Vibration Analysis(진동해석), Cylindrical Shell Structure(원통셸 구조물), Transfer Influence Coefficient Method(전달영향계수법), Transfer Matrix Method(전달행렬법), Dynamic Influence Coefficient(동적영향계수), Numerical Computation(수치계산)

ABSTRACT

In this paper, we formulated algorithm for free vibration analysis of cylindrical shells with stiffeners by applying the transfer influence coefficient method. This was developed as a vibration analysis method suitable for using personal computer(PC). The simple computational results from PC demonstrated the validity of the present algorithm, that is, the computational high accuracy and speed, and the flexibility of programming. We compared with results of the transfer matrix method and the reference. We also confirmed that the present algorithm could provide the solutions of high accuracy for system with a lots of intermediate rigid supports and stiffeners. And all boundary conditions and the intermediate stiff supports between shell and foundation could be treated only by adequately varying the values of the spring constants.

1. 서 론

링으로 보강된 원통형 셸은 유체나 가스운반용의 파이프나 여러가지 우주항공 분야의 구조요소로 자주 사용되고 있고, 그 진동특성을 규명하는 것은 설계상 매우 중요하며, 이미 많은 연구가 진행되어 왔다. Galletly⁽¹⁾는 에너지법을, Wah와 Hu⁽²⁾는 유한차분법을, Saito와 Yamaguchi⁽³⁾는 전달행렬법과 강성행렬법을 결합시키는 방법을, Al-Najafi와 Warburton⁽⁴⁾은 유한요소법을 이용하여 링보강된 고유진동수와 고유모드를 구하였다.

그러나 유한요소법의 이용은 범용적인 해석 프로그램의 개발은 수월하지만, 계의 자유도수가 증가하면 기억용량이 비교적 큰 컴퓨터가 필요하게 된다. 전달행렬법은 기억용량이 적은 퍼스널컴퓨터 정도로도 계산수행이 가능하나, 중간에 강성이 큰 탄성지지가 존재할 경우라든지, 고차의 진동수를 구할 경우에는 수치계산상 문제점이 지적되고 있다⁽⁵⁾.

이에 저자들은 퍼스널컴퓨터 이용에 적합한 고속·고정도의 구조해석 및 진동해석기법을 개발할 목적으로 전달영향계수법을 제안하여, 여러가지 형상의 진동해석에 적용하여 종래의 전달행렬법에 비해 계산정도 및 계산속도의 양면에서 매우 우수함을 보고하였다^(6,7).

본 연구에서는 동적영향계수의 축차전달에 그 기본개념을 두고 있는 전달영향계수법을 이용하여 보

*정회원, 부경대학교 공과대학 제어기계공학과

**정회원, 여수수산대학교 기관공학과

강재(stiffener)를 갖는 원통셀에 대한 고유진동수와 고유모드를 구하는 진동해석 알고리즘을 정식화하였다. 링보강재를 갖는 간단한 계산모델에 대한 수치 계산을 수행하고, 전달행렬법, Wah 등⁽²⁾ 및 Saito 등⁽³⁾의 결과와 비교·검토하여 본 기법의 유용성을 검증하였다.

2. 지배방정식

Fig. 1(a), (b)에서 보는 바와 같은 임의의 위치에 탄성스프링 또는 보강재를 갖는 원통셀에 대해, 원통셀의 중립면의 반경을 a , 원통셀의 두께를 h , 원통셀의 축방향 길이를 l , 원통좌표 x, ϕ 및 z 축 방향의 변위를 각각 u, v 및 w 라 한다. 해석 알고리즘의 정식화에 앞서 다음과 같은 가정을 한다.

(1) 셀의 두 경계, 즉 $x=0$ 및 $x=l$ 에서의 경계조건은 임의이다. x 축 방향에 있어서 원통셀에 스프링 지지가 존재하거나 보강재가 부착되어 있어 힘벡터

가 붙연속이 되는 곳을 나누어서 n 개의 요소로 분할한다. 분할된 원통셀 요소를 좌측에서부터 1에서 n 번째 요소라 부른다. 또한 j 번째 요소와 $j+1$ 번째 요소의 경계를 절원주(nodal circle) j 라 부른다.

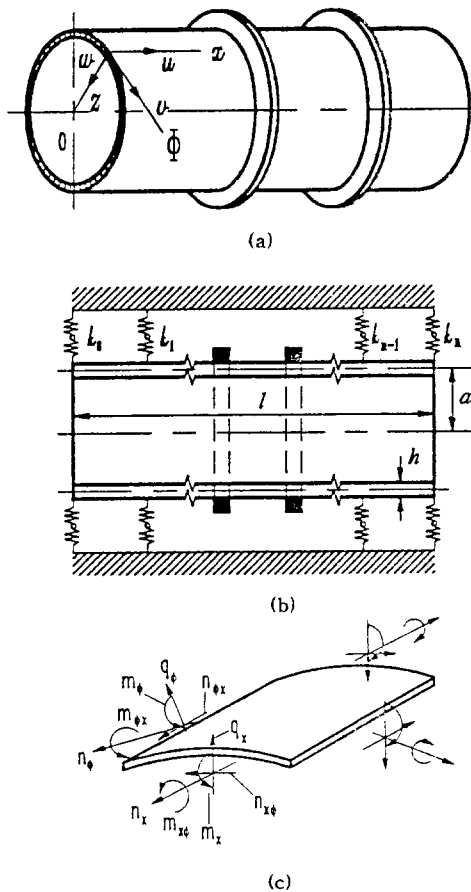
(2) 각 절원주에는 보강재가 견고하게 부착되어 있거나, 축, 원주 및 반경방향의 병진스프링, k_x, k_ϕ 및 k_z 와 원주에 대한 회전에 저항하는 회전스프링 k_r 로 지지되어 있다. 단, 각 경계의 절원주에는 스프링만으로 지지되어 있는 것으로 한다.

(3) 임의의 절원주 j 에서 x, ϕ 및 z 축 방향의 변위들과 ϕ 축 주위의 각변위는 연속이다.

(4) 보강재의 폭은 셀의 길이에 비해 대단히 작으며, 절원주를 따라 한 선으로 단단히 부착되어 있는 것으로 한다.

기호 위에 (-)가 붙은 것은 무차원량이고, (-)가 붙지 않는 것은 차원량이다. 또한 ~가 붙은 것은 절원주 좌측의 무차원 물리량이며, ^가 붙은 것은 절원주 우측의 무차원 물리량이다. 위첨자 t 는 행렬의 전치를 나타내고, 하첨자 j 는 절원주 j 또는 j 번째 원통셀 요소의 물리량을 나타낸다.

임의의 원통셀 요소의 힘과 모멘트에 대한 상태량들의 양의 방향이 Fig. 1(c)와 같을 때, 운동방정식은 다음과 같다⁽⁶⁾.



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_x}{\partial x_j} + \frac{\partial n_{\phi x}}{a \partial \phi} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial n_{x\phi}}{\partial x_j} + \frac{\partial n_\phi}{a \partial \phi} - \frac{1}{a} q_\phi - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial q_x}{\partial x_j} + \frac{\partial q_\phi}{a \partial \phi} + \frac{1}{a} n_\phi - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial m_x}{\partial x_j} + \frac{\partial m_{\phi x}}{a \partial \phi} + q_x &= 0, \\
 \frac{\partial m_{x\phi}}{\partial x_j} + \frac{\partial m_\phi}{a \partial \phi} + q_\phi &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 ρ 는 셀의 밀도, t 는 시간이다. Kelvin-Kirchhoff 막력과 전단력은 다음과 같다.

$$r_x = n_{x\phi} + \frac{1}{a} m_{x\phi}, \quad s_x = q_x - \frac{\partial m_{x\phi}}{a \partial \phi} \tag{2}$$

막력의 각 성분은

$$\begin{aligned}
 n_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\nu}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \right\}, \\
 n_\phi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \right\}, \\
 n_{x\phi} &= n_{\phi x} + \frac{1-\nu}{a^2} D_s \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right), \\
 n_{\phi x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{a \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Fig. 1 Stiffened cylindrical shell with coordinate convention

이고, 모멘트의 각 성분은

$$\begin{aligned} m_x &= D_s \left\{ \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right\}, \\ m_\phi &= D_s \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right\}, \\ m_{x\phi} &= m_{\phi x} = \frac{(1-\nu) D_s}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

이다. 여기서 ν 는 프외송 비, E 는 종탄성계수, $D_s [= Eh^3/12(1-\nu^2)]$ 는 셀의 굽힘강성이다.

원통셀 요소가 조화운동을 한다고 가정할 때, 변위성분과 힘성분들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (u, w, \phi) &= [U_j(x_j), W_j(x_j), \Psi_j(x_j)] \\ &\quad \times \cos \eta \phi \cdot e^{i\omega t}, \\ (v, r_x) &= [V_j(x_j), R_{xj}(x_j)] \sin \eta \phi \cdot e^{i\omega t}, \\ (n_x, s_x, m_x) &= [N_{xj}(x_j), S_{xj}(x_j), M_{xj}(x_j)] \\ &\quad \times \cos \eta \phi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 η 는 원주방향의 반파수, ω 는 고유 각 진동수이다. 그리고 각 변위는

$$\phi = \frac{\partial w}{\partial x_j} \quad (6)$$

해석의 간편함을 위해 도입되는 무차원 양들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{a}, \quad \bar{l} = \frac{l}{a}, \quad \xi_j = \frac{x_j}{l}, \quad \bar{U}_j = \frac{U_j}{h}, \\ \bar{V}_j &= \frac{V_j}{h}, \quad \bar{W}_j = \frac{W_j}{h}, \quad \bar{\Psi}_j = \frac{a}{h} \Psi_j, \\ \bar{N}_{xj} &= \frac{a^2}{D_s} N_{xj}, \quad \bar{R}_{xj} = \frac{a^2}{D_s} R_{xj}, \quad \bar{S}_{xj} = \frac{a^2}{D_s} S_{xj}, \\ \bar{M}_{xj} &= \frac{a}{D_s} M_{xj}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho a^2 h^3 \omega^2}{12 D_s} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (5)를 식 (1)~(4)와 (6)에 대입하여 변형한 후, 식 (7)의 무차원량을 대입하여 행렬 미분방정식으로 나타내면

$$\frac{d}{d\xi_j} \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) = \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) \quad (8)$$

여기서 $\bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j)$ 는 국부좌표 ξ_j 에 있어서의 상태량 벡터이고, \mathbf{A}_j 는 8×8 의 계수행렬이며, 그 요소들은

$$\begin{aligned} b_{12} &= -\nu \eta \bar{l}, \quad b_{13} = \nu \bar{l}, \quad b_{15} = \bar{h} \bar{l} / 12, \\ b_{21} &= 3\eta \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \quad b_{24} = \eta \bar{h}^2 \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \\ b_{26} &= \bar{h} \bar{l} / \{ (2(1-\nu)(3 + \bar{h}^2)) \}, \quad b_{34} = \bar{l}, \\ b_{42} &= b_{12}, \quad b_{43} = \nu \eta^2 \bar{l}, \quad b_{48} = \bar{l} / \bar{h}, \\ b_{51} &= \{ 6(1-\nu) \eta^2 \bar{h} \bar{l} / (3 + \bar{h}^2) - 12 \bar{l} \lambda^2 / \bar{h} \}, \\ b_{54} &= -6(1-\nu) \eta^2 \bar{h} \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \quad b_{56} = -b_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{62} &= \{ (1-\nu^2) \eta^2 (12 + \bar{h}^2) - 12 \lambda^2 \} \bar{l} / \bar{h}, \\ b_{63} &= -(1-\nu^2) (12 + \eta^2 \bar{h}^2) \eta \bar{l} / \bar{h}, \\ b_{65} &= -b_{12}, \quad b_{68} = -b_{12}, \quad b_{72} = b_{63}, \\ b_{73} &= \{ (1-\nu^2) (12 + \eta^4 \bar{h}^2) - 12 \lambda^2 \} \bar{l} / \bar{h}, \\ b_{75} &= -b_{13}, \quad b_{78} = -b_{43}, \\ b_{81} &= -6(1-\nu) \eta^2 \bar{h} \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \\ b_{84} &= -b_{81}, \quad b_{86} = -b_{24}, \quad b_{87} = -b_{34} \end{aligned} \quad (9)$$

이고, 상기 이외의 계수 항은 0이다. 식 (8)을 풀면

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) &= \mathbf{F}_j(\xi_j) \bar{\mathbf{Z}}_j(0), \\ \frac{d}{d\xi_j} \mathbf{F}_j(\xi_j) &= \mathbf{A}_j \mathbf{F}_j(\xi_j) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 필드 전달행렬 $\mathbf{F}_j(\xi_j)$ 는 다음의 멱급수식을 이용하여 행렬의 요소들을 구하였다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j(\xi_j) &= e^{\mathbf{A}_j \xi_j} \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{A}_j \xi_j + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_j^2 \xi_j^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}_j^3 \xi_j^3 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

임의의 j 번째 요소 좌·우측의 절원주 $j-1$ 과 j 에 있어서의 상태량벡터 $\bar{\mathbf{Z}}_{j-1}(\xi_{j-1}) = ({}^t \bar{\mathbf{d}}_{j-1}, {}^t \bar{\mathbf{f}}_{j-1})$ 과 $\bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) = ({}^t \bar{\mathbf{d}}_j, {}^t \bar{\mathbf{f}}_j)$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) = \bar{\mathbf{F}}_j(\xi_j) \bar{\mathbf{Z}}_{j-1}(\xi_{j-1}) \quad (12)$$

식 (12)를 변위벡터 $\bar{\mathbf{d}}_j = ({}^t \bar{U}_j, {}^t \bar{V}_j, {}^t \bar{W}_j, {}^t \bar{\Psi}_j)$ 와 힘벡터 $\bar{\mathbf{f}}_j = ({}^t \bar{N}_{xj}, {}^t \bar{R}_{xj}, {}^t \bar{S}_{xj}, {}^t \bar{M}_{xj})$ 에 대한 부분행렬로 재정리하면

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_{j-1} \quad (13)$$

로 되고, $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 및 \mathbf{D}_j 는 4×4 의 정방행렬이며, 식 (13)을 $\bar{\mathbf{Z}}_{j-1}$ 에 대하여 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{D} & -{}^t \mathbf{B} \\ -{}^t \mathbf{C} & {}^t \mathbf{A} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_{j-1} \quad (14)$$

식 (13)과 (14)의 우변의 계수행렬은 서로 역행렬의 관계에 있다.

Fig. 2와 같은 링보강재 부분에 있어서, x, ϕ 및 z 축 방향의 변위를 각각 u_s, v_s 및 w_s 라 하고, ϕ 축 둘레의 각 변위를 ψ_s 라 하면, 링보강재의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{nx}}{\partial \phi} + a n_x &= \rho_s a_s A_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial p_{rx}}{\partial \phi} - p_{sx} + a r_x &= \rho_s a_s A_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2}, \\ p_{rx} + \frac{\partial p_{sx}}{\partial \phi} + a s_x &= \rho_s a_s A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

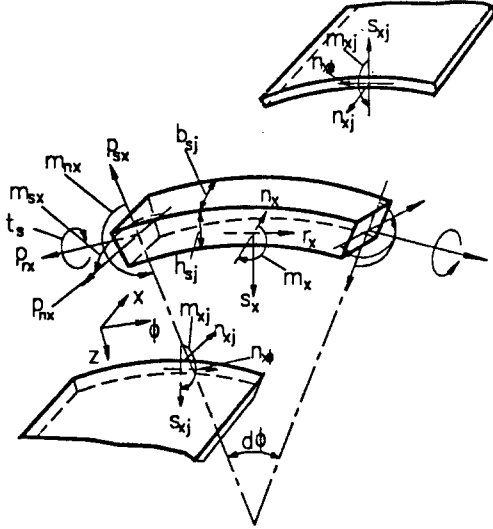


Fig. 2 Ring element and interaction forces with sign convention

$$\begin{aligned}
 a_s p_{rx} - \frac{\partial m_{sx}}{\partial \phi} - a_s e_s r_x &= \rho_s I_x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial \phi} + v_s \right), \\
 a_s p_{nx} + \frac{\partial m_{nx}}{\partial \phi} + t_s &= \rho_s I_z \frac{\partial^3 u_s}{\partial t^2 \partial \phi}, \\
 \frac{\partial t_s}{\partial \phi} - m_{nx} - a e_s n_x + a m_x &= a_s \rho_s I_p \frac{\partial \psi_s^2}{\partial t^2} \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서 a_s 는 링보강재 도심에서의 반경, b_s 와 h_s 는 링보강재의 폭과 깊이, $A_s (= b_s \times h_s)$ 는 링보강재의 단면적, $e_s (= a_s - a)$ 는 보강재의 편심, E_s 및 G_s 는 보강재의 종 및 횡탄성계수, ρ_s 는 링보강재의 밀도, I_x , I_z 및 I_p 는 링보강재의 x 와 z 축에 대한 단면 2차 모멘트 및 극관성 모멘트이다.

링보강재의 단면 위에 작용하는 힘과 모멘트 그리고 변위성분과의 관계⁽⁹⁾는

$$\begin{aligned}
 p_{rx} &= \frac{E_s A_s}{a_s} \left(\frac{\partial v_s}{\partial \phi} - w_s \right), \\
 m_{sx} &= \frac{E_s I_x}{a_s^2} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right), \\
 m_{nx} &= \frac{E_s I_z}{a_s} \left(\psi_s + \frac{1}{a_s} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \phi^2} \right), \\
 t_s &= -\frac{G_s J_s}{a_s} \left(\frac{1}{a_s} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

여기서 $G_s J_s$ 는 비틀림 강성이고, J_s 는 비틀림 상수로서 $b_s \times h_s$ 의 사각형 단면에 대해서는 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$J_s = \frac{1}{3} b_s h_s^3 \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{h_s}{b_s} \sum_{\beta=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\beta^5} \tanh \beta \pi \frac{b_s}{2 h_s} \right) \quad (17)$$

한편 보강재가 부착된 곳에 있어서 변위의 적합조건으로부터

$$\begin{aligned}
 u_s &= u + e_s \psi_s, \\
 v_s &= a_s v + e_s \frac{\partial w}{\partial \phi}, \\
 w_s &= w, \quad \psi_s = \psi \quad (18)
 \end{aligned}$$

로 되고, 보강재 부분에 있어서, 도입되는 무차원 양들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_s &= \frac{A_s}{h^2}, \quad \bar{e}_s = \frac{e_s}{h}, \quad \bar{a}_s = \frac{a_s}{a}, \quad \bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{\rho}, \\
 \bar{E}_s &= \frac{E_s}{E}, \quad \bar{G}_s = \frac{G_s}{E}, \quad \bar{I}_x = \frac{I_x}{h^4}, \quad \bar{I}_z = \frac{I_z}{h^4}, \\
 \bar{I}_p &= \frac{I_p}{h^4}, \quad \bar{J}_s = \frac{J_s}{h^4} \quad (19)
 \end{aligned}$$

절원주 j 에 보강재가 있는 경우는 식 (5), (16) 및 (18)을 식 (15)에 대입하여 변형한 후, 식 (19)를 대입하여 정리하고, 스프링이 있는 경우는 스프링의 탄성을 고려해서, 절원주 j 의 좌·우측의 상태 벡터 사이의 관계를 구하면

$$\bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) = \mathbf{P}_j(\xi_j) \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) \quad (20)$$

여기서 $\mathbf{P}_j(\xi_j)$ 는 절원주 j 에서 좌·우측 사이의 전달행렬인 8×8 의 포인트 전달행렬이다.

식 (20)을 변위벡터 $\bar{\mathbf{d}}_j = {}^t(\bar{U}_j, \bar{V}_j, \bar{W}_j, \bar{\Psi}_j)$ 와 힘 벡터 $\bar{\mathbf{f}}_j = {}^t(\bar{N}_{xj}, \bar{R}_{xj}, \bar{S}_{xj}, \bar{M}_{xj})$ 를 전달행렬인 $\mathbf{P}_j(\xi_j)$ 의 부분 행렬로 재정리해서 나타내면

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j \quad (21)$$

여기서 \mathbf{I} 는 단위행렬(unit matrix), \mathbf{O} 는 영행렬(null matrix)이다.

절원주 j 의 좌측과 우측에 있어서, 힘의 평형조건으로부터

$$\bar{\mathbf{f}}_j = \bar{\mathbf{f}}_j - \mathbf{K}_j \bar{\mathbf{d}}_j \quad (22)$$

여기서

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} K_{11}^c + \bar{k}_x & 0 & 0 & K_{14}^c \\ 0 & K_{22}^c + \bar{k}_\phi & K_{23}^c & 0 \\ 0 & K_{32}^c & K_{33}^c + \bar{k}_z & 0 \\ K_{41}^c & 0 & 0 & K_{44}^c + \bar{k}_r \end{bmatrix} \quad (23)$$

이고, \mathbf{K}_j 의 요소 값들과 스프링상수들의 무차원량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_{11}^c &= r_1, \quad K_{14}^c = \bar{h} \bar{e}_r r_1 - r_2, \quad K_{22}^c = \frac{r_3}{r_5}, \\
 K_{23}^c &= \frac{(n \bar{h} \bar{e}_s r_3 - r_4)}{\bar{a}_s r_5}, \quad K_{32}^c = K_{23}^c,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{33}^c &= r_7 + \frac{n\bar{h}\bar{e}_s r_6}{\bar{a}_s r_4}, \quad K_{41}^c = K_{14}^c, \\
 K_{44}^c &= \bar{h}\bar{e}_s r_8 + r_9, \\
 (\bar{k}_x, \bar{k}_\phi, \bar{k}_z) &= \frac{a^2 h}{D_s} (k_x, k_\phi, k_z), \\
 \bar{k}_r &= \frac{ah}{D_s} k_r.
 \end{aligned} \tag{24}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 12 \left\{ (1-\nu^2) (n^2 \bar{E}_s \bar{I}_z + \bar{G}_s \bar{J}_s) \frac{n^2 \bar{h}^2}{\bar{a}_s^3} \right. \\
 &\quad \left. - \bar{a}_s \bar{\rho}_s \lambda^2 \left(\bar{A}_s + \frac{n^2 \bar{h}^2 \bar{I}_x}{\bar{a}_s^2} \right) \right\}, \\
 r_2 &= 12 (1-\nu^2) (\bar{E}_s \bar{I}_z + \bar{G}_s \bar{J}_s) \frac{n^2 \bar{h}^2}{\bar{a}_s^2}, \\
 r_3 &= 12 (\bar{A}_s \bar{a}_s^2 + \bar{h}^2 \bar{I}_x) \times \left\{ (1-\nu^2) \frac{n^2 \bar{E}_s}{\bar{a}_s^2} - \bar{\rho}_s \lambda^2 \right\}, \\
 r_4 &= 12 \left\{ (1-\nu^2) \bar{E}_s \left(\bar{A}_s + \frac{n^2 \bar{h}^2 \bar{I}_x}{\bar{a}_s^2} \right) - \bar{h}^2 \bar{I}_x \bar{\rho}_s \lambda^2 \right\}, \\
 r_5 &= 1 - \frac{\bar{h}\bar{e}_s}{\bar{a}_s}, \\
 r_6 &= \frac{(n\bar{h}\bar{e}_s b_3 + b_4)}{\bar{a}_s}, \\
 r_7 &= 12 \bar{a}_s \bar{E}_s \left\{ (1-\nu^2) \frac{(\bar{A}_s \bar{a}_s^2 + n^4 \bar{h}^2 \bar{I}_x)}{\bar{a}_s^3} \right. \\
 &\quad \left. - \bar{\rho}_s \lambda^2 \left(\bar{A}_s + \frac{n^2 \bar{h}^2 \bar{I}_x}{\bar{a}_s^2} \right) \right\} + \frac{n\bar{h}\bar{e}_s r_4}{\bar{a}_s}, \\
 r_8 &= n\bar{h}\bar{e}_s r_1 + r_2, \\
 r_9 &= 12 \bar{h}^2 \bar{a}_s \left\{ (1-\nu^2) \frac{\bar{E}_s \bar{I}_z + n^2 \bar{G}_s \bar{J}_s}{\bar{a}_s^3} \right. \\
 &\quad \left. + \bar{I}_p \bar{\rho}_s \lambda^2 \right\} + \bar{h}\bar{e}_s r_2
 \end{aligned} \tag{25}$$

3. 동적영향계수 행렬의 전달

입의 절원주 j 의 좌측과 우측에서 변위벡터 \bar{d}_j , 힘벡터 \bar{f}_j , \bar{f}_j 사이의 관계를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \bar{d}_j &= \bar{T}_j \bar{f}_j, \quad \bar{T}_j = {}^t \bar{T}_j, \\
 \bar{d}_j &= \bar{T}_j \bar{f}_j, \quad \bar{T}_j = {}^t \bar{T}_j
 \end{aligned} \tag{26}$$

여기서 \bar{T}_j , \bar{T}_j 는 4×4 의 대칭인 동적영향계수 행렬이다.

3.1 동적영향계수의 필드 및 포인트 전달

식 (14)와 (26)에서 j 번째 셀요소에 있어서 동적영향계수의 필드전달식은

$$X_j \bar{T}_j = H_j, \quad (j=2, \dots, n) \tag{27}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 X_j &= \bar{T}_{j-1} {}^t C_j + {}^t D_j, \\
 H_j &= \bar{T}_{j-1} {}^t A_j + {}^t B_j
 \end{aligned} \tag{28}$$

식 (22)와 (26)에서 동적영향계수의 포인트전달식은

$$\bar{X}_j \bar{T}_j = \bar{T}_j \tag{29}$$

여기서

$$\bar{X}_j = I_j + \bar{T}_j P \tag{30}$$

상기의 필드 및 포인트전달식을 결합시키면, 식 (27)과 (29)로부터 필드-포인트 전달식은

$$Y_j \bar{T}_j = H_j, \quad (j=2, \dots, n) \tag{31}$$

여기서

$$Y_j = X_j + H_j K_j \tag{32}$$

이고, 식 (31)은 필드와 포인트 전달식을 하나로 결합시킨 식이므로, 이 식을 이용하면 계산시간을 훨씬 단축시킬 수 있다.

3.2 절원주 0에서의 동적영향계수 행렬

본 해석법에 있어서는 계산시점의 경계조건을 처음부터 고려해야 한다. 즉 원통형 셀의 좌측의 경계선인 절원주 0을 스프링지지로 간주하였으므로, 식 (22)에 절원주 0의 좌측 힘벡터 $\bar{f}_0 = \mathbf{0}$ 을 대입하고, 식 (26)의 관계로부터 절원주 0의 우측에 대한 동적영향계수 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\bar{T}_0 = K_0^{-1} \tag{33}$$

여기서 K_0 는 식 (23)에서 보강재에 의한 요소들은 전부 0이고, 대각선상에 스프링 상수 \bar{k}_x , \bar{k}_ϕ , \bar{k}_z 및 \bar{k}_r 만을 갖는 절원주 0에서의 포인트 강성행렬이다.

그러나 K_0 가 특이행렬인 경우, K_0 의 역행렬이 구하여지지 않으므로, 절원주 0과 절원주 1 사이의 동적영향계수의 전달과정은 K_0 를 그대로 사용한 다음 식을 사용한다.

$$X_1 \bar{T}_1 = H_1 \tag{34}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 X_1 &= {}^t C_1 + K_0 {}^t D_1, \\
 H_1 &= {}^t A_1 + K_0 {}^t B_1
 \end{aligned} \tag{35}$$

식 (35)의 K_0 의 요소인 스프링상수 \bar{k}_x , \bar{k}_ϕ , \bar{k}_z 및 \bar{k}_r 의 값들을 적절히 변경시킴으로써 모든 경계조건에 대응시킬 수 있다.

4. 진동수방정식

4.1 전달행렬법에 의한 진동수방정식

원통셀의 양단에서의 상태벡터의 관계식은 식 (12)와 (20)에 의해

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_n(\xi_n) &= \mathbf{P}_n(\xi_n) \prod_{j=1}^n \mathbf{F}_j(\xi_j) \mathbf{P}_j(\xi_j) \tilde{\mathbf{Z}}_0(0) \\ &= \Delta_n \tilde{\mathbf{Z}}_0(0) \end{aligned} \quad (36)$$

로 되므로, 식 (36)에 임의의 경계조건을 대입하면 전달행렬법에 의한 진동수방정식을 얻을 수 있다. 예로서 양단 단순지지일 경우의 경계조건은

$$x=0, \quad l; \quad \hat{V} = \hat{W} = \hat{N}_x = \hat{M}_x = 0 \quad (37)$$

로 되므로, 식 (37)을 (36)에 대입하면 전달행렬법의 진동수방정식은

$$\det \begin{vmatrix} \Delta_{21} & \Delta_{24} & \Delta_{26} & \Delta_{27} \\ \Delta_{31} & \Delta_{34} & \Delta_{36} & \Delta_{37} \\ \Delta_{51} & \Delta_{54} & \Delta_{56} & \Delta_{57} \\ \Delta_{81} & \Delta_{84} & \Delta_{86} & \Delta_{87} \end{vmatrix} = 0 \quad (38)$$

로 된다. 그 외의 경계조건에 대해서도 마찬가지로 형식으로 진동수방정식을 얻을 수 있다.

4.2 전달영향계수법에 의한 진동수방정식 및 거짓근의 해소법

전달영향계수법의 진동수방정식은 원통셀의 우측단의 경계조건을 스프링지지로 간주했으므로, $\mathbf{K}_n \neq \mathbf{0} (\hat{\mathbf{f}}_n \neq \mathbf{0}, \hat{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0})$ 이고, 여기서도 \mathbf{K}_n 은 대각선상에 순 스프링 상수만을 갖는다. 식 (22)에서 j 에 n 을 대입하면 $\hat{\mathbf{f}}_n = \hat{\mathbf{f}}_n - \mathbf{K}_n \hat{\mathbf{d}}_n$ 이 되고, 여기에 식 (26)에서 j 가 n 인 경우의 식 $\hat{\mathbf{d}}_n = \tilde{\mathbf{T}}_n \hat{\mathbf{f}}_n$ 을 대입하면

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}_n \tilde{\mathbf{T}}_n) \hat{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0} \quad (39)$$

로 된다. 식 (27)에서 j 에 n 을 대입한 식 $\mathbf{X}_n \tilde{\mathbf{T}}_n = \mathbf{H}_n$ 과 $\tilde{\mathbf{T}}_n$ 의 대칭성을 이용하면

$$\tilde{\mathbf{T}}_n = \mathbf{X}_n^{-1} \mathbf{H}_n = {}^t \mathbf{H}_n' \mathbf{X}_n^{-1} \quad (40)$$

로 되므로, 식 (40)을 식 (39)에 대입하면

$${}^t \mathbf{Y}_n' \mathbf{X}_n^{-1} \hat{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0} \quad (41)$$

여기서 $\hat{\mathbf{f}}_n \neq \mathbf{0}$ 이므로, 진동수방정식은

$$\begin{aligned} \det({}^t \mathbf{Y}_n' \mathbf{X}_n^{-1}) &= \frac{\det(\mathbf{Y}_n)}{\det(\mathbf{X}_n)} = 0 \\ \mathbf{Y}_n &\equiv \det(\mathbf{Y}_n) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

로 된다. 결과적으로 식 (42)는 \mathbf{Y}_n 속의 \mathbf{K}_n 의 스프

링 요소 즉, 스프링 상수값들을 변환시킴으로서 여러가지 경계조건에 대응시킬 수 있다. 또한 $\mathbf{K}_n = \mathbf{0}$ 인 경우, 즉 우측단이 자유단인 경우에도 성립할 수 있다.

진동수방정식 (42)에 이분법을 적용해서 고유진동수를 구할 경우, 참근 뿐만 아니라 거짓근(반대칭극)도 구하여진다.

이러한 거짓근의 발생원인과 해소법을 간략히 소개하면, 식 (42)의 계산에서 $Y_n (Y_j = \det(\mathbf{Y}_j), j = 2, \dots, n)$ 은 Y_{n-1} 의 영점에서 반대칭극을 갖게 되고, Y_{n-1} 은 Y_{n-2} 의 영점에서 반대칭극을 갖게 된다. 이러한 관계는 Y_2 까지 계속되고 Y_2 는 $\tilde{X}_1 (\tilde{X}_1 = \det(\tilde{\mathbf{X}}_1))$ 의 영점에서 반대칭극을 갖고, 최종적으로 $X_1 (X_1 = \det(\mathbf{X}_1))$ 의 영점은 \tilde{X}_1 의 반대칭극에 대응하므로 진동수방정식에 어떤 특별한 처리를 해서 이들 반대칭극을 제거하지 않으면 안된다. 그 방법으로 Y_n 에 $Y_{n-1}, \dots, Y_2, \tilde{X}_1$ 및 X_1 의 부호함수를 곱하여 얻어진 함수를 Γ_n 이라 하면, Γ_n 에 있어서 Y_n 의 모든 반대칭극은 대칭극으로 변환되고, 함수의 부호는 단지 Y_n 의 영점에서만 변화하게 된다. 이분법에서는 함수의 부호만을 필요로 하므로 Y_n 대신에 다음의 부호 함수식을 이용하여 고유진동수를 구한다.

$$\text{sgn}(\Gamma_n) = \text{sgn}(X_1) \cdot \text{sgn}(\tilde{X}_1) \prod_{j=2}^n \text{sgn}(Y_j) \quad (43)$$

따라서 진동수방정식 (42) 대신에 식 (43)을 사용함으로써, 모든 경계조건 및 중간조건을 스프링 상수의 값만을 다른 값만으로 대치시킴으로써 대응시킬 수 있으며, 동시에 거짓근도 해소할 수 있게 된다.

5. 고유모드의 계산

절원주 n 이 자유단($\mathbf{K}_n = \mathbf{0}$)인 경우, 절원주 n 에서 $\hat{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0}$ 이고, 일반적으로 절원주 $n-1$ 에서의 $\hat{\mathbf{f}}_{n-1} \neq \mathbf{0}$ 이므로, 식 (13)과 식 (26)에서 j 에 n 을 대입하면 $\hat{\mathbf{f}}_n = (\mathbf{C}_n \tilde{\mathbf{T}}_{n-1} + \mathbf{D}_n) \hat{\mathbf{f}}_{n-1}$ 로 된다. 이 식에서 $\hat{\mathbf{f}}_{n-1}$ 을 구하고, 식 (26)에서 $\hat{\mathbf{d}}_{n-1}$ 을 구한다. 절원주 n 에서의 변위벡터는 식 (13)과 식 (26)에서 얻어지는 $\hat{\mathbf{d}}_n = (\mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{T}}_{n-1} + \mathbf{B}_n) \hat{\mathbf{f}}_{n-1}$ 에 의해 구할 수 있다. 절원주 $n-2$ 에서 1까지의 상태량들은 식 (14), (22) 및 (26)에 의해 차례차례 역방향으로 구한다.

스프링지지단($\mathbf{K}_n \neq \mathbf{0}$)인 경우, $\hat{\mathbf{f}}_n \neq \mathbf{0}$ 이므로, 식 (39)의 $(\mathbf{I} + \mathbf{K}_n \tilde{\mathbf{T}}_n) \hat{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0}$ 에서 $\hat{\mathbf{f}}_n$ 을 구하고, 식 (26)에서 변위벡터를 구한다.

그러나 절원주 0에서의 변위벡터와 힘벡터는 식 (14)로부터 $\vec{d}_0 = 'D_1 \vec{d}_1 - 'B_1 \vec{f}_1$, $\vec{f}_0 = -'C_1 \vec{d}_1 + 'A_1 \vec{f}_1$ 에 의해 구한다.

6. 수치계산 결과 및 고찰

본 연구에서는 링보강재를 갖는 원통셀 구조물에 대해 본 기법의 유용성을 확인하기 위하여 수치계산을 수행하고, 링보강재를 갖는 경우에 대해서 전달영향계수법(TICM)에 의한 계산결과들을 전달행렬법(TMM), Wah 등⁽²⁾ 및 Saito 등⁽³⁾의 결과와 비교하여 알고리즘의 타당성을 확인하였다.

모델 1은 Fig. 3(a)와 같이 링보강재를 갖는 원통셀 구조물로서 계의 중간에는 등간격으로 배치된 보강재의 개수 $J=3$ 이고, 양단에는 경계조건에 대처하기 위해 지지스프링이 존재하는 모델이며, 모델 2는 Fig. 3(b)와 같이 모델 1에서 2번째 링보강재를 탄성스프링으로 대체한 모델이다. 모델 1, 2에서 셀의 두께는 5 mm, 반경 200 mm, 길이 600 mm이고, 셀과 보강재의 종탄성계수 $E = E_s = 2.067 \times 10^{11}$ N/m², 횡탄성계수 $G_s = 7.95 \times 10^{10}$ N/m², 밀도 $\rho = \rho_s = 7.84 \times 10^3$ kg/m³, $\nu = 0.3$ 이다. 또한 보강재의 폭과 길이는 각각 10 mm이다.

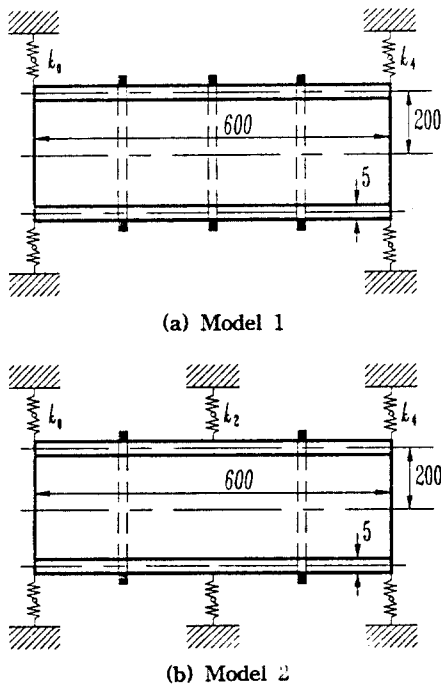


Fig. 3 Models for numerical calculation

사용된 계산기는 퍼스널컴퓨터(Pentium 100 MHz)와 슈퍼컴퓨터(Cray C90)이고, 사용언어는 Fortran이며, 변수는 퍼스널컴퓨터에서는 배정도 변수로, 슈퍼컴퓨터에서는 4배 정도 변수로 계산하였다. 또한 전달행렬의 급수 항은 식 (12)에서 70번째항까지 취해서 수렴 값으로 하였고, 무차원 고유진동수는 상대오차 10^{-9} 이하에서 수렴하는 것으로 하였다.

6.1 계산정도

Table 1은 14개의 등간격으로 설치된 링보강재를 갖는 양단 단순지지의 원통셀 구조물에 대해 TICM과 SUPER의 고유진동수(Hz)를 Wah 및 Saito 등의 결과와 비교하여 나타낸 것이다. Table 1에서 보면, 링보강재를 갖는 경우에도 TICM은 SUPER, Wah 등 및 Saito 등의 값들과 η 값의 변화에 관계없이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 퍼스널컴퓨터를 사용한 배정도 변수의 TMM에 의한 계산결과는 보강재의 강성항의 영향때문에 해를 전혀 구할 수가 없었다.

Table 1에서 TICM과 TMM은 배정도 변수를 써서 퍼스널컴퓨터로 계산한 것이고, SUPER는 TICM과 TMM 기법에 의해 4배정도 변수를 써서 슈퍼컴퓨터로 계산하였을 경우, 두 기법의 계산결과 값들이 일치한 것을 나타낸다. 그리고 이하에서 본 연구에서는 구하는 진동수 범위 내에서 슈퍼컴퓨터 상에서, 4배정도 변수를 사용한 TICM과 TMM의 계산결과들(SUPER)이 일치하였으므로 이들을 정해로 간주하였다.

Table 2는 Fig. 3(a)와 같은 수치계산 모델 1에 대해서 양단의 경계조건이 단순지지와 일단고정, 타단자유이고 원주방향의 반파수 $\eta=1$ 인 경우에 대한 TICM의 무차원 고유진동수(λ)를 TMM 및 SUPER와 비교하여 나타낸 것이다. Table 2에서 TICM의 계산결과는 SUPER와 완전히 일치하고 있다. 그리고 TMM의 계산결과는 양단 단순지지일 경우는 10차까지, 일단고정, 타단자유일 경우는 9차까지 정해를 구할 수 있고, 양단 단순지지일 경우의 11차에서 13차까지와 일단고정, 타단자유일 경우의 10차에서 12차까지는 정해가 구하여지지 않다가, 각각 14차와 13차 이상에서는 정해의 근방에서 해가 진동하여 해를 전혀 구할 수 없게 된다. 이것은 TMM의 단점, 즉 고차진동수 영역으로 갈수록 진동수가 계산정도를 저하시키기 때문이라고 생각된다.

TICM의 경우, 단순지지의 경계조건은 좌·우양단($j=0, j=n$)의 무차원 스프링 상수 값을 $\bar{k}_{\theta j} = \bar{k}_{zj}$

Table 1 Comparison of natural frequencies(Hz) for cylindrical shell with 14 elastic rings

η	Method	$h_s=3.957 \times 10^{-3}$	$h_s=6.762 \times 10^{-3}$	$h_s=9.567 \times 10^{-3}$
2	TICM	686.10498	673.57164	696.16007
	TMM	*****	*****	*****
	SUPER	686.10498	673.57164	696.16007
	Wah	686	674	697
	Saito	686.1	673.6	696.1
3	TICM	504.4609	733.53471	1056.6492
	TMM	*****	*****	*****
	SUPER	504.4609	733.53471	1056.6492
	Wah	505	735	1059
	Saito	504.5	733.5	1056.7
4	TICM	725.66125	1268.1446	1929.3080
	TMM	*****	*****	*****
	SUPER	725.66125	1268.1446	1929.3080
	Wah	727	1270	1934
	Saito	725.6	1268.1	1929.3
5	TICM	1121.8515	2010.6891	3048.1257
	TMM	*****	*****	*****
	SUPER	1121.8515	2010.6891	3048.1257
	Wah	1123	2015	3059
	Saito	1121.8	2010.7	3048.1

$=\infty$, $\bar{k}_{xj}=\bar{k}_{rj}=0$ 로 대치함으로서 대응시켰다. 또한 고정단의 경계조건은 한쪽단($j=0$ 또는 $j=n$)의 무차원 스프링 상수값을 $\bar{k}_{xj}=\bar{k}_{\phi j}=\bar{k}_{zj}=\bar{k}_{rj}=\infty$ 로 대치함으로서 처리할 수 있다. 실제의 계산에 있어서 ∞

의 값은 고유진동수가 포화할 정도의 큰 값인 10^{20} 을 수치상의 무한대로 간주하였다.

Table 3은 모델 2에 대해서 $\eta=1$ 일 때, TICM의 무차원 고유진동수 계산결과를 TMM 및 SUPER와

Table 2 Comparison nondimensional natural frequencies(λ) of cylindrical shell for Model 1

No.	Simply-supported			Clamped-free		
	TICM	TMM	SUPER	TICM	TMM	SUPER
1	0.3666721	0.3666721	0.3666721	0.1626543	0.1626543	0.1626543
2	0.5841389	0.5841389	0.5841389	0.4724147	0.4724147	0.4724147
3	0.7046518	0.7046518	0.7046518	0.7283970	0.7283970	0.7283970
4	0.8436016	0.8436016	0.8436016	0.8171895	0.8171895	0.8171895
5	0.9035253	0.9035253	0.9035253	0.8796000	0.8796000	0.8796000
6	0.9362499	0.9362499	0.9362499	0.9232913	0.9232913	0.9232913
7	0.9699474	0.9699474	0.9699474	0.9531657	0.9531657	0.9531657
8	1.0106628	1.0106628	1.0106628	0.9894064	0.9894064	0.9894064
9	1.0173402	1.0173402	1.0173402	1.0349501	1.0349501	1.0349501
10	1.0694219	1.0694218	1.0694219	1.1020800	1.1020797	1.1020800
11	1.1371795	1.1371803	1.1371795	1.1808378	1.1808383	1.1808378
12	1.2275237	1.2275500	1.2275237	1.2795463	1.2795463	1.2795463
13	1.3388144	1.3385749	1.3388144	1.2845117	*****	1.2845117
14	1.4607323	*****	1.4607323	1.3987948	*****	1.3987948

Table 3 Comparison nondimensional natural frequencies(λ) of cylindrical shell for Model 2

No.	$\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10^2$			$\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 4 \times 10^6$		
	TICM	TMM	SUPER	TICM	TMM	SUPER
1	0.1271860	0.1271861	0.1271860	0.6830411	0.6830469	0.6830411
2	0.1722324	0.1722327	0.1722324	0.6850409	0.6850413	0.6850409
3	0.4221320	0.4221319	0.4221320	0.9018824	0.9018831	0.9018824
4	0.6081004	0.6081004	0.6081004	0.9083416	0.9083413	0.9083416
5	0.7618461	0.7618461	0.7618461	0.9679776	0.9679775	0.9679776
6	0.8456507	0.8456507	0.8456507	0.9815643	0.9815645	0.9815643
7	0.9267796	0.9267796	0.9267796	1.0592931	1.0589981	1.0592931
8	0.9729225	0.9729225	0.9729225	1.0883247	1.0869272	1.0883247
9	1.0413398	1.0413398	1.0413398	1.2090343	*****	1.2090343
10	1.0650230	1.0650230	1.0650230	1.2595285	*****	1.2595285
11	1.1379747	1.1379747	1.1379747			
12	1.1880050	1.1880031	1.1880050			
13	1.2981230	1.2980660	1.2981230			
14	1.3062604	*****	1.3062604			

비교하여 나타낸 것이다. Table 3에서 TICM과 SUPER는 완전히 일치하고 있고, TMM은 스프링 상수값이 비교적 적은 $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10^2$, $\bar{k}_r = 0$ 일 경우는 2차에서 약간의 값의 차이가 생길 뿐 11차까지는 정해를 구할 수 있으나, 12차와 13차까지는 정해를 구할 수 없다가, [*****] 표시된 부분, 즉 14차 이상의 고차에서는 계산기상에서 오버플로우되어 전혀 해가 구하여지지 않는다. 또한 지지 스프링 상수값이 좀더 큰 값인 $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 4 \times 10^6$, $\bar{k}_r = 0$ 인 경우에도 TICM은 SUPER와 저차에서 고차까지 완전히 일치하고 있으나, TMM은 구해진 진동수 8차까지 중 5차에서만 정해와 일치하고 9차 이상의 고차에서는 전혀 해를 구할 수 없다. 이것은 TMM은 중간지지된 스프링 상수 값들이 커짐에 따라 고유진동수가 아직 포화상태에 있지 않음에도 불구하고, 전달행렬 요소내에는 스프링 상수 값들에 의해 요소간의 값들의 차가 극단적으로 커지므로 전술의 고차 진동에서와 같이 전달행렬의 사칙연산 과정에서 생기는 처리오차 때문이라 생각된다. 여기서 제시하지는 않았지만, $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 4 \times 10^7$ 이상에서는 TMM에 의해서는 전혀 해를 구할 수가 없게 된다.

Fig. 4는 Fig. 3(a)의 수치계산 모델 1에서 일단고정, 타단자유의 경계조건을 가질 때, 축방향의 모드 차수 $m=1$ 에 대해서 축방향의 길이비($\bar{l} = l/a$)의 변화에 따른 TICM과 TMM의 무차원 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. Fig. 4에서 보면, 길이비 \bar{l} 가 증가하면 η 값에 관계없이 무차원 고유진동수는 감소

하는 경향을 나타내고 있고, TICM은 \bar{l} 의 증가에 관계없이 무차원 고유진동수를 잘 구할 수 있다. 그러나 TMM은 $\bar{l} = 4.0$ 까지에서 $\eta=1, 2$ 에서는 무차원 고유진동수를 잘 구할 수 있으나, η 값이 3, 4로 증가함에 따라 해의 정도는 떨어지고 있고, $\bar{l} = 4.0$ 이상에서는 오버플로우 되어 전혀 무차원 고유진동수를 구할 수 없다.

Fig. 5는 Fig. 3(a)의 수치계산 모델 1에서 경계조건이 일단고정, 타단자유이고, 등간격으로 놓여진

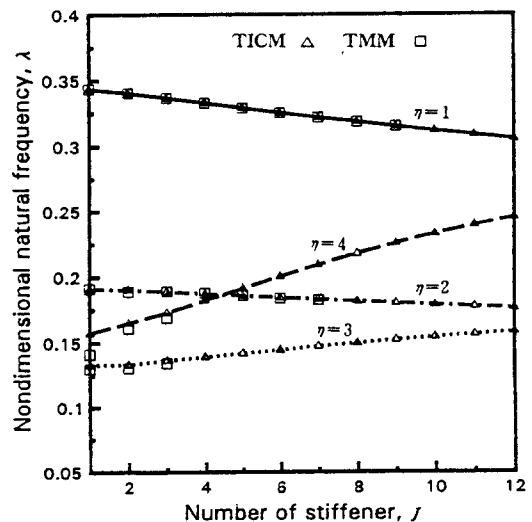


Fig. 4 Nondimensional natural frequencies versus length ratio of shell($m=1$)

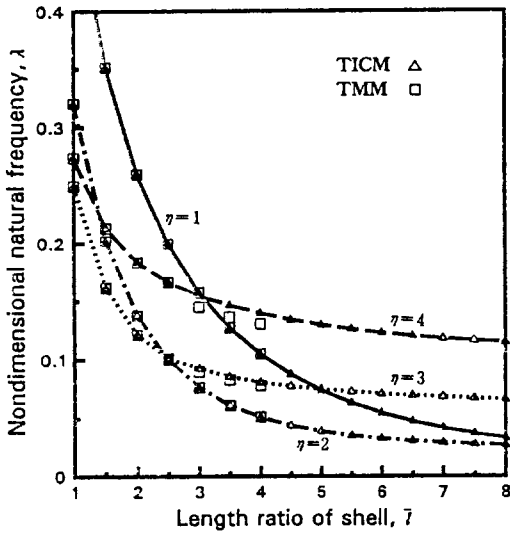


Fig. 5 Nondimensional natural frequencies versus number of stiffeners($m=2$)

링보강재 개수의 증가에 따른 고유진동수의 변화를 $m=2$ 에 대해 나타낸 것이다. Fig. 5에서 TICM으로는 보강재의 개수에 관계없이 무차원 고유진동수를 잘 구할 수 있으나, TMM에서는 $\eta=1$ 에서는 $J=9$ 까지, $\eta=2$ 에서는 $J=7$ 까지는 거의 정해를 구할 수 있고, $\eta=3, 4$ 에서는 비록 해의 정도는 조금 떨어지지만, $J=3$ 까지 해를 구할 수 있다. 그러므로 TMM에서는 보강재의 개수가 증가하거나, η 값이 커짐에 따라 해의 정도가 떨어짐을 알 수 있다. 이것은 전달행렬 요소간의 사칙연산 과정에서 생기는 값들의 오차가 보강재의 개수가 증가함에 따라 누적되어 나타나기 때문으로 생각된다.

6.2 고유모드

Fig. 6은 Fig. 3(b)의 수치계산 모델 2에서 스프링 상수 $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10^7$, $\bar{k}_r = 0$ 의 탄성지지에 대해서, 원주방향의 파의 수 $\eta=2$ 에 대한 1차에서 4차까지의 고유모드를 나타낸 것이다. Fig. 6에서 점선은 축방향의 변위(\bar{U}), 파선은 원주방향의 변위(\bar{V}), 실선은 반경방향의 변위(\bar{W})를 나타내며, 최대 변위를 1로 하여 축방향에 대하여 도시한 것이다.

Fig. 6에서 보면, 탄성지지가 되어 있는 양쪽 경계에서와 중앙에서는 스프링 상수값이 $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10^7$ 으로 대단히 크므로, 변위 \bar{U} , \bar{V} 및 \bar{W} 가 모두 0으로 나타나고 있다.

6.3 계산시간의 비교

TICM과 TMM의 계산속도를 Pentium급 퍼스널

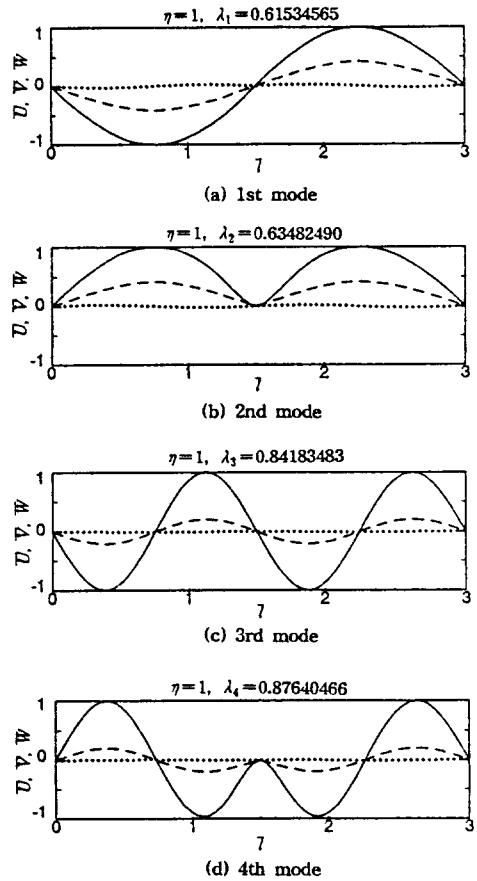


Fig. 6 Characteristic modes of cylindrical shell with stiffeners and elastic supports($\eta=2$)

컴퓨터를 사용해서 간단한 예로서 비교하였다. Table 2에서 양단 단순지지일 때의 진동수 범위 1차에서 10차까지(Case 1)와 Table 3에서 지지스프링의 값이 $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10^2$, $\bar{k}_r = 0$ 일 때의 진동수 범위 1차에서 11차까지(Case 2)에 대하여 초기 시행값을 10^{-3} 으로 하고, 증분값을 10^{-4} 으로 하였을 때의 무차원 고유진동수를 계산하는데 요하는 시간을 Table 4에 나타내었다. 이 결과로부터 Case 1과 2에서 TICM은 TMM보다 약 1.05배 정도 혹은 적어도 TMM보다는 계산속도가 빠른 것을 알 수 있다. 여기서 Roots는 각 경우에 있어서, 구하는 진동수 범위내의 고유진동수 개수를 나타낸다.

Table 4 Comparison of CPU time[sec]

Cases	TICM	TMM	Roots
Case 1	1067	1117	10
Case 2	1184	1240	11

7. 결 론

본 연구에서는 동적영향계수의 축차전달에 그 기본 개념을 둔 전달영향계수법을 이용하여 임의의 경계조건을 갖는 탄성지지와 링보강재를 갖는 원통셀의 진동해석에 적용해서, 고유진동수와 고유모드를 구하는 알고리즘을 체계화시켜 정식화한 후, 프로그램을 개발하였다. 간단한 계산모델에 대해 수치실험을 수행하여, 그 결과들을 전달행렬법, Wah 등 및 Saito 등의 결과와 비교·검토하여, 본 기법의 유용성을 검증하였고, 종래의 전달행렬법에 대해서 계산정도, 계산속도의 우수함을 확인하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 본 해석법은 전달행렬법으로는 구하기 곤란한 고차의 진동수에 대해서도 계산정도가 양호하다.

(2) 본 해석법은 셀 구조물의 중간에 강성이 큰 탄성지거나 보강재가 존재하더라도 유연성을 가지고 적용할 수 있다.

(3) 본 해석법은 동일한 조건에서 길이비 \bar{l} 의 증가에 관계없이 고유진동수를 잘 구할 수 있으나, 전달행렬법에서는 \bar{l} 의 일정한 값 이상에서는 고유진동수를 구할 수가 없다.

(4) 본 해석법에서는 여러가지 경계조건의 처리를 동일한 해석 알고리즘에 축, 원주, 반경 및 회전방향의 스프링 상수 값만을 적절하게 변경시킴으로서 대응시킬 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 핵심연구과제(No. 951-1002-058-1)의 연구비 지원에 의한 결과입니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Calletly, G. D., 1955, "On the In-Vacuo Vibrations of Simply Supported, Ring-Stiffened Cylindrical Shells," Proc. 2nd U. S. Natl. Congr. Appl. Mech. ASME, pp. 225~231.
- (2) Wah, T. and Hu, W. C. L., 1968, "Vibration Analysis of Stiffened Cylinders Including Inter-Ring Motion," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 43, No. 5, pp. 1005~1016.
- (3) Saito, H. and Yamaguchi, H., 1979, "Vibration Damping Characteristics of a Thin Cylindrical Shell Stiffened with Viscoelastic Rings," Ingenieur-Archiv, Vol. 48, No. 4, pp. 301~311.
- (4) Al-Najafi, A. M. J. and Warburton, G. B., 1970, "Free Vibration of Ring-Stiffened Cylindrical Shells," Journal of Sound and Vibration, Vol. 13, No. 1, pp. 9~25.
- (5) Pestel, E. C. and Leckie, F. A., 1963, Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, pp. 192~204, pp. 137~141.
- (6) 文德弘, 呂東俊, 1993, "傳達影響係數法에 의한 사각형 평판구조물의 自由振動 解析," 大韓機械學會論文集, 第17卷, 第3號, pp. 559~567.
- (7) 文德弘, 呂東俊, 崔銘秀, 1994, "다관절 보의 振動解析 알고리즘의 開發에 關한 研究," 韓國船用機關學會誌, 第18卷, 第5號, pp. 544~553.
- (8) Soedel, W., 1983, Vibrations of Shells and Plates, Marcel Dekker, New York, pp. 52~54.
- (9) Love, A. E. H., 1944, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York, pp. 452~454.
- (10) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1951, Theory of Elasticity, McGraw-Hill International Book Company, Tokyo, pp. 309~313.