

<論 文>

진자 시스템에서의 새로운 도약 현상의 실험적 관측과 이론적 해석

Experimental Observation of New Jumping Phenomena in the Pendulum System and Its Analytical Approach

최동준* · 정완섭** · 김수현***

Dong-June Choi, Wan-Sup Cheung and Soo-Hyun Kim

(1996년 4월 13일 접수 ; 1996년 7월 18일 심사완료)

Key Words : Jump Phenomena(도약 현상), Frequency Response Function(주파수 응답 함수), Pendulum System(진자 시스템), Soften Spring(유연 스프링), Ritz Averaging Method(Ritz의 평균법)

ABSTRACT

This paper introduces a newly designed pendulum system that enables the more accurate observation of dynamic behaviour arising from both horizontal and vertical(i.e. two dimension) excitation. First, experiments were carried out to examine the frequency responses of the devised pendulum system. Interestingly, experimental results for the three excitation angles of 22, 32 and 48 degree show 'new' jump phenomena. For the further understanding of these phenomena, experimental investigation has been made to identify the equation of motion of the pendulum system from experimental data. This attempt has revealed that the viscous, coulomb and aerodynamic damping factors are involved in the equation of motion. By applying the Ritz averaging method to the equation, it becomes apparent that the jumping phenomena of the pendulum system in this work is more theoretically understood.

기 호 설 명

- A : 진자 회전축
- A_0 : 고정 가진축(모터 회전축)
- C_1 : 점성 감쇠 계수[m/sec]
- C_2 : 쿨롱 감쇠 계수[m/sec]
- C_3 : 공기 역학적 감쇠 계수[m]
- f : 주파수[Hz]
- $f(\theta)$: 시스템 운동 방정식의 감쇠항[m/sec²]
- g : 중력 가속도[m/sec²]
- $K.E$: 운동 에너지[kg·m²/sec²]
- L : 진자 회전축에서 진자 집중 질량까지의 거리[m]
- M : 진자의 등가 집중 질량

- $P.E$: 위치 에너지[kg·m²/sec²]
- r : 고정 가진축과 진자 회전축까지의 거리[m]
- T : 주기[sec]
- ϕ : 모터축의 절대 회전각[radian]
- ϕ_m : 모터축의 가진 회전 진폭[radian]
- θ : 진자의 절대 회전각[radian]
- θ_m : 진자의 최대 회전 진폭[radian]
- ω : 각속도[radian/sec]
- Φ : 입력과 출력 신호간 위상차[radian]

1. 서 론

본 연구는 뉴턴이 소개한 진자 시스템을 다루게 되며, 외부에서 주기적 회전 가진을 인가할 때 일어나는 진자의 주파수 응답 특성에 관한 실험적 관찰과 이론적 해석을 다룬다.

*한국과학기술원 대학원

**정회원, 한국표준과학연구원 음향진동실

***한국과학기술원 기계공학과

진자 시스템에 대한 이전 연구는 진자의 회전축에 주기적인 가진을 인가하는 경우의 진자의 조화 응답 특성 고찰⁽¹⁻⁴⁾과 혼돈 역학⁽⁵⁻⁸⁾의 분석 및 관측에 집중되었다. 이들 연구는 진자 회전축의 가진 방법에 따라 세 가지, 즉 진자 회전축을 수평, 수직, 그리고 회전운동을 가하는 것으로 구분되어진다. 첫째, 수직 방향으로 주기적 가진을 인가하는 경우는 Skalak과 Yarymovych⁽¹⁾ 및 Struble⁽²⁻⁴⁾에 의해 수행되었으며, 이들은 저주파 조화 성분의 동적 응답 특성을 규명하였다. 둘째, 수평 방향으로의 가진 방법은 Cheung⁽⁹⁾에 의해 수행되었으며, 진자 시스템의 주기적 응답 특성을 고찰하는데 초점을 두고 실험적 고찰을 수행하였다. 셋째로 회전 가진 방법에서는, Koch와 Leven 등^(5,6)이 가진되는 진자 시스템에 대해 수치해를 구하고 실험 데이터와 비교하였고, Beckert와 Shock 등⁽⁷⁾은 비선형 비틀림 진자 시스템에서 주기 배가 현상과 혼돈 현상을 관찰하였다. Blackburn과 Yang Zhou-jing 등⁽⁸⁾은 감쇠를 조절할 수 있는 진자 시스템을 제작하고 혼돈 현상을 관찰하였다.

본 연구에서는 수직 방향과 수평 방향의 두 성분, 즉 2차원적 가진을 동시에 효율적으로 가할 수 있는 새로운 진자 시스템을 제시한다. 본 실험 장치의 자세한 구성은 2장에서 소개된다. 3가지 회전각(22°, 32° 및 48°)들의 주기적 입력 가진에서 관측된 진자의 주파수 응답에 대한 실험 결과와 이들에 대한 해석을 3장에서 수행하며, 이에 대한 이론적 해석은 4장에서 취급한다. 이러한 접근을 통해서 회전 진자

시스템에서의 '새로운' 도약 현상을 실험적 사실에 기초하여 규명한다. 끝으로 5장에서는 본 연구의 내용을 요약한다.

2. 실험 장치 개요

본 연구에서 새로이 고안된 진자 시스템의 전체적인 구성은 Fig. 1과 같다.

회전 진자부는 진자를 가진시켜 줄 서보 모터(Digiplan DSM50540), 전용 서보 구동 장치(Digiplan DS220) 및 진자의 회전각 측정을 위한 엔코더와 엔코더 신호 변환기로 구성되어 있다. 회전 진자는 스테인레스 강(stainless steel) 재질의 자(scale)를 사용하였고, 사양은 $185^L \times 15^W \times 0.45^T$ [mm]이다. 진자의 회전 운동 측정을 위하여 선정된 엔코더는 1000 ppr(pulses per revolution)의 분해능을 갖고 있으며, 90°의 위상차를 갖는 2가지의 엔코드 신호(A상, B상)를 이용하여 하나의 펄스를 4분주하여 한 회전을 4000등분함으로써 실제 측정 가능한 최소 변위량이 0.09°에 이른다. 이렇게 4분주된 회전각 신호는 16-bit 상하 계수기(up/down counter)에 의하여 디지털 신호로 변환되며, 이러한 디지털 신호는 16-bit D/A 변환기에 의하여 아날로그 형의 신호로 최종 출력된다. 이처럼 최종 출력을 아날로그로 한 이유는 본 연구와 같은 저주파수 실험에서는 데이터가 노이즈(noise)의 영향과 처리 시간이 길어야 하는 제약이 있기 때문에 데이터 분석 및 처리가 수월하도록 하기 위해서이다. 본 실험 장치에서 상하 계수

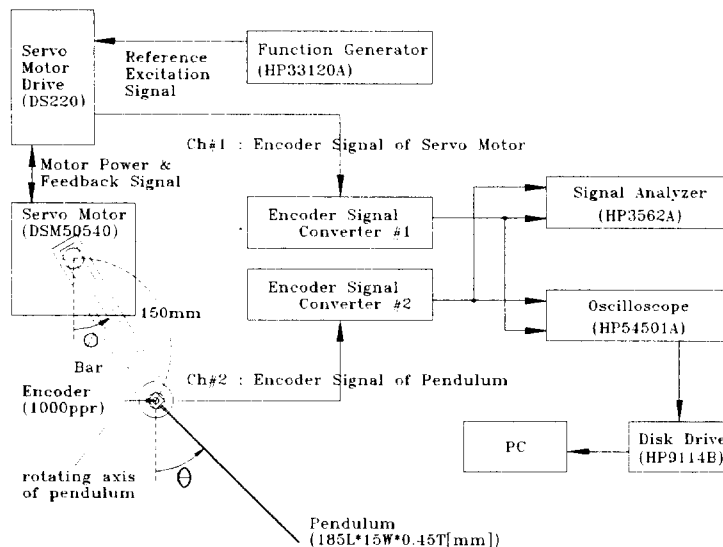


Fig. 1 Schematic diagram of experimental setup

기와 D/A변환기는 하나로 셋트화 되어서 엔코더 신호 변환기를 구성하고 있다. 진자는 엔코더 축에 연결되어 있고, 엔코더는 길이가 150 mm인 봉(bar)에 의해서 모터축과 연결된다. 따라서, 모터를 주기적으로 진자시 엔코더 및 진자 회전속도 같은 주기의 2차원적 궤적을 그리게 된다. 여기서, 모터축의 회전각을 나타내는 ϕ 는 입력으로, 진자의 회전각을 나타내는 θ 는 출력으로 정의한다. 이들 회전각은 6시 방향을 원점으로 하는 절대각으로 반시계 방향을 양(+), 시계 방향을 음(-)으로 정의한다.

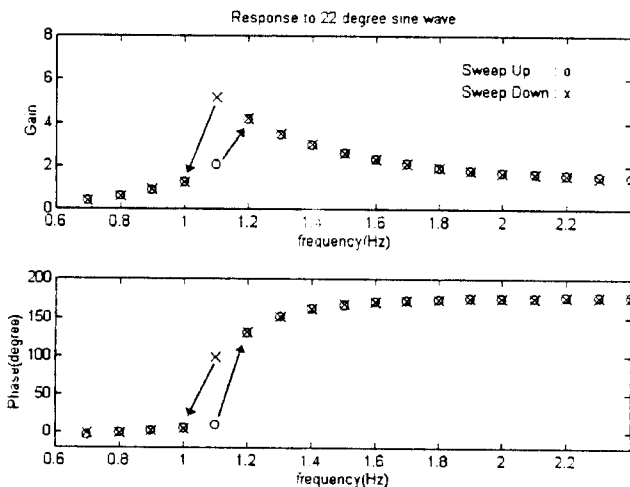
그밖에, 모터 입력 단자에 연결되어 기준 가진 신호를 발생시키는 함수 발생기(HP33120A)와, 엔코더 신호 변환기에서 발생하는 아날로그 형의 입출력 신호를 탐지하는 디지털 오실로스코프(HP54501A), 이들 입출력 신호의 주파수 응답 특성을 분석하기 위한 신호 분석기(HP3562A) 및 PC로 분석하게 될 각종 데이터를 저장하는 측정 장비용 디스크 드라이브(HP9114B)가 사용되었다.

3. 실험 결과 및 토의

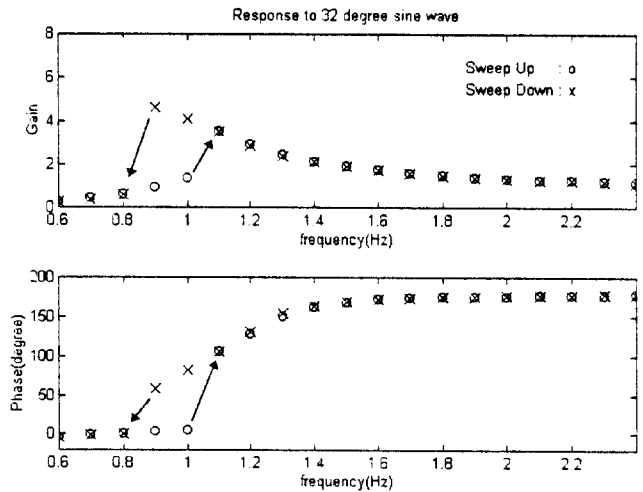
주기적 가진 함수에 대한 진자의 주파수 응답을 실험하기 위하여 사용된 입력 함수 ϕ 는 다음과 같은 주기 함수이다.

$$\phi(t) = \phi_m \cos(2\pi ft) \quad (1)$$

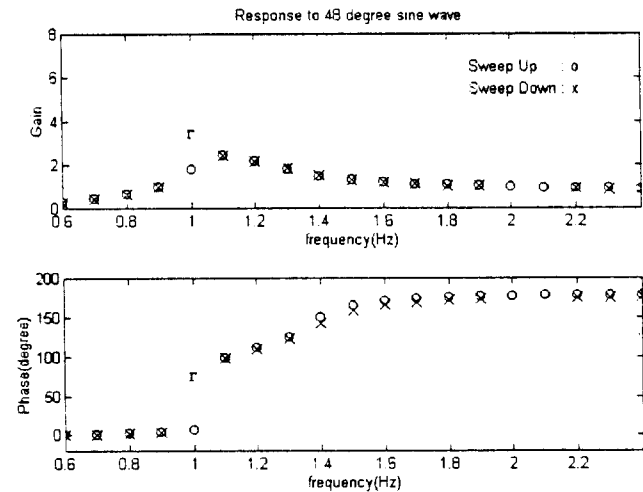
가진 입력 회전 진폭 ϕ_m 은 22°, 32° 및 48°이고, 가진 주파수 f 의 범위는 0.5 Hz에서 2.5 Hz로 제한하였다. 여기서, 가진 입력 회전 진폭은 진자의 동



(a) Excitation angle : 22 degree



(b) Excitation angle : 32 degree



(c) Excitation angle : 48 degree, where, make 'r' denotes rotation

Fig. 2 Experimental result of the response of the pendulum system: the symbol "o" denotes the sweep-up experiment and "x" denotes the sweep-down experiment

적 현상을 고찰하기 위해서 임의로 정한 값이며, 가진 주파수 범위를 제한한 이유는 이들 경계 내에서의 실험값이 시스템 출력의 3차 이상의 고차 성분을 무시할 수 있었기 때문이다. 가진 주파수 f 를 0.1 Hz 단위로 변화시켜 얻은 주파수 응답 특성은 Fig. 2와 같다. 여기서, 진폭 게인(gain)은 $|\theta(f)|/|\phi(f)|$ 로 정의되며, 위상(phase)은 압력 $\phi(f)$ 에 대한 출력 $\theta(f)$ 의 상대적 값이다.

Fig. 2(a)에서 보인 바와 같이 22°의 회전각으로 가진하는 경우, 가진 주파수를 증가시킬 때는 1.2 Hz에서 가진 주파수를 감소시킬 때는 1 Hz에서 도약 현상이 나타난다. 관측된 최대 계인은 주파수 감소시 1.1 Hz에서 5.17이다. Fig. 2(b)는 가진 입력 회전 진폭이 32°인 경우로 가진 주파수 증가시 1.1 Hz에서 가진 주파수 감소의 경우에서는 0.8 Hz에서 도약 현상이 나타나며, 최대 계인은 주파수 감소시 0.9 Hz에서 4.62이다. Fig. 2(a)와 (b)를 비교해보면 가진 입력 회전 진폭을 22°에서 32°로 증가시킬 때 최대계인이 감소하고, 도약이 일어나는 주파수 영역이 저주파수 쪽으로 이동함을 알 수 있다. 즉 입력 진폭의 증가에 따른 등가 스프링 계수가 감소하고 있음을 알 수 있다. 그러나, Fig. 2(c)에서 가진 입력 회전 진폭을 48°로 증가하는 경우 주파수 응답의 최대 계인은 1.1 Hz에서 2.44로 더욱 감소되었지만, 뚜렷한 도약 현상은 관측되지 않았다. 즉, 기존의 연구 결과인 감쇠값의 감소로 인해 도약 현상이 사라지는 내용과는 달리 가진 입력 회전 진폭이 커짐에 따라 도약 현상이 사라지고 있는 새로운 실험 결과를 관측하였다. 특히, 가진 입력 회전 진폭이 48°인 경우 주파수 감소시 2.0 Hz와 2.1 Hz에서 시스템 출력의 3차 이상의 성분이 나타났으며, 1.0 Hz에서 진자는 '한 방향'으로 가진 주파수와 동기화된 회전 (Fig. 2(c) mark 'r')을 하였다. 이러한 새로운 실험 결과는 기존의 연구에서 잘 알려진 유연 스프링의 도약 현상에서는 관측되지 못한 현상이다. 이러한 현상은 진자의 회전축을 2차원적으로 가진하는 데서 비롯되는 것으로 판단되며, 다음 장에서는 이러한 현상에 대해서 모델의 해석을 통한 이론적 이해를 시도한다.

4. 이론적 해석

'새로운' 도약 현상의 체계적인 원인을 규명하기 위하여, 우선 제시된 진자 시스템의 운동 방정식을 유도하고 실험적 방법으로 운동 방정식에 관련된 물리적 인자들을 추정하여, 운동 방정식에 대해 이론적 해석을 시도한다. 이러한 시도는 3장에서 보인 '새로운' 도약 현상을 보다 체계적으로 이해하기 위함이다.

4.1 실험을 통한 운동 방정식의 물리적 인자들 추정

Fig. 3은 본 진자 시스템의 동역학적 모델을 나타낸 것이다. 여기서 M 은 등가 집중 질량을 나타내

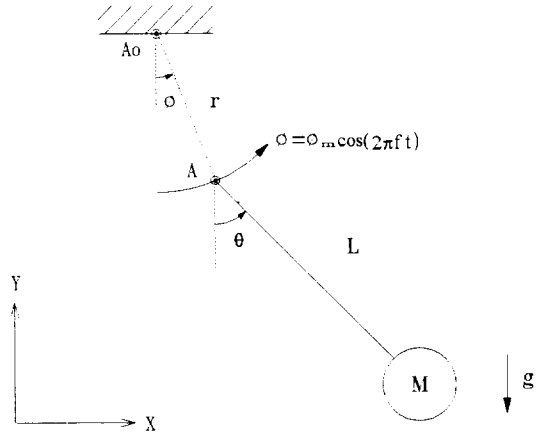


Fig. 3 Dynamic model of the pendulum system

고, L 은 진자 회전축 A 와 등가 집중 질량 M 까지의 거리를 나타내며, r 은 고정가진축(모터 회전축) A_0 와 진자 회전축 A 까지의 거리이고, g [m/sec²]는 중력 가속도이다. 등가 집중 질량 M 이 연결된 진자 회전축 A 는 고정 가진축 A_0 의 회전에 따라 x, y 방향의 2차원 궤적을 그리게 된다.

Fig. 3과 같은 시스템의 운동 에너지(K, E)와 위치 에너지(P, E)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$K, E = \frac{1}{2} M \{ (L\dot{\theta})^2 + (r\dot{\phi})^2 + 2L\dot{\theta} \cdot r\dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \} \quad (2)$$

$$P, E = MgL(1 - \cos\theta) + Mgr(1 - \cos\phi) \quad (3)$$

라그랑지 방정식(Lagrange's equation)을 이용하여 유도되는 운동 방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{\theta} + (g + \ddot{y})\sin\theta + \dot{x}\cos\theta = f(\theta) \quad (4)$$

여기서, $\ddot{y} = r\ddot{\phi}\sin\phi + r\dot{\phi}^2\cos\phi$ 이고, $\dot{x} = r\dot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi$ 이다. 식 (4)에서 $\ddot{y}\sin\theta$ 는 수직 방향으로 가진하는 데서 비롯되는 항이며 $\dot{x}\cos\theta$ 는 수평 방향으로의 가진에서 비롯되는 항으로, 수직 및 수평 가진력이 복합적으로 진자 시스템에 인가됨을 알 수 있다. 식 (4)의 $f(\theta)$ 는 감쇠에 주로 관계되며 본 연구에서는 다음과 같은 모델이 고려되었다.

$$f(\theta) = -C_1\dot{\theta} - C_2\text{sign}(\dot{\theta}) - C_3\dot{\theta}|\dot{\theta}| \quad (5)$$

여기서, C_1 은 점성 감쇠 계수, C_2 는 쿨롱 감쇠 계수이고, C_3 는 공기 역학적 감쇠 계수이다. 특히, 공기 역학적 감쇠가 고려된 이유는 진자의 회전이 빠른 경우 공기 저항이 시스템 거동에 영향을 미칠 수 있기 때문이다. 식 (5)를 고려한 최종 운동 방정식은

다음과 같다.

$$L\ddot{\theta} + C_1\dot{\theta} + C_2\text{sign}(\dot{\theta}) + C_3|\dot{\theta}| + (g + \ddot{y})\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta = 0 \quad (6)$$

위의 시스템 운동 방정식의 물리적 인자들 L , C_1 , C_2 , C_3 의 추정을 위해서 우선 진자의 자유 진동 실험으로부터 변위 측정치 θ 를 얻었다. 속도 및 가속도는 다항식 곡선 맞춤 방법⁽¹⁰⁾을 이용하여 얻었다. 여기서 사용된 다항식 곡선 맞춤 방법은 다음과 같다. 우선 다항식 곡선 맞춤의 차수(order) m 과 표본점(sample point)의 갯수 n 을 결정한다. 임의의 변위 측정치에 대해 이전 $n/2$ 개의 변위 측정치와 이후 $n/2$ 개의 변위 측정치를 취하여 m 의 차수를 갖는 다항식으로 곡선 맞춤을 한다. 얻어진 변위 다항식을 시간에 대해 미분하여 속도 추정치를 얻고, 한번 더 시간에 대해 미분하여 가속도 추정치를 얻는다. 다항식 곡선 맞춤의 차수와 표본점의 갯수마다 최소자승법을 이용하여 L , C_1 , C_2 , C_3 를 추정하였다. 각 경우마다의 오차의 표준 편차를 구해 보았고 그 결과는 Table 1과 같다.

Table 1 Evaluation L , C_1 , C_2 , C_3

Order	No. of sample point	L	C_1	C_2	C_3	Standard deviation
3	6	0.1218	0.0308	0.1042	0.0037	0.1513
	8	0.1223	0.0337	0.0997	0.0034	0.1153
	12	0.1235	0.0355	0.0891	0.0033	0.112
	20	0.127	0.0313	0.0808	0.004	0.1972
4	12	0.1212	0.0313	0.1041	0.0037	0.1262
	20	* 0.1213	0.0321	0.0985	0.0037	0.0847
	24	0.1214	0.033	0.0952	0.0037	0.0878
	30	0.1217	0.0343	0.0886	0.0037	0.109

다항식의 차수가 4이고 표본점의 갯수를 20으로 선정하는 경우 표준 편차가 최소화됨을 확인하였고, 이 때의 L 값은 0.1213 m, C_1 값은 0.0321 m/sec, C_2 값은 0.0985 m/sec, C_3 값은 0.0037 m이다. 이 경우에서의 측정된 변위와 추정된 속도 및 가속도는 Fig. 4와 같다.

추정된 운동 방정식의 물리적 인자들의 정확도를 확인하기 위해서 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션은 가진 입력 회전 진폭이 22°인 경우에 대해 0.02 Hz 간격으로 수행하였고, 그 결과는 Fig. 5와 같다.

시뮬레이션 결과와 실험 데이터가 서로 잘 일치하는 것으로 보아 추정된 인자들은 적절하다고 사료된다.

4.2 '새로운' 도약 현상에 대한 이론적 해석

입력 함수를 식 (1)로 하는 경우 본 실험 조건하에서 정상 상태에서의 진자 응답은 FFT 분석 결과 3차 이상의 고차 성분은 무시할 수 있었다. 즉, 진자 응답은 입력 가진 주파수와 같은 주파수를 갖는 단일 주기 함수가 됨을 확인할 수 있었다. 따라서,

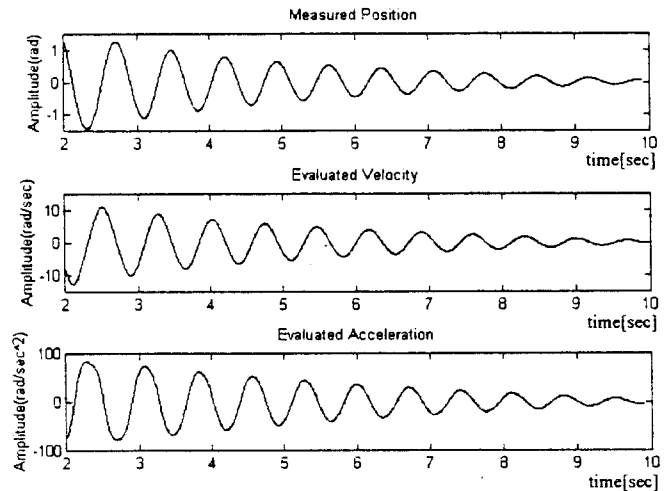


Fig. 4 Measured position, evaluated velocity and acceleration signal

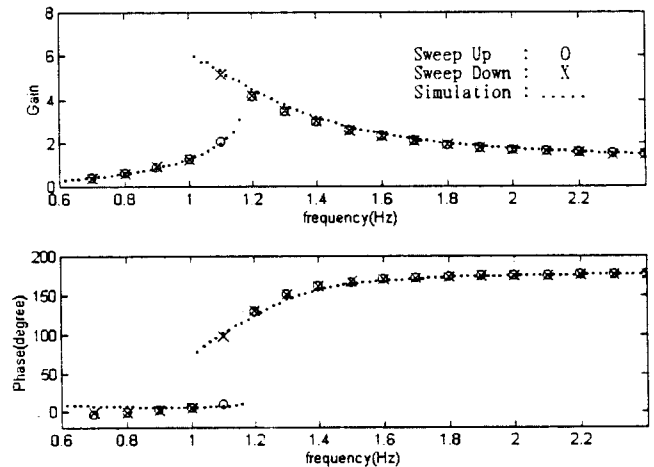


Fig. 5 Verification the estimated coefficients in the aid of Simulation(Simulation: Dot, Experiment results: Mark 'o', 'x')

정상 상태에서의 진자 응답 θ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \Phi) \quad (7)$$

여기서, $\omega = 2\pi f$ 이다. 본 시스템은 감쇠의 영향으로 진자 응답과 입력과의 위상차가 존재하며 이를 Φ 라고 하였다. θ_m, Φ 에 대한 해석적 해를 얻기 위해서 Ritz의 평균법⁽¹¹⁾을 이용하기로 한다.

$$\int_0^T \{L\ddot{\theta} + C_1\dot{\theta} + C_2\text{sign}(\dot{\theta}) + C_3\dot{\theta} | \dot{\theta} | + (g + \hat{y})\sin\theta + \hat{x}\cos\theta\} \cdot \cos(\omega t + \Phi) dt = 0 \quad (8)$$

$$\int_0^T \{L\ddot{\theta} + C_1\dot{\theta} + C_2\text{sign}(\dot{\theta}) + C_3\dot{\theta} | \dot{\theta} | + (g + \hat{y})\sin\theta + \hat{x}\cos\theta\} \cdot \sin(\omega t + \Phi) dt = 0 \quad (9)$$

여기서, T 는 적분 주기로 $1/f$ 이다. 식 (8)과 (9)에서 $\hat{x}\cos\theta$ 항과 $\hat{y}\sin\theta$ 항을 적분하는데 어려움이 있으므로 테일러 급수 전개를 이용하여, 적분식을 아래와 같이 변형하였다. $\sin\theta, \cos\theta$ 및 \hat{x}, \hat{y} 를 테일러 급수의 처음 세항만을 취하여 간략화하면, 식 (8), (9)는 다음과 같이 변형된다.

$$\int_0^T \left\{ L\ddot{\theta} + C_1\dot{\theta} + C_2\text{sign}(\dot{\theta}) + C_3\dot{\theta} | \dot{\theta} | + (g + \hat{y}) \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} \right) + \hat{x} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} \right) \right\} \times \cos(\omega t + \Phi) dt = 0 \quad (10)$$

$$\int_0^T \left\{ L\ddot{\theta} + C_1\dot{\theta} + C_2\text{sign}(\dot{\theta}) + C_3\dot{\theta} | \dot{\theta} | + (g + \hat{y}) \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} \right) + \hat{x} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} \right) \right\} \times \sin(\omega t + \Phi) dt = 0 \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \left(-r\phi_m\omega^2 + \frac{1}{8}r\phi_m^3\omega^2 - \frac{1}{192}r\phi_m^5\omega^2 \right) \cdot \cos(\omega t) \\ &+ \left(\frac{3}{8}r\phi_m^3\omega^2 - \frac{3}{128}r\phi_m^5\omega^2 \right) \cdot \cos(3\omega t) \\ &+ \left(-\frac{1}{384}r\phi_m^5\omega^2 \right) \cdot \cos(5\omega t) \\ \hat{y} &= \left(-r\phi_m^2\omega^2 + \frac{1}{12}r\phi_m^4\omega^2 \right) \cdot \cos(2\omega t) \\ &+ \left(\frac{1}{12}r\phi_m^4\omega^2 \right) \cdot \cos(4\omega t) \end{aligned}$$

식 (10)과 (11)을 적분하여 정리하면 다음과 같은 방정식을 얻게 된다.

$$-L\omega\pi\theta_m + B_1 \cdot g \frac{\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \{A_2(B_1 + B_3)\cos 2\phi$$

$$+ A_4(B_3 + B_5)\cos 4\phi\} + \frac{\pi}{2\omega} \{A_1(2B_0 + B_2)\cos\phi + A_3(B_2 + B_4)\cos 3\phi + A_5B_4\cos 5\phi\} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &- \left(\pi\theta_m \cdot C_1 + \frac{4}{\omega} \cdot C_2 + \frac{8\omega}{3}\theta_m^2 \cdot C_3 \right) \\ &+ \frac{\pi}{2\omega} \{A_2(B_1 - B_3)\sin 2\phi + A_4(B_3 - B_5)\cos 4\phi\} \\ &+ \frac{\pi}{2\omega} \{A_1(2B_0 - B_2)\sin\phi + A_3(B_2 - B_4)\sin 3\phi \\ &+ B_5B_4\sin 5\phi\} = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

여기서,

$$A_1 = r\theta_m\omega^2 \cdot \left(-1 + \frac{\theta_m^2}{8} - \frac{\theta_m^4}{192} \right)$$

$$A_2 = r\theta_m\omega^2 \cdot \left(-\theta_m + \frac{\theta_m^3}{12} \right)$$

$$A_3 = r\theta_m\omega^2 \cdot \left(\frac{\theta_m^2}{8} - \frac{\theta_m^4}{192} \right)$$

$$A_4 = r\theta_m\omega^2 \cdot \left(\frac{\theta_m^3}{12} \right)$$

$$A_5 = r\theta_m\omega^2 \cdot \left(-\frac{\theta_m^4}{384} \right)$$

$$B_1 = 1 - \frac{\theta_m^2}{4} + \frac{\theta_m^4}{64}$$

$$B_2 = \theta_m - \frac{\theta_m^3}{8} + \frac{\theta_m^5}{192}$$

$$B_3 = -\frac{\theta_m^2}{4} + \frac{\theta_m^4}{48}$$

$$B_4 = -\frac{\theta_m^3}{12} + \frac{\theta_m^5}{384}$$

$$B_5 = \frac{\theta_m^5}{1920}$$

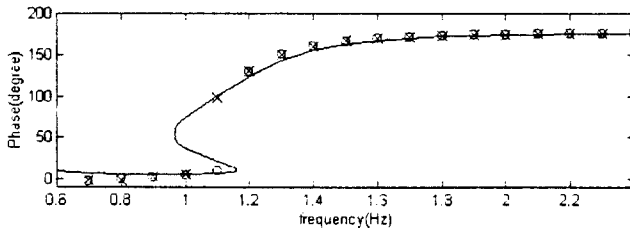
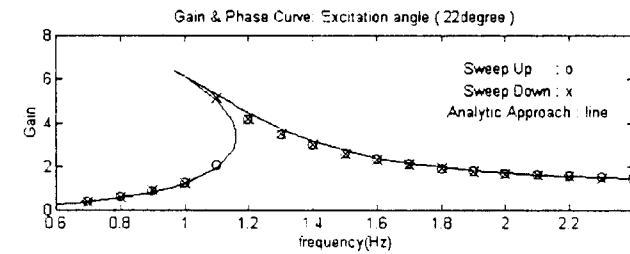
위의 두 비선형 연립 방정식 (12)와 (13)에서 Mathematica를 이용하여 θ_m, Φ 에 대한 해를 구하였다. 이에 대한 결과는 Fig. 6에서 실선으로 표시하였다.

Fig. 6을 살펴보면, 실험 데이터와 이론적으로 얻어진 결과들이 비교적 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 도약 현상이 일어나는 주파수 부근에서는 한 주파수당 3개의 응답이 존재하고 있다. 이러한 원인은 시스템 방정식에 $\hat{x}\cos\theta$ 와 $\hat{y}\sin\theta$ 항의 존재로 인해 전개된 두 비선형 연립 방정식이 θ_m, Φ 에 대해 고차식이 되었기 때문이며, 이들 두 항의 존재로 인해 시스템의 도약 현상이 발생하였음을 확인할 수 있다. 특히, 가진 입력 회전 진폭이 48°인 경우 실험 시 진자의 '한방향'으로의 회전이 발생한 곳(1.0 Hz)을 이론적으로 분석한 결과 위상차가 90.11°가 되어 공진점과 매우 가까운 곳임을 알 수 있었다.

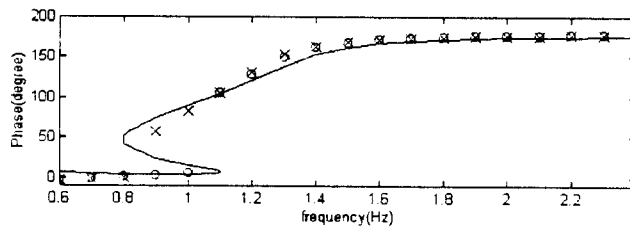
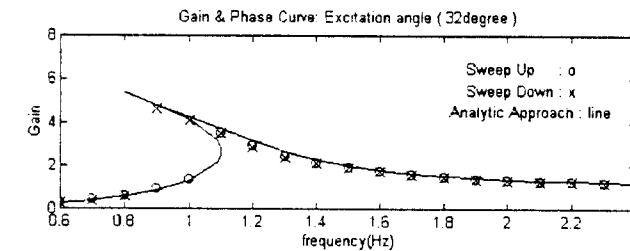
그러나, 가진 입력 회전 진폭이 증가함에 따라 실험 결과와 이론적 분석 결과와의 오차가 커지고 있음을 발견할 수 있다. 그 원인은 우선 시스템 방정식의 계수를 3차 테일러 급수로 전개하는 과정에서 발생하였다고 볼 수 있고, 또한, 시스템의 출력을 입력값과 동일한 주파수의 단일 주파수 함수라고 가정한 데서 발생한 것으로 사료된다.

5. 결 론

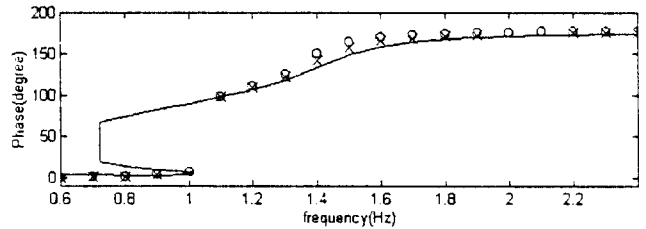
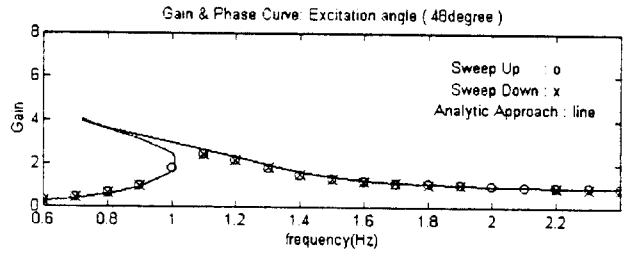
본 연구에서는 진자의 2차원적 가진(수평 및 수직 방향의 동시 가진)을 효율적으로 가할 수 있는 새로운 기구학적 구성 및 모터의 가진각과 진자의 운동을 $0.09^\circ(360^\circ/4000)$ 까지 정밀하게 측정할 수 있는



(a) Excitation angle : 22 degree



(b) Excitation angle : 32 degree



(c) Excitation angle : 48 degree

Fig. 6 Frequency response characteristics of the pendulum system : the solid line denotes the analytical result and the symbol "o" and "x" denote the experiment results

새로운 비선형 계를 소개하였다. 0.5 Hz부터 2.5 Hz의 주파수 범위를 갖는 3가지의 가진 입력 회전 진폭(22° , 32° 및 48°)에 대한 주파수 응답 실험으로부터, 가진 입력 회전 진폭이 증가함에 따라 도약 현상이 사라지는 현상을 새로이 관측할 수 있었다. 이러한 새로운 현상의 이론적 접근을 위하여 운동 방정식의 실험적 규명과 더불어 Ritz의 평균법을 적용함으로써, '새로운' 도약 현상은 시스템 방정식의 2차원적 가진력인 $\dot{x}\cos\theta$ 항과 $\dot{y}\sin\theta$ 항에 기인된 것임을 확인할 수 있었다. 본 연구에서 가진 입력 회전 진폭의 증가시 응답 함수의 계인이 감소하는 원인에 대해 체계적인 이해를 제시하지 못하였으나, 향후 연구에서는 이러한 한계점에 대한 접근을 시도할 예정이다.

참고 문헌

- (1) Skalak, R. and Yarymovych, M. I., 1960, "Subharmonic Oscillations of a Pendulum," Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 27, pp. 159~164.
- (2) Struble, R. A., 1963, "Oscillations of a Pendulum under Parametric Excitation," Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, pp. 121~131.

- (3) Struble, R. A., 1963, "On the Subharmonic Oscillations of a Pendulum," *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, Vol. 30, pp. 301~303.
- (4) Struble, R. A., 1964, "On the Oscillations of a Pendulum under Parametric Excitation," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 22, pp. 157~159.
- (5) Koch, B. P., Leven, R. W., Pompe, B. and Wilke, C., 1983, "Experimental Evidence for Chaotic Behaviour of a Parametrically Forced Pendulum," *Physics Letters*, Vol. 96A, No. 5, pp. 219~224.
- (6) Leven, R. W., Pompe, B., Wilke, C. and Koch, B. P., 1985, "Experiments on Periodic and Chaotic Motions of a Parametrically Forced Pendulum," *Physica 16D*, pp. 371~384.
- (7) Beckert, S., Shock, U., Schulz, C. D., Weidlich, T. and Kaiser, F., 1985, "Experiments on the Bifurcation Behaviour of a Forced Nonlinear Pendulum," *Physics Letters*, Vol. 107A, No. 8, pp. 347~350.
- (8) Blackburn, J. A., Yang Zhou-jing, Vik, S., Smith, H. J. T. and Nerenberg, M. A. H., 1987, "Experimental Study of Chaos in a Driven Pendulum," *Physica 26D*, pp. 385~395.
- (9) Cheung, W. S., 1993, "Identification, Stabilisation and Control of Nonlinear Systems Using Neural Network-Based Parametric Nonlinear Modeling," Ph. D Thesis, ISVR, University of Southampton, U. K.
- (10) The MATHWORKS Inc., 1992, *MATLAB-Reference Guide*, pp. 279~281, pp. 380~382.
- (11) Wanda Szemplinska-Stupnicka, 1990, *The Behavior of Nonlinear Vibrating Systems-Volume I: Fundamental Concepts and Methods: Applications to Single-Degree-of Freedom Systems*, Kluwer Academic Publishers, Chapter 3, 4.