

〈 論 文 〉

원판 덮개를 갖는 고정-자유 원통셀의 고유진동 해석

Free Vibration Analysis of Clamped-Free Circular Cylindrical Shells with Circular Plate at Top

임 정 식* · 이 영 신**

Jeong-Sik Yim and Young-Shin Lee

(1996년 7월 13일 접수 ; 1996년 9월 20일 심사완료)

ABSTRACT

Free vibration analyses of circular cylindrical shells attached with plate structures for the symmetric boundary condition such as simply-simply supported shells by receptance method are found in literatures. However analyses of those shells with unsymmetric boundary condition as clamped-free boundary are hardly found. Here frequency equation of the clamped-free circular cylindrical shell with end plate is derived using receptance method and natural frequencies of the combined system were calculated. The frequencies and mode shapes obtained from present method are compared with those of ANSYS to show the validity of the method. Natural frequencies and mode component ratios of clamped-free cylindrical shell are obtained by employing Rayleigh-Ritz method on energy equations, and they are used in receptance calculation. Results show good agreement with those of ANSYS analyses.

기 호 설 명

- a : 셀 및 원판의 반경
- h : 셀 두께
- h_p : 원판의 두께
- E : Young's modulus
- q_1, q_2, q_3 : 축방향, 원주방향, 반경방향 동적 가진력
- G : Shear modulus
- $I_n, I_{n+1}, J_n, J_{n+1}$: 제 2종 및 제 1종 Bessel 함수
- L : 셀 길이
- M : 원통셀의 축방향 모드 수
- m : 모드확장법에서 더해지는 최대 축방향 모드 항 수 (maximum mode summation index)
- M_3, M_{3S}, M_{3F} : 원판이 부착된 경계에서의 동적 주기 모멘트 (dynamic cyclic moment), 셀, 원판 작용 모멘트
- M_s, M_p : 원판/원통셀 접합경계에서의 셀 및 원판에 작용하는 모멘트
- N, n : 원주방향 파수 (circumferential wave number)

- u, v, w : 셀의 변위 (길이방향, 원주방향, 반경방향)
- U : 변형에너지
- u_3 : 셀의 반경방향 변위
- U_k, V_k, W_k : 셀의 k 번째 모달 변위
- u_{3S}, u_{3F} : 원통셀의 두께에 수직인 변위, 원판의 횡방향 변위
- T : 운동에너지
- x, θ, z : 셀 좌표
- x^* : 하중 또는 모멘트 작용점
- a_{11}, a_{12}, a_{22} : 셀의 동적 응답 (shell receptance)
- a_1, a_2 : 셀의 일반 좌표
- $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$: 원판의 동적응답 (plate receptance)
- θ_s, θ_p : 원통셀 및 원판의 기울기
- ρ_s : 셀의 밀도
- ν : Poisson 비
- $e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}$: 변형률 (x, y, z 방향), 전단변형률
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$: 응력 (x, x, z 방향), 전단응력
- $\phi(x)$: 보 함수 (beam function)
- ω_{imn} : 원통셀의 고유진동수
- ω_c : 원판이 부착된 조합 원통셀의 진동수 (rad/sec)

*정회원, 한국원자력연구소

**정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

1. 서론

원통셀은 비강성이 높고 제작성이 용이하여 산업 일반에서 널리 사용되며 원통셀 한쪽 끝에 원판이 부착된 구조물은 저장용기로서 중요한 구조물이다. 이러한 형상의 구조물에 대한 고유진동해석은 공진에 의한 파손 방지와 강제진동 해석을 위한 기초자료로서 그 중요성이 있으며 이와 관련한 많은 문헌이 발견된다.

원통셀의 고유진동해석 연구는 Sharma⁽¹⁾가 Flügge의 셀 이론을 사용하여 일단고정-일단자유의 외팔 경계조건을 갖는 원통셀에 대하여 에너지법과 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 이론적인 해를 구하고 그 특성을 고찰하였으며 참고문헌 (2), (3)에서는 Budyansky와 Sanders의 셀 이론을 사용하여 외팔 경계조건을 갖는 셀의 자유진동을 해석하고 진동수 매개변수(frequency parameter)에 대해 단순화시킨 선형관계식을 유도하였으며 파수(wave number) 변화에 따른 여러 가지의 반경/두께 비 및 길이/반경 비에 대하여 진동수를 구하여 근사해와 엄밀해와의 차이를 심도 있게 분석하였다. 참고문헌 (4)에서는 일단고정-일단자유의 외팔 경계조건 및 끝단에 보강 링을 갖는 고정-자유 경계조건의 원통셀에 대해 Flügge의 셀 이론을 사용하고 Rayleigh-Ritz 법으로 근사해를 유도하고 수치 해를 얻은 후 Timoshenko-Love 이론의 결과와 비교하여 길이가 긴 셀에 대해서는 원주방향과 전단변형이 없다는 가정의 도입은 큰 오차를 발생하지 않고 해를 단순화하며, Timoshenko-Love 이론보다는 Flügge 이론이 좀더 정확한 결과를 제공함을 밝히고 있다. 참고문헌 5에서는 외팔형 원통셀에 대해 Rayleigh-Ritz 법 및 축대칭 유한요소를 사용한 결과 및 지배방정식으로부터 얻은 엄밀해와의 비교를 수행하여 사용된 방법 사이에 연관 관계가 있음을 보이고 링의 효과에 대해서도 언급하고 있다. 한편 Johns⁽⁶⁾는 하단이 고정되고 상단이 보강된 연통과 같은 긴 원통셀에 대한 자유진동 연구를 수행하여 edge 경계조건의 영향, 특히 축방향 구속과 보강 링 강성의 영향을 연구하여 고유진동수의 정확한 예측을 위해서는 하단고정의 경계조건을 포함해야 함을 밝히고 있다. 또한 Warburton과 Higgs⁽⁷⁾는 Flügge 운동방정식을 직접 풀 결과와, Rayleigh-Ritz 법으로 외팔 원통셀의 고유진동수를 얻은 결과를 비교하여 사용된 근사방법의 정확함을 보여주었다.

국내의 연구동향으로는 이영신 등⁽⁸⁾이 직교이방성 외팔 원통셀의 자유진동해석에 대하여 고찰하였고, 염기연 등⁽⁹⁾ 및 김태룡 등⁽¹⁰⁾은 내부가 유체로 채워진 보강 원통셀의 동적 해석을 실험적 및 상용 전산 코드인 ANSYS 코드를 이용하여 해석 고찰한 바 있으며, 정경훈 등⁽¹¹⁾은 Fourier 급수전개를 이용한 부분적으로 유체가 채워진 원통셀의 고유진동해석을 수행하였다.

단순지지 경계조건을 갖는 원통셀에서 축방향 임의 위치에 원판이 부착되어 있는 경우에 대하여는 Huang 및 Soedel⁽¹²⁾이 동적응답법(receptance method)을 이용한 연구를 발표하였고, 이어서 축방향 임의 위치에 다수의 원판이 부착된 경우도 발표하였으며⁽¹³⁾, Azmi 등⁽¹⁴⁾은 동적응답법을 이용하여 원통의 다각형 덕트에 대한 고유진동수와 모드 형태를 구하였다. 또 Hirano 등⁽¹⁵⁾은 Lagrangian을 사용하여 원판이 부착된 박막 셀에 대하여 해석하였고, Suzuki 등⁽¹⁶⁾은 후벽 용기에 대한 원판부착 셀에 대한 해석을 수행하였다. 이 외에도 Yamada 등⁽¹⁷⁾은 양단에 판이 부착된 이중 원통셀에 대한 자유진동 해석을 발표하였다.

지금까지의 연구결과를 보면 원통셀에 원판이 부착된 경우의 연구는 원통셀의 경계조건이 대칭이 되는 양단 단순지지 경계조건에 대해 다수의 논문이 발표되었으나 비대칭 경계조건을 갖는 고정-자유 원통셀 상단에 원판이 부착된 구조물에 대해서는 발견되지 않는다. 따라서 여기서는 일반적으로 많이 사용되고 있는 외팔경계조건의 원통셀 상단에 원판이 부착된 구조물에 대하여 Huang 및 Soedel⁽¹²⁾의 방법을 참고하여 동적응답식(dynamic receptance)을 유도하고, 접합경계의 연속조건을 고려하여 진동수 방정식을 유도하였으며, 이 동적응답식을 계산하는데 필요한 셀 길이에 걸친 보 함수(beam function)의 적분을 수행하여 원판이 부착된 원통셀의 조합구조물에 대한 고유진동수 및 고유진동 모드형상을 구하였다. 이를 위해서 먼저 원통셀만의 고유진동해석을 보 함수를 사용하는 변위의 가정을 도입하여 Rayleigh-Ritz 법으로 해석하고, 원판의 고유진동해석의 결과를 이용, 원통셀과 원판의 동적응답을 계산한 후 구하여진 조합구조물의 진동수 방정식으로부터 진동수 및 진동 모드 형상을 구하고 이들 결과를 검토하였다. 수치결과의 적합성을 보이기 위해 동일 재원을 이용한 ANSYS⁽¹⁸⁾의 계산 결과와도 비교하였으며 진동수와 모드형상은 두 경우 잘 일치하는 것을 보이고 있다.

2. 수식의 전개

2.1 원통셀의 진동수 방정식

원통셀에 원판이 부착된 조합구조물의 고유진동 해석을 위해서는 원판의 고유진동해석과 원통셀만의 고유진동해석을 수행한 후 이 결과들을 이용하여 조합구조물의 고유진동해석을 수행하여야 하므로 본 2.1 절에선 2.3 절에서 사용하게 되는 고정-자유 경계조건을 갖는 원통셀의 고유진동 해석과정을 Sanders의 얇은 셀 이론을 사용하고 Rayleigh-Ritz 법을 통해 얻는 간략한 수식의 전개를 기술한다.

원통셀의 변형 에너지는 식 (1)로 표현 된다.

$$U = 1/2 \int_V (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (1)$$

얇은 셀에 대한 가정에서 $e_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ 를 적용하면 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (e_x + \nu e_y) \quad (2.a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} (e_y + \nu e_x) \quad (2.b)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (2.c)$$

식 (2)를 (1)에 대입하면

$$U = 1/2 \int_V \frac{E}{(1-\nu^2)} (e_x^2 + 2\nu e_x e_y + e_y^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}^2) dV \quad (3)$$

Fig. 1 (a)의 원통셀 좌표계로부터 원통셀의 좌표 x, θ, z 에 대한 변위를 u, v, w 로 나타내면 변형률-변위관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$e_{,xx} = u_{,x} - z w_{,xx} \quad (4.a)$$

$$e_{,\theta\theta} = \frac{1}{a} (v_{,\theta} + w) - \frac{z}{a^2} (w_{,\theta\theta} - v_{,\theta}) \quad (4.b)$$

$$e_{,x\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} u_{,\theta} + v_{,x} \right) - z \left(\frac{1}{4a^2} u_{,\theta\theta} - \frac{3}{4a} v_{,xx} + \frac{1}{a} w_{,x\theta} \right) \quad (4.c)$$

식 (4)를 식 (3)에 대입하면 변위항으로 표현되는 셀의 변형 에너지를 얻는다.

$$U = \frac{Eh}{2a(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L [a^2 u_{,x}^2 + (w + v_{,\theta})^2 + 2\nu a u_{,x} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2} (1-\nu) (u_{,\theta} + a v_{,x})^2$$

$$+ \frac{h^2}{12a^2} \{ a^4 w_{,xx}^2 + (w_{,\theta\theta} - v_{,\theta})^2 + 2\nu a^2 w_{,xx} (w_{,\theta\theta} + v_{,\theta}) + \frac{1}{8} (1-\nu) (u_{,\theta} - 3a v_{,x})^2 + 2(1-\nu) a^2 w_{,x\theta}^2 + (1-\nu) a u_{,\theta} w_{,x\theta} - 3(1-\nu) a^2 v_{,x} w_{,x\theta} \}] dx d\theta \quad (5)$$

또 셀의 운동에너지는 다음 식으로 표현 할 수 있다.

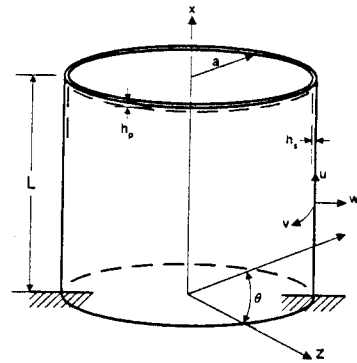
$$T = \frac{1}{2} \int_V m_s \{ (\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2 \} dV \quad (6.a)$$

$$= \frac{1}{2} \rho a h \int_0^L \int_0^{2\pi} \{ \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \} d\theta dx \quad (6.b)$$

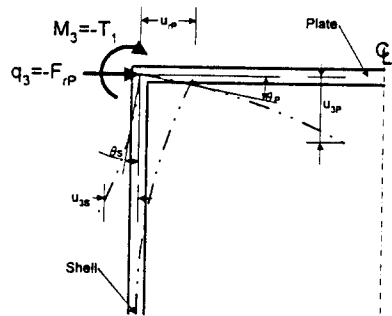
변위 성분은 고정-자유 경계조건을 포함수 $\phi(x)$ 를 도입하여 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$u = A \phi'(x) \cos n\theta \cos \omega t \quad (7.a)$$

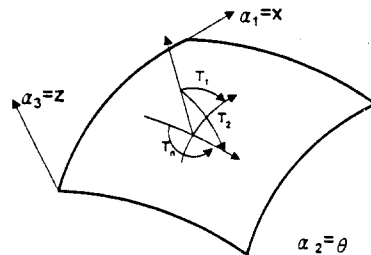
$$v = B \phi(x) \sin n\theta \cos \omega t \quad (7.b)$$



(a) Coordinates System and Displacements



(b) Load/Moment and Displacement/Slope



(c) Moment on a Shell Segment

Fig. 1 Coordinates system and load/moment, displacement/slope

$$w = C\phi(x) \cos n\theta \cos \omega t \quad (7.c)$$

여기서

$$\phi(x) = \cosh p_r x - \cos p_r x - C_r (\sinh p_r x - \sin p_r x) \quad (8)$$

$$\phi'(x) = \sinh p_r x + \sin p_r x - C_r (\cosh p_r x - \cos p_r x) \quad (9)$$

이고 C_r 및 p_r 은 다음의 식 (10)과 (11)로부터 얻는다.

$$C_r = \frac{\sinh p_r L - \sin p_r L}{\cosh p_r L + \cos p_r L} \quad (10)$$

$$\cosh p_r L \cos p_r L + 1 = 0 \quad (11)$$

변위 가정식 (7)을 식 (5)와 (6)에 대입하면 에너지 식은 미지수 A, B, C를 갖는 식이 되며 여기에 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 세 개의 미지수에 대해 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \Delta I_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \Delta I_4 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \Delta I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (12)$$

여기서 Δ 는 진동수 매개변수 (frequency parameter)로서

$$\Delta = \rho a^2 \frac{(1 - \nu^2) \omega^2}{E} \text{이고, } I_2, I_4 \text{는 (13.a), (13.b)와 같다.}$$

$$I_2 = \int_0^L \phi' \phi' dx \quad (13.a)$$

$$I_4 = \int_0^L \phi \phi dx \quad (13.b)$$

식 (12)가 무용 해를 얻지 않기 위한 조건으로부터 다음의 외팔 원통셀의 진동수 방정식을 얻는다^(1, 19).

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \Delta I_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \Delta I_4 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \Delta I_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

식 (14)의 진동수 방정식은 전개하면 진동수 변수를 포함하는 3차 방정식이 되고 3차 방정식의 근의 공식을 이용하여 각 모드에 해당하는 세 개의 진동수를 구할 수 있다. 여기서 구하여진 진동수를 식 (12)에 대입하면 C로 표현되는 상대 진폭비를 구할 수 있고 이 진폭비를 이용하여 세 개의 근에 대한 진동 모드성분을 나타내면 식 (15.a)~(15.c)와 같다.

$$u(x, \theta) = (A/C)_{imn} \phi' \cos n\theta \quad (15.a)$$

$$v(x, \theta) = (B/C)_{imn} \phi \sin n\theta \quad (15.b)$$

$$w(x, \theta) = \phi \cos n\theta \quad (15.c)$$

여기서 하첨자 imn 은 $i=1, 2, 3$ 으로서 3차의 진동수 방정식에서 구한 세 개의 근을 나타내기 위한 지수이며, m 은 원통셀의 축방향 반파수, n 은 원주방향 파수를 나타낸다.

2.2 조합구조물의 동적응답(Dynamic Receptance)

여기에서 사용하는 동적응답법은 입력 하중 또는 입력 모멘트에 대한 변위 또는 기울기의 비로써 정의되며⁽²⁰⁾, 독립계의 응답과 진동수를 사용하여 조합구조물의 응답과 진동수를 예측하는 방법으로 독립계의 동적응답을 여러 가지 방법으로 구할 수 있는 장점이 있고, 이 방법은 유한요소 방법에 비해 조합에 의한 연성효과와 진동특성의 물리적 고찰에 더 적합한 것으로 알려져 있다.

원판이 셀에 부착된 구조물에서는 접합부위에서 5개의 변위항과 5개의 하중 및 모멘트를 고려해야 하는데 이들 하중과 모멘트는 선 하중(line load) 또는 선 모멘트(line moment)로 작용하게 된다. 5개의 변위와 하중을 포함하는 조합계에서 변위 벡터 $\{X_{Ai}\}$ 는 하중 벡터 $\{F_{Aj}\}$ 를 사용하여 다음 식과 같이 나타낼 수 있다⁽¹²⁾.

$$\{X_{Ai}\} = \{\alpha_{ij}\}^T \{F_{Aj}\} \quad (16)$$

여기서 α_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4, 5$)는 조합전의 독립된 계 A의 응답이고, β_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4, 5$)를 독립계 B의 응답이라 하면 독립계 B에 대해서는 식 (17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{X_{Bi}\} = \{\beta_{ij}\}^T \{F_{Bj}\} \quad (17)$$

두 독립계가 연결되어 있고 외력이 없다면

$$\{F_{Aj}\} = -\{F_{Bj}\} \quad (18)$$

$$\{X_{Ai}\} = -\{X_{Bi}\} \quad (19)$$

식 (16)~(19)로부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$[\alpha_{ij} + \beta_{ij}] = 0 \quad (20)$$

식 (20)에서 $\{F_{Aj}\} \neq 0$ 이어야 하고 무용 해를 갖지 않기 위한 조건으로부터 다음의 조합구조물의 진동수 방정식을 얻는다.

$$|\alpha_{ij} + \beta_{ij}| = 0 \quad (21)$$

2.3 원판이 부착된 원통셀의 동적응답

원판이 부착된 원통셀 구조물의 저차 진동 모드 및 낮은 진동수에 관심이 있을 때는 5개의 변위/하중 성분을 모두 고려하는 대신 원판은 내평면(in

-plane)에서 강체운동을 한다고 가정하여 원판의 횡진동(transverse vibration)만 고려할 수 있고, 셀의 접선방향의 작은 접합변위의 영향은 무시할 수 있으므로 접합부위에서 원판과 원통셀 변위의 연성은 원판의 반경방향 기울기 변화와 원통셀의 축방향 기울기 변화 및 원통셀의 횡방향 운동에 연성된 원판의 반경방향 강체운동만을 고려할 수 있다. 이렇게 하므로써 5개의 변위는 2 개로 줄일 수 있고 식 (20)은 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (22)$$

여기서 q_3 는 Fig. 1(b)에서와 같이 원판과 셀 접합부위에서 발생하는 횡방향 구속력이고, M_3 는 구속 모멘트이다.

동적응답 β_{12} 와 β_{21} 은 원판의 내평면 운동과 횡방향 원판 운동의 연성이 없으므로 영이다.

이에 따라 원판이 원통셀의 임의 위치에 부착되어 있는 경우에 필요한 동적응답은 다음과 같다.

(1) 셀의 동적응답

$$\alpha_{11} = \frac{u_{3s}(x^*, \theta, t)}{q_3(x^*, \theta, t)} \quad (23)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\theta_s(x^*, \theta, t)}{q_3(x^*, \theta, t)} \quad (24)$$

$$\alpha_{12} = \frac{u_{3s}(x^*, \theta, t)}{M_{3s}(x^*, \theta, t)} \quad (25)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\theta_s(x^*, \theta, t)}{M_{3s}(x^*, \theta, t)} \quad (26)$$

(2) 원판의 동적응답

$$\beta_{11} = \frac{u_{3P}(x, \theta, t)}{q_3(a, \theta, t)} \quad (27)$$

$$\beta_{22} = \frac{\theta_P(x, \theta, t)}{q_3(a, \theta, t)} \quad (28)$$

$$\beta_{21} = \frac{u_{3P}(x, \theta, t)}{M_{3P}(a, \theta, t)} = 0 \quad (29)$$

$$\beta_{12} = \frac{\theta_P(x, \theta, t)}{M_{3P}(a, \theta, t)} \quad (30)$$

따라서 동적 응답을 구하기 위해서는 접합부위에서의 구속으로부터 발생된 동적 횡방향 하중 및 동적 모멘트의 가정에 의한 변위와 기울기를 구하여야 하고 이렇게 하여 구한 변위는 모드확장법(modal expansion method)을 통해 전체 계의 변위로 나타낼 수 있다.

모드 확장법을 사용하여 원판의 구속으로부터 발생된 선 하중 및 선 모멘트에 의해 나타나는 원통셀

의 임의 점에서의 동적 변위를 나타내기 위하여 모달 식(modal equation)을 다음과 같이 나타낸다⁽²⁰⁾.

$$\ddot{\eta}_k + \frac{\xi}{\rho h} \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k^*(t) \quad (31)$$

여기서 η_k 는 k 번째 모드의 모드기여 성분(modal participation factor)이고, ξ 는 유효 댐핑계수이며 ω_k 는 k 모드에 해당하는 고유진동수, $F_k^*(t) = F_k^* e^{j\omega t}$ 로써 F_k^* 는 다음의 식에서 구할 수 있다⁽²⁰⁾.

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{a_1} \int_{a_2} (q_1 U_k + q_2 V_k + q_3 W_k) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (32)$$

여기서

$$N_k = \int_{a_1} \int_{a_2} (U_k^2 + V_k^2 + W_k^2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (33)$$

으로써 원통셀에 대하여는 $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = \theta$, $A_1 = 1$, $A_2 = a$ 이므로 N_k 의 값은 다음 식으로 나타난다.

$$N_k = \pi a [(A/C)^2]_{imn} \int_0^L \phi'^2(x) dx + (B/C)^2]_{imn} \int_0^L \phi^2(x) dx + \int_0^L \phi^2(x) dx] \quad (34)$$

식 (32), (33)의 U_k , V_k , W_k 는 식 (7)의 변위식에서 시간에 무관한 셀의 k 번째 모드의 변위성분을 나타내고 있다.

식 (31)에서 모달 댐핑을 무시하여 얻은 해를 이용하여 변위를 나타내면 다음과 같다.

$$u_{3s}(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) W_k(x, \theta) \quad (35.a)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k W_k(x, \theta) e^{j\omega t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} W_k(x, \theta) e^{j\omega t} \quad (35.b)$$

여기서 ω 는 구하여야 할 조합구조물의 진동수이고 ω_k 는 작용 외력의 k 번째 모달 진동수이다.

셀의 축방향 위치 $x = x^*$ 에서 원판이 부착되어 있을 때 원판 구속으로부터 발생된 셀의 반경방향의 동적 횡방향력(dynamic excitation)은 Dirac delta 함수를 사용하여

$$q_3(x, \theta, t) = F_0 \cos p\theta \delta(x - x^*) e^{j\omega t} \quad (36)$$

로 쓸 수 있고 이 하중이 원통셀에 작용할 때 식 (32)로부터 $q_1 = q_2 = 0$ 이므로

$$F_k^* = [F_0 \phi(x^*)] / [\rho h \{(A/C)^2]_{imn} \int_0^L \phi^2 dx$$

$$+ (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx \} \quad (37)$$

을 얻는다. 따라서 구하여진 N_k 와 F_k^* 를 식 (35)에 대입하면, k 번째까지의 모드 합으로 원통셀의 동적 변위를 표현 할 수 있다. 즉,

$$u_{3s}(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_m^2 - \omega^2)} * [F_o \phi(x^*) \phi(x)] / \\ [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx \\ + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx \\ + \int_0^L \phi^2 dx \}] \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (38)$$

다음으로 원판 부착에 따른 동적 횡방향 구속력에 의해 발생하는 원통셀의 축방향 기울기는 (38)을 미분하여 얻는다. 즉,

$$\theta_s(x, \theta, t) = -\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_m^2 - \omega^2)} * [F_o \phi(x^*) p_r \phi'(x)] / [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx \\ + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx \}] \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (39)$$

따라서 횡방향 동적 가진에 의한 동적 응답은

$$\alpha_{11} = \frac{u_{3s}(x^*, \theta, t)}{q_3(x^*, \theta, t)} \quad (40. a) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * [\phi(x^*) \phi(x^*)] / \\ [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx \\ + \int_0^L \phi^2 dx \}] \quad (40. b)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\theta_s(x^*, \theta, t)}{q_3(x^*, \theta, t)} \quad (41. a) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * [p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)] / \\ [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx \\ + \int_0^L \phi^2 dx \}] \quad (41. b)$$

식 (40), (41)의 하첨자 i 는 각 모드에 해당하는 원통셀만의 진동수 방정식의 세 근으로서 $i=1, 2, 3$ 이고, m 은 축방향 반파수, n 은 원주방향 파수를 나타낸다.

한편 $x=x^*$ 에서 원판접합에 의해 발생하는 횡방향 동적 모멘트 $M_{3s}(x^*, \theta, t)$ 에 의한 셀의 동적 응답을 구하기 위하여 동적 모멘트 (dynamic moment)를

식 (42)와 같이 가정하고

$$M_{3s}(x, \theta, t) = M_o \cos p\theta \delta(x-x^*) e^{j\omega t} \quad (42)$$

셀의 변위 및 기울기를 댐핑을 무시한 모달 확장식 (31)로부터 구한 결과를 이용하여 표시하면 다음의 식 (43), (44)와 같다.

$$u_{3s}(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_{3k}(x, \theta) e^{j\omega t} \quad (43. a)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} U_{3k}(x, \theta) e^{j\omega t} \quad (43. b)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{M_o}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * [-p_r \phi'(x^*) \phi(x)] / \\ [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx \}] \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (43. c)$$

$$\theta_s(x, \theta, t) = -\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \quad (44. a)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{M_o}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * [-p_r^2 \phi'(x^*) \phi'(x)] / \\ [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx \\ + \int_0^L \phi^2 dx \}] \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (44. b)$$

따라서 동적 모멘트에 의한 셀의 동적 응답은 $x=x^*$ (여기선 $x^*=L$)에서 식 (45), (46)과 같이 나타난다.

$$\alpha_{22} = \frac{\theta_s(x^*, \theta, t)}{M_{3s}(x^*, \theta, t)} \quad (45. a)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * [-p_r^2 \phi'(x^*) \phi'(x^*)] / \\ [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx \\ + \int_0^L \phi^2 dx \}] \quad (45. b)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\theta_s(x^*, \theta, t)}{q_3(x^*, \theta, t)} \quad (46. a)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * [-p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)] / \\ [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx \\ + \int_0^L \phi^2 dx \}] \quad (46. b)$$

한편 원판의 내평면 운동의 진동수는 횡방향 진동수에 비해 월등히 크므로 횡방향 진동에 비해 강체 운동으로 볼 수 있다. 이때 원통에 접하는 부위에서 원판에 작용하는 주기적인 힘을

$$F_{rp}(r, \theta, t) = F_{rp}(a, \theta, t) = F_{0p} \cos p\theta e^{j\omega t} \quad (47)$$

라 하면 [Fig. 1. (b)] 원판의 반경방향으로의 운동은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_{rP}(a, \theta, t) = U_o \cos \theta e^{j\omega t} \quad (48)$$

댐핑이 없는 원판의 내평면 운동은 원판의 질량을 M_P 라 할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_P \ddot{\eta}_k = F_k(t) \quad (49)$$

식 (49)에서 외력은 $F_k(t) = F_k^* e^{j\omega t}$ 이고 다음과 같다.

$$F_k(t) = \left\{ \int_{a_1} \int_{a_2} q_i U_{ik} A_1 A_2 da_1 da_2 \right\} e^{j\omega t} \quad (50.a)$$

$$= \left\{ \int_{a_1} \int_{a_2} [(F_{0P} \cos p\theta \delta(r-a)) r \cos \theta] dr d\theta \right\} e^{j\omega t} \quad (50.b)$$

으로 표현되고 원판의 운동은 다시

$$M_P \ddot{u}_{rP} = \left\{ \int_0^a \int_0^{2\pi} [(F_{0P} \cos p\theta \delta(r-a)) r \cos \theta] dr d\theta \right\} e^{j\omega t} \quad (51.a)$$

$$= \begin{cases} F_{0P} a \pi \cos \theta e^{j\omega t} & \text{for } p=1 \\ 0 & \text{for } p \neq 1 \end{cases} \quad (51.b)$$

로 표현할 수 있다.

식 (48)을 미분하여 식 (51)에 대입하면

$$M_P \ddot{u}_{rP} = \pi a^2 \rho h_p (-\omega^2 u_{rP}) = F_{0P} a \pi \cos \theta e^{j\omega t} \quad (52)$$

따라서 원판의 동적응답 β_{11} 은

$$\beta_{11} = \frac{u_{rP}(a, \theta, t)}{F_{rP}(a, \theta, t)} \quad (53.a)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\rho h_p \omega^2} & \text{for } p=1 \\ 0 & \text{for } p \neq 1 \end{cases} \quad (53.b)$$

다음으로 원판이 부착된 부위의 선 모멘트에 의해 발생하는 원판의 기울기를 구하면 다음과 같다.

선 모멘트를 Fig. 1(b)에서 다음과 같이 표현한다.

$$T_1(r, \theta, t) = -M_{rP}(r, \theta, t) \delta(r-a) \quad (54.a)$$

$$= -M_{0P} \cos p\theta \delta(r-a) e^{j\omega t} \quad (54.b)$$

$$= -M^* \delta(r-a) e^{j\omega t} \quad (54.c)$$

여기서

$$M^* = M_{0P} \cos p\theta \text{이다.} \quad (55)$$

원판의 횡방향 변위는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\bar{u}_{3P}(r, \theta, t) = U_{3P}(r, \theta) e^{j\omega t} \quad (56.a)$$

$$= \left[J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r) \right] \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (56.b)$$

이 변위를 모달 확장식을 사용하여 나타내면

$$u_{3P}(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) U_{3n}(r, \theta) \quad (57)$$

이고 $q_n(t)$ 는 모드 기여계수(modal participation factor)이며 모멘트가 작용할 경우 다음 식으로부터 구한다.

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = G_n(t) \quad (58)$$

여기서 $G_n(t)$ 는 작용하는 외력 모멘트로서 $G_n(t) = G_n^* e^{j\omega t}$ 이며 G_n^* 은 다음 식으로부터 얻는다⁽¹²⁾.

$$G_n^* = \left[\int_{a_1} \int_{a_2} u_{3n} \left\{ q_n + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial a_2} \right) \right\} A_1 A_2 da_1 da_2 \right] / \left[\int_{a_1} \int_{a_2} u_{3n}^2 A_1 A_2 da_1 da_2 \right] \quad (59.a)$$

$$= -\frac{M_{0P} \pi (\lambda a)}{\rho h_p N_{mn}} \left[J_n(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda a) \right]^2 \quad (59.b)$$

T_1, T_2 는 Fig. 1(c)에 나타나 있고, 또 N_{mn} 은

$$N_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r) \right]^2 \cos n\theta r dr d\theta \quad (60)$$

으로서 수치적분에 의해 구한다.

따라서 원판의 변위를 모드 합으로 나타내면

$$\bar{u}_{3P}(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) U_{3k}(r, \theta) \quad (61.a)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k^*}{\omega_k^2 - \omega^2} U_{3k}(r, \theta) e^{j\omega t} \quad (61.b)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{mn}^* U_{3mn}^P}{\omega_{mn}^2 - \omega^2}(r, \theta) e^{j\omega t} \quad (61.c)$$

여기서 ω_{mn} 는 원판의 고유진동수이고 ω 는 구하고자 하는 조합구조물의 진동수이며 $U_{3mn}^P(r, \theta)$ 는 식 (56.b) 이다.

또한 선 모멘트에 의한 원판의 기울기는 식 (61)을 미분하여

$$\theta_p(r, \theta, t) = -\frac{\partial}{\partial r} u_{3P}(r, \theta, t) \quad (62.a)$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{mn}^* U_{3mn}^P(r, \theta)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} e^{j\omega t} \quad (62.b)$$

이며 식 (62)의 $U_{3mn}^P(r, \theta)$ 은

$$U_{3mn}^P(r, \theta) = -\lambda \left[J_{n+1}(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda r) \right] \cos n\theta \quad (63)$$

이고 λa 는 단순경계 원판의 고유값으로부터 구한다.
따라서

$$\theta_P(a, \theta, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 a \pi M_{0P}}{\rho h_p N_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} [J_{n+1}(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a)]^2 \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (64)$$

이로부터 구한 선 모멘트 작용에 대한 원판의 동적응답은 다음 식과 같다.

$$\beta_{22} = \frac{\theta_P(a, \theta, t)}{T_1(a, \theta, t)} \quad (65.a)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi \lambda^2 a}{\rho h_p} \frac{[J_{n+1}(\lambda a) - J_n(\lambda a)/I_n(\lambda a) * I_{n+1}(\lambda a)]^2}{N_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (65.b)$$

2.4 원판부착 원통셀의 진동수 방정식 및 모드 형상
셀에 원판이 부착되면 부착 경계에서는 상호 구속에 의해 진동에 의한 동적 모멘트와 횡하중이 발생하며 이들 모멘트와 하중에 의한 동적 응답은 2.3절에서 구하였다.

원판과 원통셀의 접합 경계에서의 연속조건을 적용한 식 (22)에서 무용 해를 얻지 않기 위한 조건으로부터 다음의 조합원통셀의 진동수 방정식(Frequency Equation : FQE)을 얻을 수 있다.

$$FQE = (\alpha_{11} + \beta_{11})(\alpha_{22} + \beta_{22}) - \alpha_{12} * \alpha_{21} = 0 \quad (66)$$

식 (66)은 비선형 방정식이며 수치적인 방법으로 해를 구해야 하고 구한 해를 식 (22)에 대입하여 q_3, M_3 의 비를 구한 후 조합 원통셀의 모드 형상을 식(43)과 식 (61)로부터 구할 수 있다.

3. 수치 해

3.1 원통셀의 진동수

고정-자유 원통셀의 진동수 방정식인 식 (14)를 전개하면 진동수 매개변수에 대한 3차 방정식이 되며 이 근은 3차 방정식의 근의 공식으로부터 구할 수 있다. 이러한 방법으로 구한 고정-자유 원통셀의 진동수의 계산검토는 참고문헌 19에서 잘 보여주고 있다.

본 연구에서 계산 예로 사용되는 셀의 재원 및 물성은 길이 200mm, 두께 2mm, 반경 100mm, 영율 $20.6 * 10^4 \text{N/mm}^2$, 밀도 $7.85 * 10^{-9} \text{N sec}^2/\text{mm}^4$ 이고

원판의 재질과 두께는 셀과 같다.

원판이 부착되지 않은 고정-자유 원통셀에 대한 진동수 계산 결과 축방향 반파수 $M=1$ 에 대해 세 개의 근으로부터 구한 진동수를 원주방향 모드 수에 따라 진동수를 로그로 취하여 도시하면 Fig. 2와 같고, 이들 중 최저 진동수를 축방향 모드별로 나타내면 Fig. 3과 같이 변화한다.

3.2 조합 원통셀 진동수 계산의 수렴성 검토

동적 응답식 (40), (41) 및 (45), (46)과 (65)는 모드함으로 표현되는 변위 및 기울기를 포함하므로 최대로 더해지는 모드함인 원통 셀의 축방향 반파수 항 및 원판의 모드 항 수에 따라 수치 결과에 영향

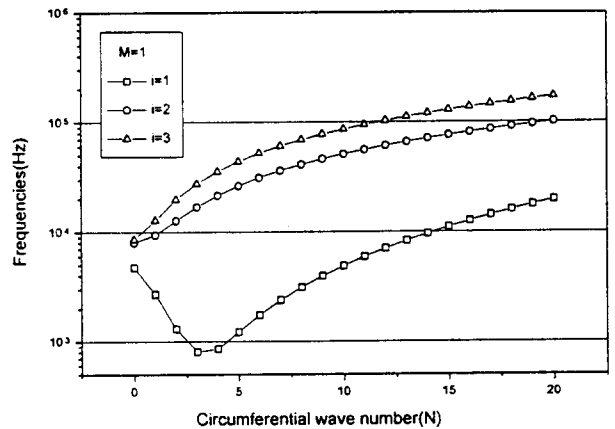


Fig. 2 Natural frequencies (Hz) of clamped-free circular cylindrical shell for axial half wave $M=1$ as a function of circumferential wave number

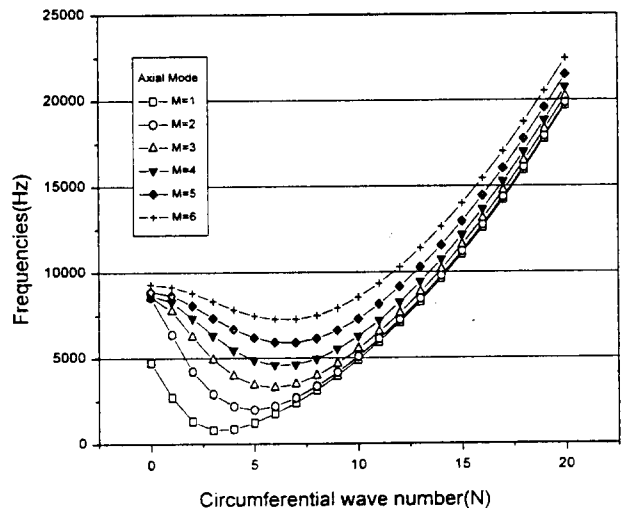


Fig. 3 Minimum frequencies of clamped-free circular cylindrical shell for various axial mode number as a function of circumferential wave number

을 줄 수 있어서 항 수에 따른 결과비교를 위해 $N=0$ 모드를 예로 들어 더하여지는 축방향 반파수 항 수에 따른 계산 결과를 Table 1 및 Fig. 4에 나타내었다.

Table 1 Calculated frequencies as a function of maximum axial mode summation index (Hz)

m	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	446.6	1905.9	4350.5	6136.2	7771.5	8297.5
10	439.7	1877.2	4257.1	5391.4	7546.3	8176.6
20	433.3	1853.9	4207.3	5390.3	7487.3	8170.2
30	430.7	1843.3	4188.2	5390.0	7462.6	8168.2
40	428.9	1837.6	4175.4	5389.4	7447.7	8167.0

Fig. 4에서 보면 조합 원통셀의 진동수는 축방향 반파수의 항 수의 증가에 따라 조합구조물의 축방향 모드수 $M=1, M=2$ 에서는 큰 차이를 보이지 않으며 조합구조물의 축방향 반파수가 증가하면(예로써 $M=3, 4, 5$) 모드 합에서 사용되는 축방향 반파수의 항 수 증가에 따라 점차 높은 값에서 낮은 값으로 수렴하는 것을 보이고 축방향 반파수를 10항 이상을 사용하여도 이후로는 거의 일정함을 보이고 있으므로 본 연구의 계산에는 계산 시간의 절약과 일반 PC에서 계산 가능하도록 더해지는 축방향 반파수 항 수를 $m=40$ 을 사용하여 계산하였다.

특이점을 갖는 불연속 조합 원통셀의 진동수 방정식 (66)의 해는 수치적인 방법으로 구하여야 하며

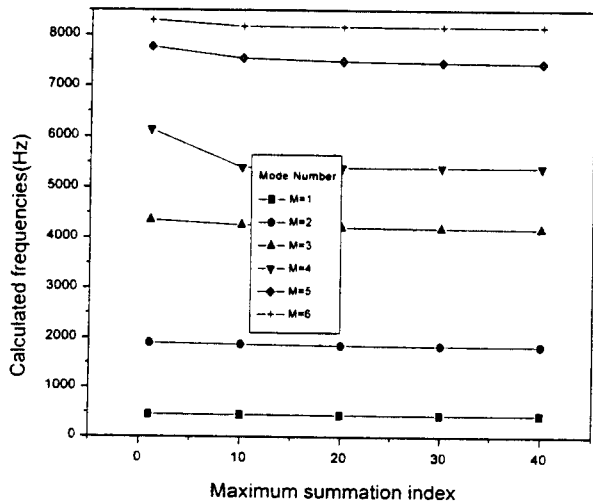


Fig. 4 Calculated frequencies as a function of maximum axial mode summation index

근을 구하기 위해 여기서는 점진적 증가(Incremental searching) 방법과 이분법(bisection method)을 사용하였다. 이것은 조합 원통셀의 진동수를 가정한 후 이미 구하여 놓은 셀만의 진동수와 원판만의 각 모드에서의 진동수를 이용하여 동적 응답을 구한 후 진동수 방정식인 식 (66)의 부호가 변화될 때까지 가정된 근을 증가시켜 가며 근을 찾는 것으로 이 때 특이점의 근을 배제하기 위하여 (66)식의 일차미분의 값이 양이 되는 조건을 추가하여

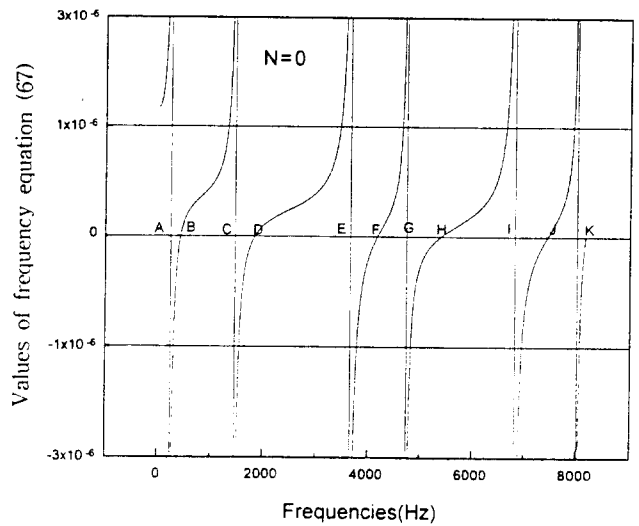


Fig. 5 Variation of frequency equation (eq. (66)) as a function of frequencies ($N=0$)

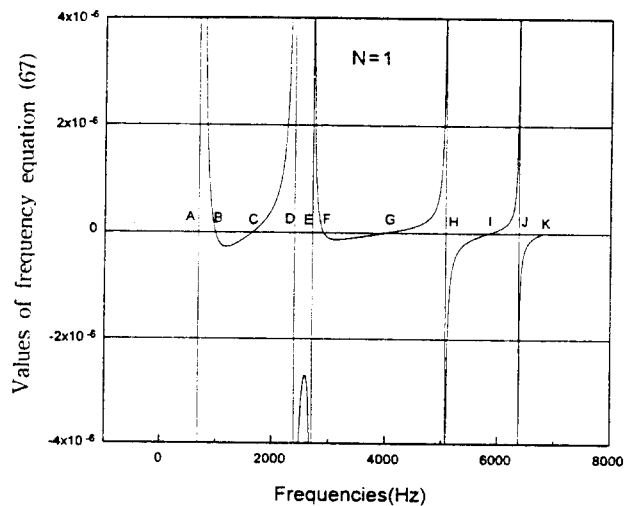


Fig. 6 Variation of frequency equation (eq. (66)) as a function of frequencies ($N=1$)

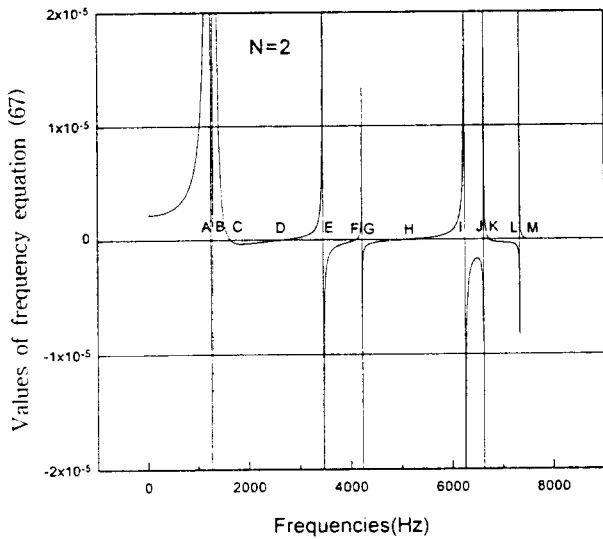


Fig. 7 Variation of frequency equation (equ. (66)) as a function of frequencies ($N=2$)

근을 찾았다.

이렇게 하여 구한 조합 원통셀의 진동수 변화에 따른 식 (66)의 변화 추이를 보이기 위해 원주방향 모드 $N=0, 1, 2$ 에 대하여 예시하면 Fig. 5~Fig. 7과 같다. 여기서 구하고자 하는 근은 그림에서 영이 되는 곳이며, 이 근 또한 근을 구하는데 사용된 미소 증분 구간의 크기 및 근으로 판별되는 미소값 ϵ 의 크기에 따라 다소 차이를 보일 수 있으나 여기서는 미소 구간의 각진동수 증가를 $20\text{rad/sec}(=3.183\text{ Hz})$ 와 이분법에서의 ϵ 은 1.0×10^{-6} 을 사용하여 구하였다.

3.3 조합 원통셀의 고유진동수 및 모드형상

조합 원통셀의 진동수를 구하기 위해서는 2.3절에서 언급한 대로 보 함수의 셀 길이에 걸친 적분을 포함하는 변위를 구하여야 하며, 이 보 함수의 적분은 Mathematica⁽²¹⁾를 이용하여 기호적분(symbolic integration) 한 후 수치해를 구할 수 있고⁽²²⁾ 이를 이용하여 필요한 동적 응답식의 값을 구한 후 진동수 방정식으로부터 조합 원통셀의 진동수를 구한다.

진동수를 변화시켜가며 조합 원통셀의 진동수 방정식 (66)을 각진동수 $30000\text{ rad/sec}(=4774\text{ Hz})$ 까지 구하여 가로축에 조합 원통셀의 진동수를, 세로축에 식 (66)의 진동수 방정식의 값 FQE의 변화를 도시한 Fig. 5~Fig. 7에서 특이점 (singular point)을 보이는 곳은 모두 원판이나 셀만의 진동수로서 구하고자 하는 조합 원통셀의 진동수는 이들 사이에 위치하게 된다. 원주방향 파수 $N=0$ 모드에 대한 진

동수 방정식의 변화를 보이는 Fig. 5에서 점 A, C, E, I는 차례로 단순지지 원판의 $N=0$ 모드에 해당하는 고유진동수를 나타내는 점이고, 점 G, K는 $N=0$ 모드에서의 외팔 원통셀의 고유진동수에 해당하는 점이다. 구하여진 조합 원통셀의 진동수는 차례로 B, D, F, H, J로서 처음 두 진동수는 원판의 진동수 사이에 위치하므로 원판의 진동이 지배적인 모드의 진동수임을 알 수 있고, 세 번째 조합 원통셀의 진동수인 F는 원판과 셀의 진동수 사이에 위치하여 상호 연성된 모드의 진동수가 될 것으로 예측된다. 이와 같은 현상은 $N=1$ 및 $N=2$ 에 대한 Fig. 6, Fig. 7에서도 같은 경향으로 나타나며 이 그림을 통하여 진동의 지배 모드를 유추 할 수 있고, 이들 원판과 셀의 지배 모드에 대한 모드 특성은 다음에 기술하는 모드 형상과 연관시켜 확인할 수 있다.

Table 2 Natural frequencies of shell/plate combined structure as a function of circumferential wave number (Hz)

N	$M=1$	$M=2$	$M=3$	$M=4$
0	428.9	1837.6	4175.4	5389.4
1	989.1	1648.0	2903.4	4006.7
2	1652.4	2662.4	4102.2	5128.4
3	1915.4	2473.7	3983.3	5297.1
4	1603.5	3109.1	3537.4	4898.0
5	1639.7	2891.2	4174.6	4627.4
6	1986.7	2899.0	4146.8	5346.8
7	2542.5	3210.1	4273.2	5533.2
8	3246.0	3762.8	4661.1	5829.2
9	4065.2	4496.9	5271.6	6341.1
10	4993.0	5375.0	6063.0	-

Table 2에는 진동수 방정식으로부터 구한 조합 원통셀의 진동수를 축방향 반파수 M 및 원주방향 파수 N 에 따라 나타내었다.

Fig. 8(a)는 조합 원통셀의 모드형상을 보이기 위하여 셀벽을 따라 $\theta=0$ 에서의 축방향 모드를 그림의 위에서부터 차례로 $M=1, 2, 3$ 에 대하여 나타내었고, Fig. 8(b)는 $\theta=0$ 를 따라 부착 원판의 진동 모드를 위에서부터 $M=1, 2, 3$ 에 대하여 보이고 있다. Fig. 8(a)에서 진동수 방정식으로부터 구한 첫 근에 해당하는 $M=1$ 진동 모드를 보면, 원주방향 파수 N 이 증가할수록 축방향 반파수가 1이 되는 본래의 원통셀의 지배 진동모드 형상을 보이고 원판의 진동이 크게 나타나는 진동모드인 $N=0, N=2$ 에서는 셀의 본래의 축방향 모드형상에서 변형이 되어 나타남을

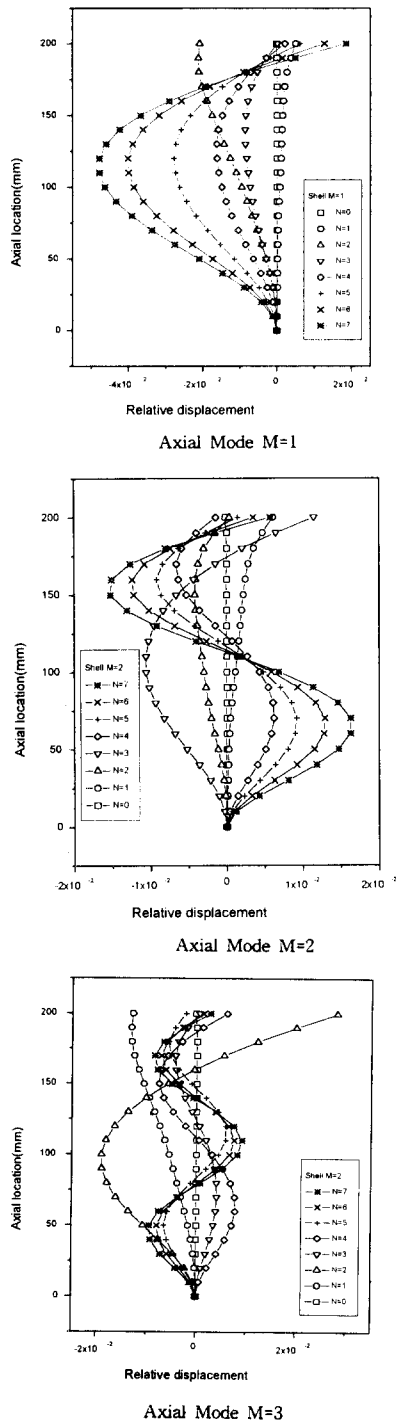


Fig. 8 (a) Shell mode shape of shell/plate combined structure at $\theta=0$

보인다.

Fig. 8(a)의 가운데 그림은 진동수 방정식에서 두 번째로 구한 진동수 근에 해당하는 모드형상으로써

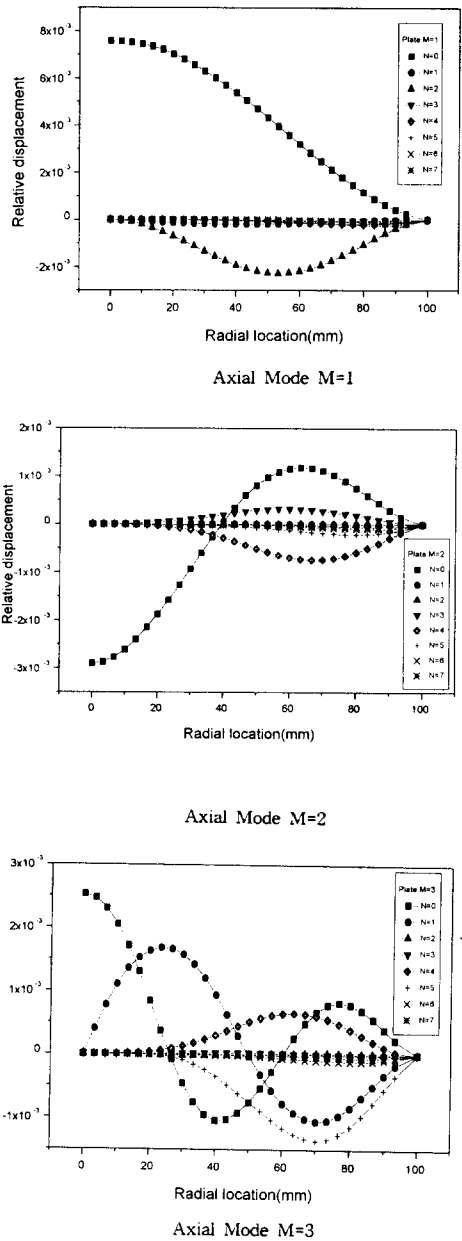


Fig. 8 (b) Plate mode shape of shell/plate combined structure at $\theta=0$

원주방향 파수 N 이 0일 때는 셀의 진동보다는 원판의 지배 진동 모드형상을 보이고 $N=4, 5, 6, 7$ 모드에서는 외팔 원통셀의 원래의 진동 모드형상인 축방향 반파수 $M=2$ 의 형상을 보이며 원판의 영향에 의해 원주방향 파수 $N=1, 2$ 에서는 축방향 반파수 $M=2$ 인 원통셀의 축방향 진동 모드형상에서 변형된 축방향 반파수 1인 진동모드 형상을 보인다.

Fig. 8(a)의 최하단 그림은 진동수 방정식에서 구

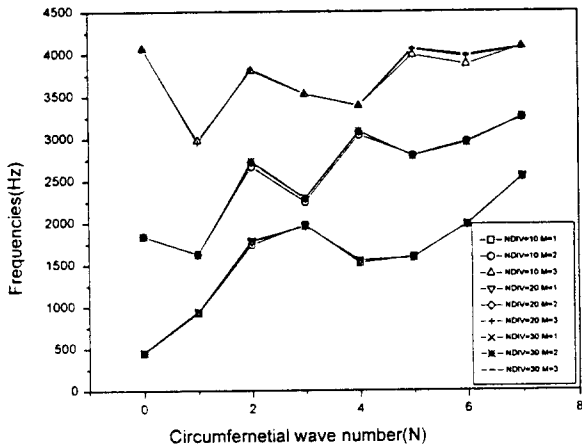


Fig. 9 Calculated frequencies from ANSYS as a function of element size

한 세 번째의 근에 해당하는 모드형상으로써 ($M=3$) 여기서도 원주방향 파수가 비교적 큰 $N=5, 6, 7$ 모드형상은 원래의 원통셀의 축방향 진동모드를 보이거나 $N=1, 2, 3, 4$ 모드형상은 원판의 부착에 따라 변형된 셀의 진동 모드형상을 보인다.

3.4 ANSYS 계산 결과와의 비교

수치해의 타당성을 보이기 위해 ANSYS를 이용한 진동수 계산과 모드형상을 얻은 후 그 계산결과를 여기서의 수치 결과와 비교하였다. ANSYS의 계산에는 탄성 셀 요소인 Shell 63 요소를 사용하였고 모

드계산 선택(option)으로서 subspace iteration 방법을 채택하여 모드 축소 방법(mode reduction method)보다 정확한 계산을 하도록 하였다.

ANSYS 계산에서는 사용하는 요소의 크기가 계산 결과에 영향을 줄 수 있으므로 유한요소 크기를 원통셀 길이의 1/10, 1/20, 1/30로 변화시켜 가며 계산하고 요소 크기에 따른 계산 결과의 변화를 검토하였다. 이 계산 결과를 모드 별로 도시하면 Fig. 9와 같으며 여기서 사용한 세 경우의 요소 크기에 따라서는 계산 결과에 큰 차이를 보이지 않음으로 이 결과를 토대로 계산 시간을 고려하여 셀 길이를 20등분 ($esize=L/20=10mm$)한 요소 크기를 사용하였다.

Table 3 Natural frequencies of shell/plate combined structure from ANSYS as a function of circumferential wave number (Hz)

N	M=1	M=2	M=3	M=4
0	454.9	1786.4	3984.5	5233.4
1	946.9	1837.1	2729.8	3526.1
2	1556.5	2787.7	3784.5	5139.0
3	1961.0	2292.8	4071.9	4984.8
4	1586.4	3083.0	3385.8	4987.5
5	1623.9	2945.7	4062.2	4547.1
6	1981.9	2945.7	4284.1	5168.5
7	2544.9	3264.1	4417.5	5743.5
8	3249.4	3825.3	4814.8	5792.8
9	4069.7	4565.3	5340.3	—
10	4995.9	5445.5	—	—

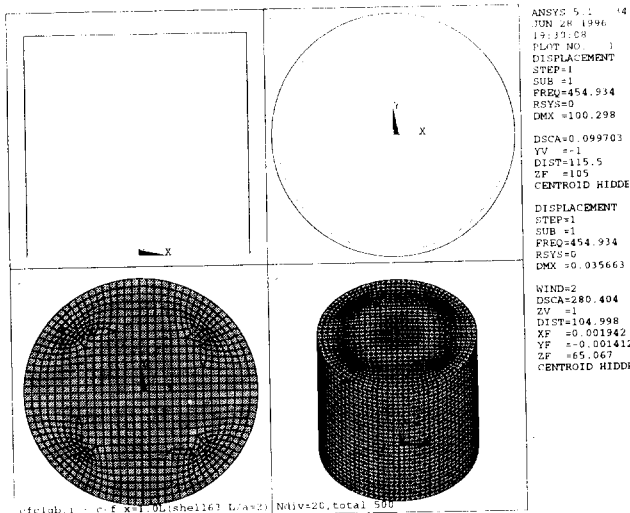


Fig. 10 (a) Mode shape of combined structure at(1, 0) mode from ANSYS

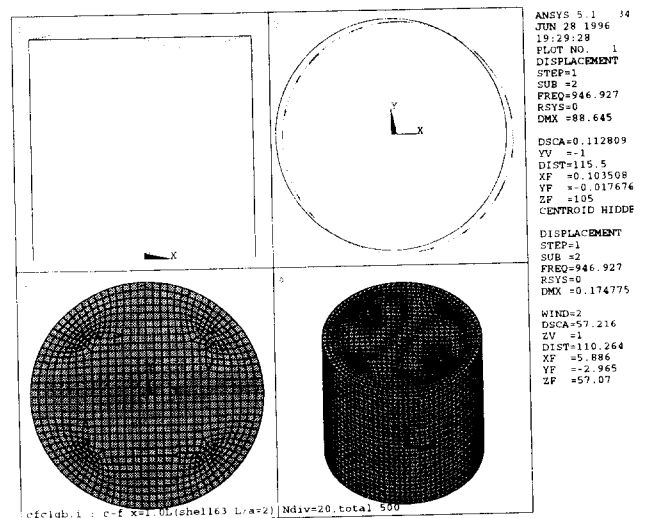


Fig. 10 (b) Mode shape of combined structure at(1, 1) mode from ANSYS

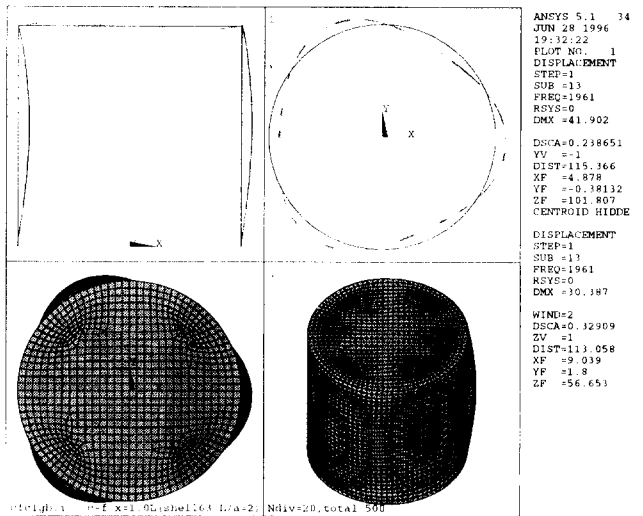
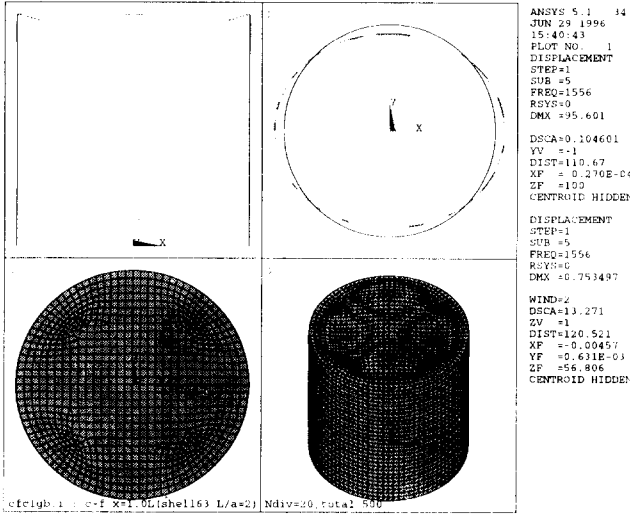


Fig. 10 (c) Mode shape of combined structure at (1, 2) mode from ANSYS

Fig. 10 (d) Mode shape of combined structure at (1, 3) mode from ANSYS

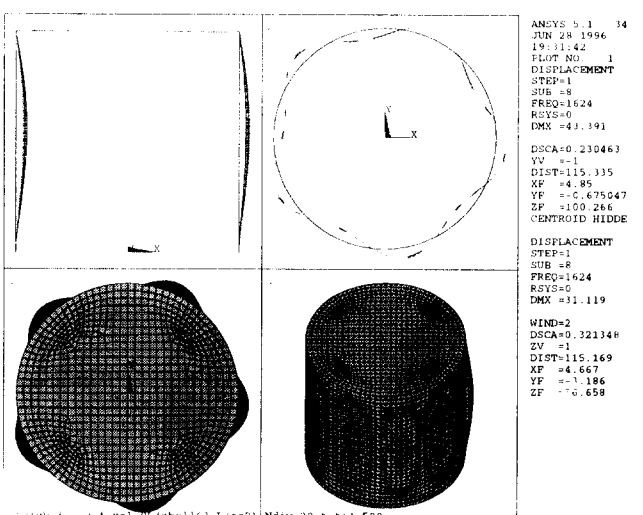
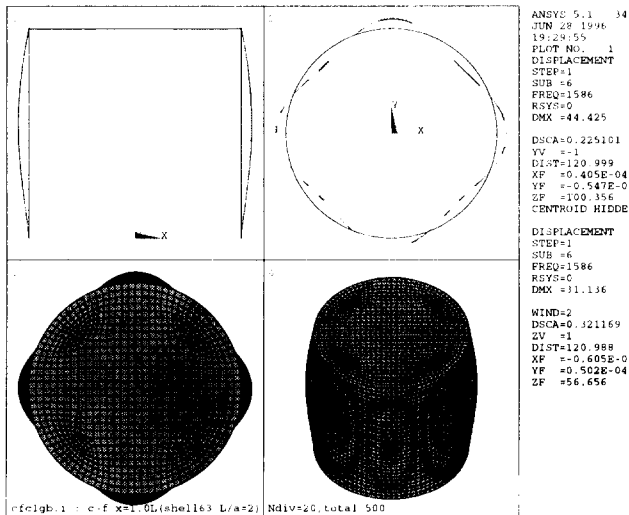


Fig. 10 (e) Mode shape of combined structure at (1, 4) mode from ANSYS

Fig. 10 (f) Mode shape of combined structure at (1, 5) mode from ANSYS

Table 3은 ANSYS 계산결과인 진동수를 축방향 반파수 M 및 원주방향 파수 N 의 변화에 따라 나타내었고 Fig. 10(a) ~ (g), Fig. 11(a) ~ (g), Fig. 12(a) ~ (g)는 ANSYS결과로 얻은 진동 모드형상을 보이고 있다. ANSYS의 모드 형상 결과에서 모드형상의 식별을 용이하도록 하나의 모드를 4개의 다른 시점(view point)으로 나타내었다.

본 연구 결과로 얻은 모드 형상과 ANSYS의 모드형상은 서로 잘 일치함을 보인다. 일부 모드, 예로

써 (1, 3)의 셀 모드 또는 (2, 1) 모드의 원판 모드들의 모드형상은 상(phase)에 따라 대칭적으로 다른 변화된 모드형상을 보이나 이들은 같은 모드형상이다.

조합 원통셀의 진동수 방정식으로부터 얻은 진동수와 ANSYS의 계산 결과를 비교하기 위하여 각 축방향 모드에 대하여 원주방향 파수가 증가함에 따른 진동수를 나타내면 Fig. 13과 같고, ANSYS를 기준으로 하여 본 연구에서 계산한 진동수 비를 각 모드

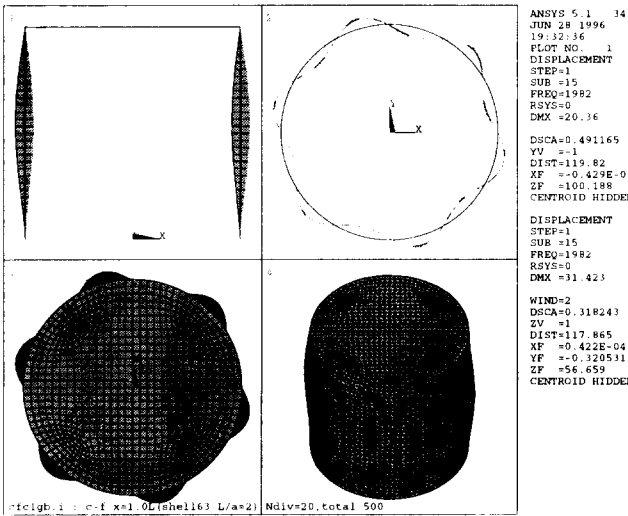


Fig. 10 (g) Mode shape of combined structure at(1, 6) mode from ANSYS

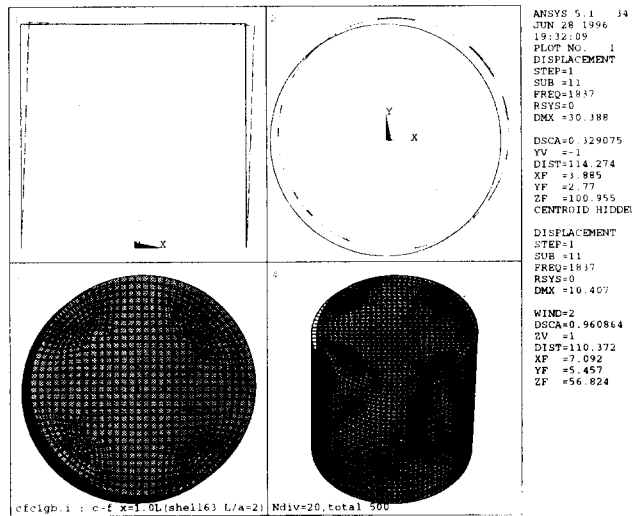


Fig. 11 (b) Mode shape of combined structure at(2, 1) mode from ANSYS

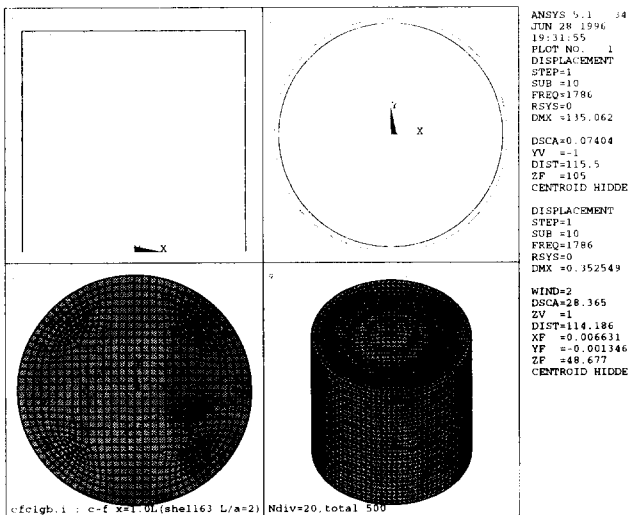


Fig. 11 (a) Mode shape of combined structure at(2, 0) mode from ANSYS

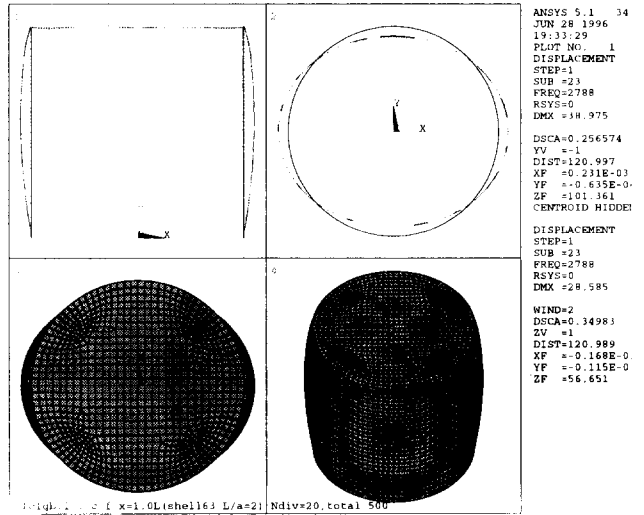


Fig. 11 (c) Mode shape of combined structure at(2, 2) mode from ANSYS

Table 4 Ratios of calculated frequencies to ANSYS calculation(%)

M	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
1	94.28	104.46	106.16	97.67	101.08	100.97	100.24	99.91	99.91	99.88	99.94
2	102.89	89.71	95.51	107.88	100.85	98.14	98.40	98.35	98.37	98.51	98.71
3	104.80	106.35	108.41	97.81	104.47	102.77	96.80	96.74	96.80	98.72	—
4	102.99	113.63	99.79	106.26	98.22	101.77	103.45	96.33	100.62	—	—

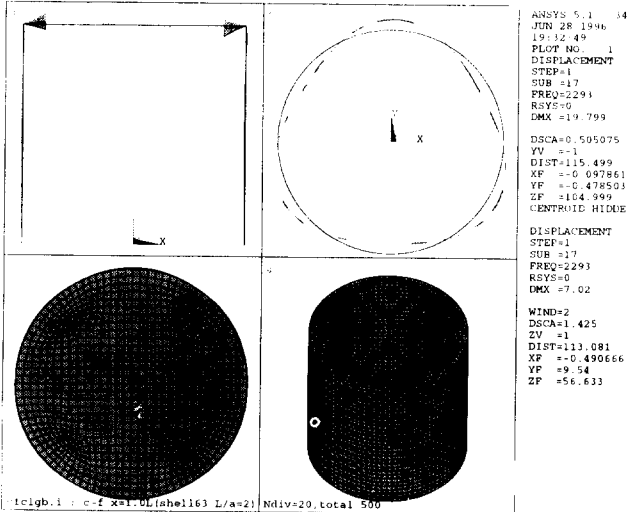


Fig. 11 (d) Mode shape of combined structure at (2, 3) mode from ANSYS

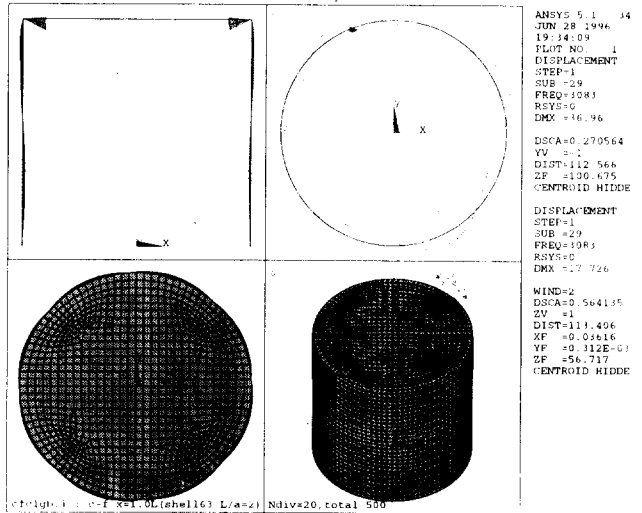


Fig. 11 (e) Mode shape of combined structure at (2, 4) mode from ANSYS

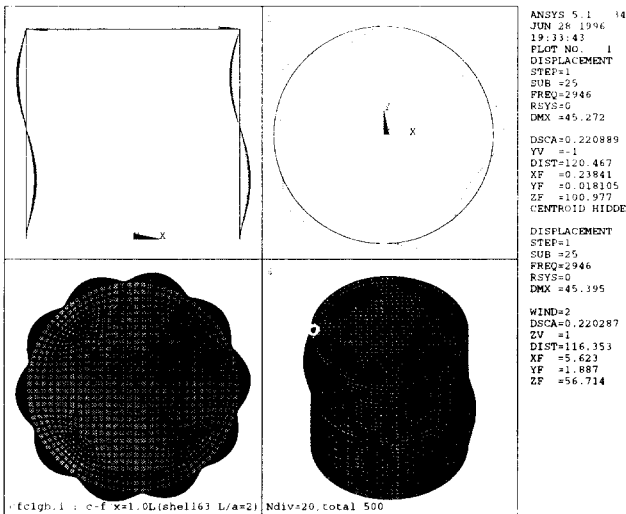


Fig. 11 (f) Mode shape of combined structure at (2, 5) mode from ANSYS

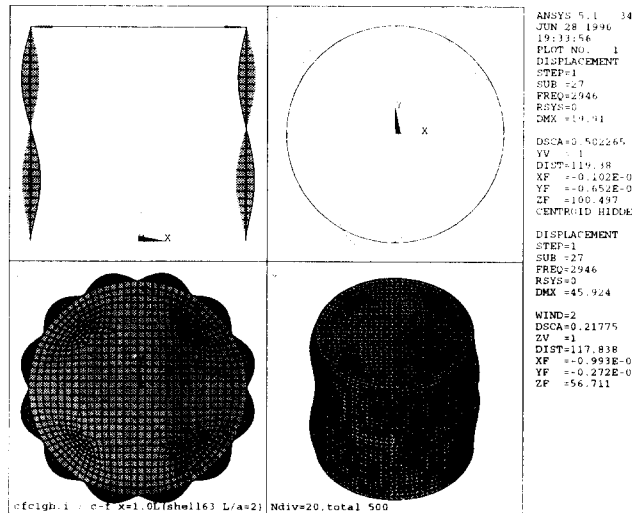


Fig. 11 (g) Mode shape of combined structure at (2, 6) mode from ANSYS

에서의 백분율로 나타내면 Table 4와 같다. Fig. 13에서 알 수 있듯이 축방향 모드수 $M=1$ 에서는 두 경우 잘 일치함을 보이고 $M=2, 3, 4$ 에서도 서로 잘 대응되고 있음을 보이고 있으나 Table 4에서 모드 (4, 1) 및 모드 (2, 1)에서는 ANSYS결과를 기준으로 할 때 최대 +13%, 최소 -11%를 보일 뿐 각 모드별 평균값은 축방향 반파수 $M=1, 2, 3, 4$ 모드에서 각각 104.4%, 98.9%, 101.4%, 102.57%로써 전체 평균 백분율 101.8%를 보이는 비교적 잘

일치하는 결과를 보인다.

4. 결 론

고정-자유 경계조건인 외팔 원통셀 상단에 원판이 부착되어 있는 조합 원통셀의 고유진동해석을 위한 진동수 방정식을 응답법을 이용하여 유도하고 고유진동수 및 모드형상을 구한 후 원판의 부착에 따른 진동수 영향을 고찰하였다.

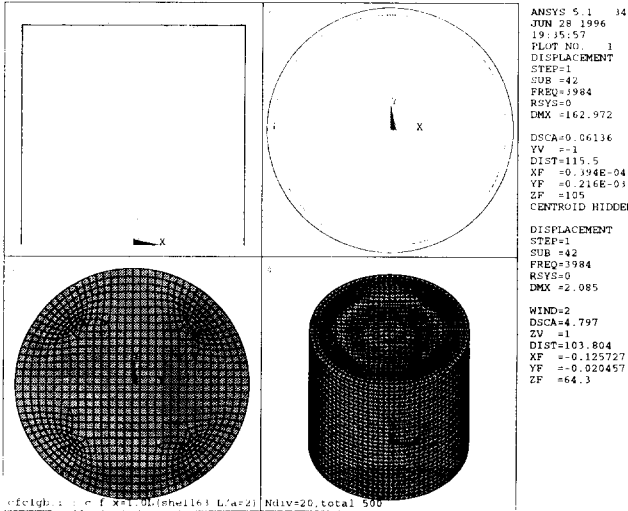


Fig. 12 (a) Mode shape of combined structure at(3, 0) mode from ANSYS

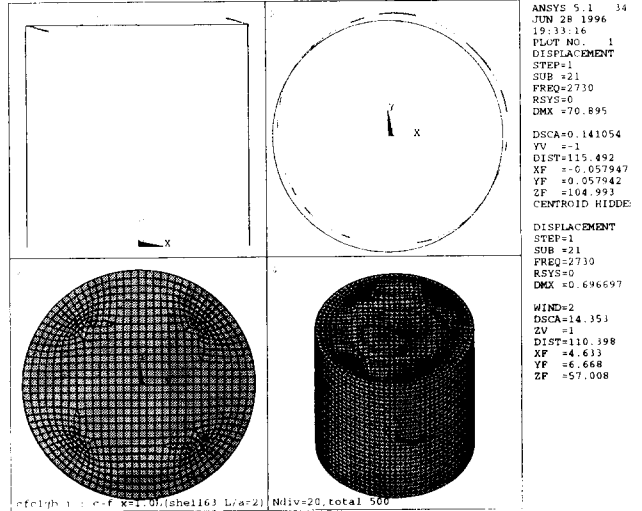


Fig. 12 (b) Mode shape of combined structure at(3, 1) mode from ANSYS

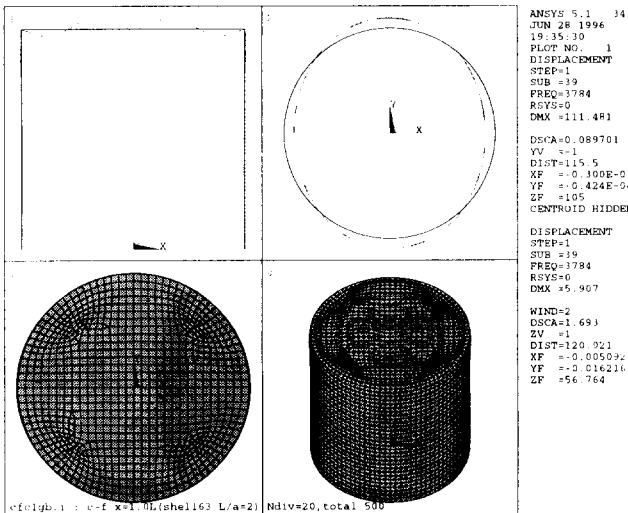


Fig. 12 (c) Mode shape of combined structure at(3, 2) mode from ANSYS

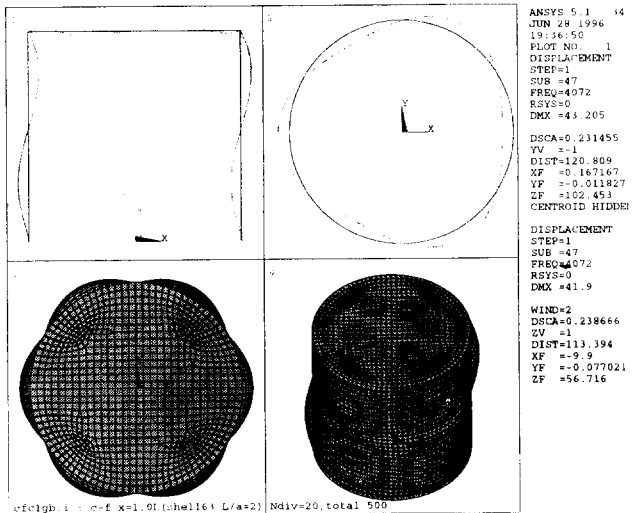


Fig. 12 (d) Mode shape of combined structure at(3, 3) mode from ANSYS

수치해의 적합성을 검토하기 위하여 ANSYS를 이용하여 진동수 및 모드형상을 구한 후 응답법 해석으로 얻은 수치 결과와 비교하였으며 모드 형상은 ANSYS와 잘 일치하고 본 연구에서 구한 진동수 계산은 경향과 수치적인 결과에 있어 잘 일치하는 결과를 보이고 있다. 구해진 모드 형상의 검토로부터 원판 부착에 의해 원판의 진동이 크게 나타나는 원주방향 파수에서 외팔 원통셀의 본래 축방향 모드형상이 변형되어 나타남을 보인다. 여기서 사용한 원

통셀과 원판의 제원 및 물성의 경우 낮은 원주방향 파수에서는 원판의 진동이 지배적이고, 원주방향 파수가 증가할수록 셀의 진동이 지배적임을 보인다.

앞으로 여기에서 사용한 방법은 실험을 통한 검증 후 원판 이외의 덮개 부착 고정-자유 조합 원통셀의 진동해석에 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

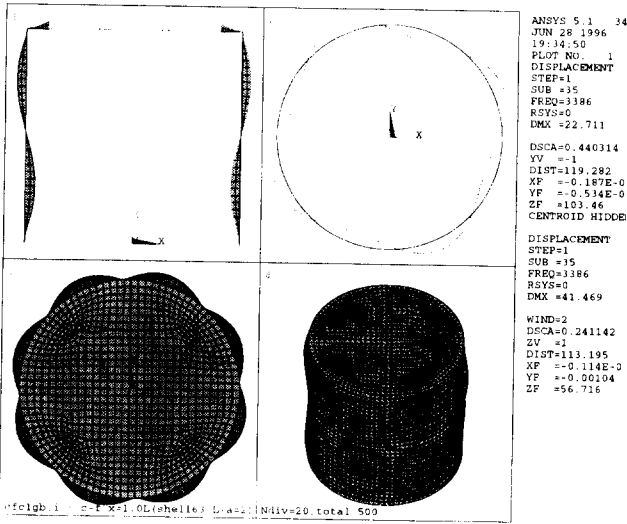


Fig. 12 (e) Mode shape of combined structure at (3, 4) mode from ANSYS

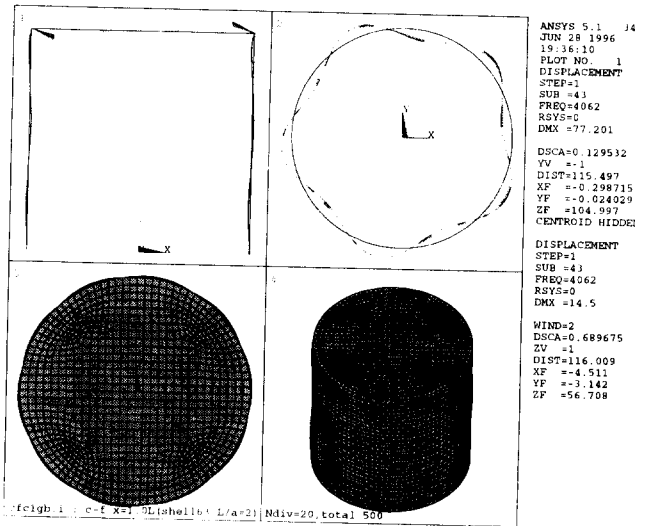


Fig. 12 (f) Mode shape of combined structure at (3, 5) mode from ANSYS

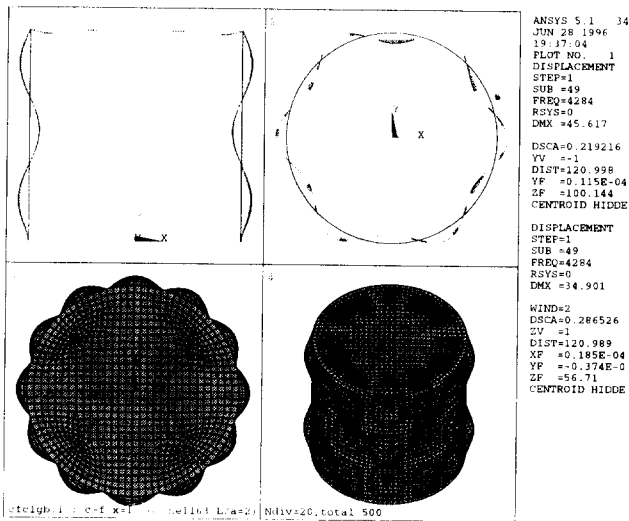


Fig. 12 (g) Mode shape of combined structure at (3, 6) mode from ANSYS

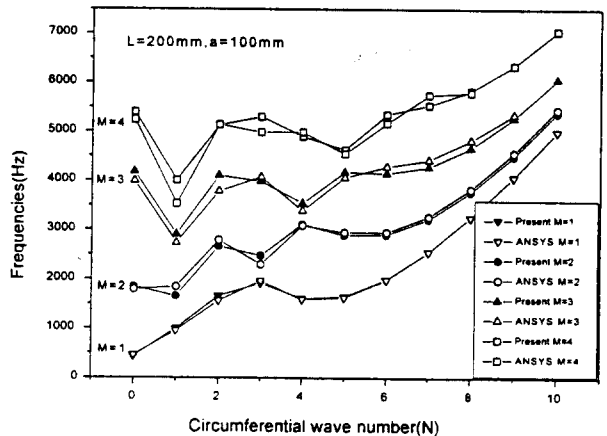


Fig. 13 Comparison of frequencies from analytical value with that of ANSYS

참고문헌

- (1) C. B. Sharma, D. J. Johns, 1970, "Vibration Characteristics of Clamped/Free and Clamped/Ring Stiffened Cylindrical Shells, A theoretical Analysis", TT7001, Loughborough University of Technology
- (2) C. B. Sharma, 1984, "Free Vibration of Clamped

-Free Circular Cylindrical Shells", Thin Walled Structures Vol. 2, pp. 175~193.

- (3) C. B. Sharma, 1974, "Calculation of Natural Frequencies of Fixed-Free Circular Cylindrical Shells", J. of Sound and Vibration Vol. 35(1), pp. 55~76.
- (4) C. B. Sharma, D. J. Johns, 1971, "Vibration Characteristics of Clamped/Free and Clamped/Ring Stiffened Cylindrical Shell", J. of Sound and

- Vibration, Vol. 14(4), pp. 459~474.
- (5) C. B. Sharma, D. J. Johns, 1972, "Free Vibration of Cantilever Circular Cylindrical Shells-A Comparative Study", J. of Sound and Vibration Vol. 25(3), pp. 433~449.
- (6) D. J. Johns, R. J. Allwood, 1968, "Vibration Study of a Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shell", J. of Sound and Vibration, Vol. 8(1), pp. 147~155.
- (7) G. B. Warburton, J. Higgs, 1970, "Natural Frequencies of thin Cantilever Cylindrical Shells", J. of Sound and Vibration, Vol. 11(3), pp. 335~338.
- (8) 이영신, 문홍기, 1986, "직교이방성 외팔 원통셀의 자유진동해석", 대한기계학회논문집, 제 10 권 제 6호, pp. 929~936.
- (9) 염기연, 윤경호, 김종균, 이영신, 1995, "내부가 유체로 채워진 보강 원통셀의 동적 거동해석", 대한기계학회지, 1995년 춘계학술대회논문집(1), pp. 721~725.
- (10) 김태룡, 정승호, 박진호, 박진석, 정경훈, 1993, "원자로 내부 구조물 동특성 변화에 관한 연구(최종보고서)", KAERI/RR-1267/93, 한국원자력 연구소.
- (11) 정경훈, 이성철, 1994, "Fourier 급수전개를 이용한 부분적으로 유체가 채워진 원통형 셀의 고 유진동해석", 한국소음진동공학회지, 제 4 권, 제 1 호, pp. 163~175.
- (12) W. Soedel, 1993, "Natural Frequencies and Modes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at Arbitrary Axial Positions", J. of Sound and Vibration, Vol. 162(3), pp. 403~427.
- (13) D. T. Huang, W. Soedel, 1993, "On the Free Vibration of Multiple Plates Welded to a Cylindrical Shell with Special Attention to Mode Pairs", J. of Sound and Vibration, Vol. 162(2), pp. 315~339.
- (14) S. Azimi, W. Soedel and J. F. Hamilton, 1986, "Natural Frequencies and Modes of Cylindrical Polygonal Ducts using Receptance Method", J. of Sound and Vibration, Vol. 109(1), pp. 79~88.
- (15) S. Takahashi, Y. Hirano, 1971, "Vibration of a Combination of Circular Plates and Cylindrical Shells, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers", Vol. 14, pp. 20~28.
- (16) K. Suzuki, T. Kosawada, T. Uehara, 1991, "Free Vibration of a Vessel Consisting of Circular Plates and a Shell of Revolution Having Varing Meridional Curvature", J. of Sound and Vibration Vol. 144(2), pp. 263~279.
- (17) G. Yamada, T. Irie and T. Taiya, 1986, "Free Vibration of a Circular Cylindrical Double-Shell System Closed by End Plates", J. of Sound and Vibration, Vol. 108(2), pp. 297~304.
- (18) Swanson Analysis Co. 1996. "ANSYS User's Manual", Ver. 5.1.
- (19) 임정식, 1996, "일단고정-일단자유 원통셀의 진동 해석" 한국소음진동공학회지, 제 6권 제 1호 pp. 45~56.
- (20) W. Soedel, 1993, "Vibration of Shell and Plates", 2nd ed. Marcel Dekker, Inc., New York.
- (21) S. Wolfram, "Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer", 2nd ed. Addison Wesley.
- (22) J. S. Yim, Y. S. Lee, D. S. Sohn, 21-23 Aug. 1996. "Free Vibration Analysis of Clamped-Free and Clamped-Free with Ring Stiffened Circular Cylindrical Shells", Advances in Computational Method for Simulation, the 3rd International Conference on Computational Structures and Technology '96, Budapest, Hungary, Vol. E, pp. 247~253.