

<論 文>

# 이중 사인 시리즈법에 의한 직사각형 평판의 자유 진동해석

## Double Fourier Sine Series Method for The Free Vibration of a Rectangular Plate

윤 중 옥\* · 이 장 무\*\*

Jong Ouk Youn and Jang Moo Lee

(1996년 7월 6일 접수 ; 1996년 9월 7일 심사완료)

**Key Words :** Free Vibration Analysis(자유 진동 해석), Rectangular Plate(직사각형 평판), Double Fourier Sine Series(이중 푸리에 사인시리즈), Modal Displacement Functions(모달 변위 함수), Lagrangian Multiplier Method(라그랑지 상수법), Stokes' transformation(스톡스 변환), Natural Frequency(고유 진동수), Natural Mode Shape(고유 모드), MSC/NASTRAN

### ABSTRACT

In this paper, double Fourier sine series is used as a modal displacement functions of a rectangular plate and applied to the free vibration analysis of a rectangular plate under various boundary conditions. The method of stationary potential energy is used to obtain the modal displacements of a plate. To enhance the flexibility of the double Fourier sine series, Lagrangian multipliers are utilized to match the geometric boundary conditins, and Stokes' transformation is used to handle the displacements that are not satisfied by the double Fourier sine series. The frequency parameters and mode shapes obtained by the present method are compared with those obtained by MSC/NASTRAN and other analysis.

#### 기 호 설 명

- $a, b$  : 평판의 폭 및 길이
- $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{0n}, E_{0n}, F_{mn}, G_{mn}, \mu_p, \varepsilon_q, \tau_r, v_s$  : 평판 모달 함수의 푸리에 시리즈 계수
- $C$  : 고정-경계단
- $C_{ij}$  : 주파수 행렬식의 요소
- $D$  : 평판의 굽힘 강성 $[Eh^3/12(1-\nu)]$
- $E$  : 탄성 계수
- $F$  : 자유-경계단
- $h$  : 평판의 두께
- $m, n, l, p, q, r, s$  : 푸리에 시리즈 계수
- $M_x(x, y), M_y(x, y)$  : 굽힘 모멘트
- $M, N, L$  : 푸리에 시리즈의 항수
- $S$  : 단순-지지단
- $T_p$  : 평판의 운동에너지
- $U_p$  : 평판의 탄성에너지

- $V_x(x, y), V_y(x, y)$  : 전단력
- $w(x, y)$  : 모달 변위 함수
- $W(x, y, t)$  : 횡 방향 변위
- $\nabla^2$  : Laplacian $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$
- $\nu$  : 프와송 비
- $\omega$  : 원 주파수
- $\rho$  : 밀도
- $\mu_c, \varepsilon_c, v_c, \tau_c$  : 모서리의 변위
- $\Delta$  : 변분 연산자
- $\emptyset$  : 범함수
- $\Lambda_{ii}$  : 라그랑지 상수
- $\Omega$  : 주파수 매개변수 $[\omega a^2 \sqrt{h\rho/D}]$

### 1. 서 론

평판은 항공기, 잠수함, 선박, 자동차 등 수 많은 분야에서 응용되는 구조물 요소이다. 평판은 두께가

\*정회원, 서울대학교 정밀기계설계공동연구소  
\*\*정회원, 서울대학교 공과대학 기계설계학과

다른 치수 비하여 매우 작은 값을 가지는 직선, 평면 형태이며 탄성-지지단, 탄성 구속 조건을 포함해서 자유-경계단, 고정-경계단, 단순-지지단 등의 경계 조건을 갖는다.

일반적으로 평판의 진동 해석은 다음의 두 방향에서 접근할 수 있다.

- (1) 미분방정식 접근법(differential equation approach)
- (2) 변분법 접근법(variation approach)

미분방정식 접근법은, 먼저 일반 해를 구할 수 있을 경우에 이용된다. 이 방법은 일반 해가 해당 경계 조건을 만족시키도록 구속하면 고유치 해석 문제로 바뀐다. 그러나 일반 해를 구하기가 어렵거나 수학적으로 복잡할 경우에는 변분법 접근법이 유리하다. 동적 하중을 받고 있는 구조물의 허용치(acceptance criteria)는 일반적으로 응력의 크기 값으로 표시된다. 동적 응력을 계산할 때 먼저 고유모드 해석이 이루어져야 하며 이때 정확한 모달 함수가 필요하다. 왜냐하면, 모달 함수를 공간 변수에 대하여 두 번 미분하면 응력이 계산되기 때문이다.

수학적인 평판의 박막이론은 Euler(1766)에 의하여 처음으로 이루어졌다. 그는 원형 및 직사각형 박막의 자유진동 문제를 풀었다. 그 후, Bernoulli를 위시한 많은 학자들이 평판에 대한 이론을 보완하여 정확한 운동방정식을 유도하였다. Navier는 굽힘 강성을 포함하는 운동 방정식을 유도하였으며 일부 경계 조건의 경우에 대하여 미분방정식을 대수방정식으로 바꾸어 엄밀해를 구하였다. Navier는 Fourier가 제안한 삼각함수를 이용하여 모든 변이 단순-지지된 평판의 고유 진동수 및 고유 모드를 이중 사인 시리즈로 구하였으며, 그 후 1899년 Levy는 단일 사인 시리즈를 이용하는 일반적인 방법을 제안하였다. 독일의 Kirchhoff는 굽힘과 인장을 고려하여 포괄적인 평판의 운동 방정식을 유도하였다. 그리고 평판의 대변형 문제에서 무시하지 못할 비선형 항을 찾아냈으며 평판의 주파수 행렬식 및 가상 변위법(virtual displacement method)을 제안하였다. 그 후, Love는 kirchhoff의 이론을 두꺼운 평판에 적용하였다. Leissa<sup>(10)</sup>는 여러 경계조건을 갖는 직사각형 평판, 원형 평판 그리고 여러 형상을 갖는 평판에 대하여 고유진동수 및 고유모드들을 구하였다. 또한 내부에 점 지지를 갖는 평판에 대하여 진동 해석을 하였다. 1982년 Almeida<sup>(11)</sup>는 모든 변이 단순-지지된 평판의 대변형 문제에 Fast Fourier Transform

을 이용하였다. 최근에는 Chung<sup>(6)</sup>는 내부의 구속 조건을 갖는 보의 문제를 스톡스 변환(Stokes' transformation)에 의해 해석하였다. Gorman<sup>(9)</sup>은 Levy 형태의 모달함수를 여러 경계 조건을 갖는 평판의 자유 진동해석에 이용하였다.

본 논문에서 제안된 이중 사인 시리즈법을 각각의 경계 조건의 경우에 해당되는 모달 함수를 가정하는 Rayleigh-Ritz법의 단점을 보완하기 위해 이중 푸리에 사인 시리즈(double Fourier sine series)를 평판의 모달함수로 가정한 후 안정화 포텐셜 에너지법을 통하여 해석 해를 구한다. 이 때 이중 사인 시리즈가 만족시키지 못하는 경계 조건들은 스톡스 변환(stokes' transformation) 및 라그랑지 상수법(Lagrangian multiplier method)을 통하여 구속한다.

## 2. 이중 사인시리즈법

### 2.1 운동 방정식

(1) 안정화 포텐셜 에너지법(method of stationary potential energy)

직사각형 평판의 운동에너지 및 탄성 에너지를 각각의 모달 함수로 표시할 수 있다. 평판의 굽힘에 의한 탄성 에너지는 다음과 같다.

$$U_p = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu)[w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xy}^2] dydx \quad (1)$$

평판의 운동 에너지는 다음과 같다.

$$T_p = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b \dot{w}^2 dydx \quad (2)$$

여기서  $a, b, h$ 는 평판의 폭, 길이, 그리고 두께,  $D$ 는 평판의 굽힘 강성,  $\nabla^2$ 는 Laplacian이다.

평판 이론에서 경계 조건은 각각 경계 변에서 굽힘 모멘트와 전단력으로 표시된다.

$$\begin{aligned} V_x(x, y) & \text{ or } w(x, y), \\ V_y(x, y) & \text{ or } w(x, y), \\ M_x(x, y) & \text{ or } w_x(x, y), \\ M_y(x, y) & \text{ or } w_y(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} V_x &= -D[w_{,xxx} + (2-\nu)w_{,xyy}], \\ V_y &= -D[w_{,yyy} + (2-\nu)w_{,xxy}], \\ M_x &= w_{,xx} + \nu w_{,yy}, \\ M_y &= w_{,yy} + \nu w_{,xx} \end{aligned} \quad (4)$$

안정화 포텐셜 에너지법은 변분 원리  $\delta(U_{max})$

$-T_{max}=0$ '에 기초하고 있다. 변분 원리는 평판의 전체 에너지를 기하학적 경계조건(geometric boundary condition)에 위배되지 않는 미지의 모든 변위들에 관하여 미분을 한 후 각 변위들에 대하여 최소가 되도록 한다. 여기서 식 (4)의 전단력과 굽힘 모멘트는 고유 경계조건(natural boundary condition)와 관련되어 있으며 변위와 기울기들은 기하학적인 경계 조건들과 연관되어 있다.

(2) 모달 변위 함수

일반적으로 평판의 모달 변위  $w(x, y)$ 와 횡 방향 변위  $W(x, y, t)$ 는 다음과 같다.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

$$W(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t$$

여기서  $M, N$ 는 푸리에 시리즈의 항수, 그리고  $A_{mn}$ 은 푸리에 시리즈의 계수이다.

평판의 모달 변위 함수인 이중 사인 시리즈가 만족시키지 못하는 모서리 및 변에서 가정된 모달 변위는 아래와 같이 사인 시리즈로 표시한다.

$$w(a, y) = \sum_{p=1}^Q \mu_p \sin \frac{p\pi y}{b} \quad (0 < y < b, x = a),$$

$$w(0, y) = \sum_{q=1}^Q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi y}{b} \quad (0 < y < b, x = 0),$$

$$w(x, b) = \sum_{r=1}^R \tau_r \sin \frac{r\pi x}{a} \quad (0 < x < a, y = b),$$

$$w(x, 0) = \sum_{s=1}^S \nu_s \sin \frac{s\pi x}{a} \quad (0 < x < a, y = 0)$$

$$w(0, 0) = \mu_c, \quad w(0, b) = \varepsilon_c,$$

$$w(a, b) = \tau_c, \quad w(a, 0) = \nu_c \quad (6)$$

여기서  $P, Q, R, S$ 는 각각의 사인 시리즈의 항수이다.

식 (6)에서 가정된 경계 변의 모달 변위 및 평판의 모달 함수인 사인 시리즈는 형태가 단순하며 수학적으로 처리가 쉽고 직교성(orthogonality)을 가지는 장점이 있다. 그러나 가정한 모달 함수가 특정한 경계 조건을 만족시킬 필요는 없으며 라그랑지 상수들을 이용하여 각각의 기하학적인 경계 조건들을 만족시키도록 한다. 그러므로 안정화 포텐셜 에너지법은 고유 경계 조건을 필연적으로 만족시키지 않아도 좋다.

(3) 스톡스 변환(Stokes' transformation)

초등적인 수학 방법으로 푸리에 사인 시리즈를 미분하여 코사인 시리즈로 표시된다. 그러나 경계 조

건 등이 고려될 때 정확히 사인 시리즈의 미분 값을 구하기 위해서는 스톡스 변환이 이용되어야 한다.

스톡스 변환은 임의의 함수를 우선 독립적 시리즈로 미분 형태로 가정한 후 부분 적분에 의하여 미분 함수의 푸리에 시리즈 계수들을 결정하는 방법이다.

1차원인 경우 함수  $f(x)$ 를  $0 < x < d$  구역에서 표시할 수 있으며 경계 값은 다음과 같이 가정하자.

$$f(0) = f_0, \quad f(d) = f_d,$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^M a_m \sin \frac{m\pi x}{d} \quad (0 < x < d) \quad (7)$$

미분 값인  $f_x(x)$ 과  $f_{xx}(x)$ 은 코사인과 사인함수로 가정하여 표시하면 아래와 같다.

$$f_x(x) = b_0 + \sum_{m=1}^M b_m \cos \frac{m\pi x}{d} \quad (0 \leq x \leq d),$$

$$f_{xx}(0) = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2},$$

$$f_{xx}(l) = \frac{\partial^2 f_d}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$f_{xx}(x) = \sum_{m=1}^M c_m \sin \frac{m\pi x}{d} \quad (0 \leq x \leq d)$$

$f_x(x)$ 과  $f_{xx}(x)$ 의 각 계수들은 부분 적분에 의하여 다음과 같이 결정된다.

$$b_0 = -\frac{(f_0 - f_d)}{d},$$

$$b_m = -\frac{2}{d} \{f_0 - (-1)^m f_d\} + \frac{\pi}{d} m a_m, \quad (9)$$

$$c_m = \left(\frac{\pi}{d}\right) \left[ \frac{2}{d} \{f_0 - (-1)^m f_d\} m - \frac{\pi}{d} m^2 a_m \right]$$

(4) 이중 사인 시리즈

Fig.1과 같이 직사각형 평판을 고려한다. 여기서  $w(x, y)$ 가 평판의 내부에서 이중 사인 시리즈로 표시될 수 있는 함수라고 생각하고 모달 함수의 미분 값들을 코사인 및 사인 시리즈로 표시할 때 각각의

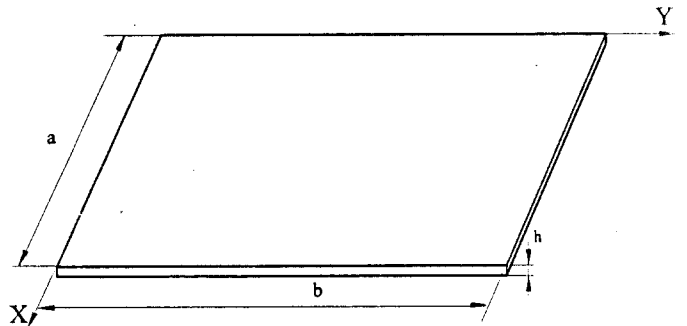


Fig. 1 The geometry of a rectangular plate

시리즈의 계수들은 일반적인 방법으로 계산된다. 이 중 사인 시리즈는 모든 변이 단순-지지된 평판에 대하여 모든 기하학적인 경계 조건을 만족시킨다. 여기서 모달 함수가 기하학적인 경계 조건을 만족시키지 못할 경우 라그랑지 상수들을 이용하여 기하학적 경계 조건을 구속시킨다.

평판의 모달 함수를 이용하면 기하학적 경계 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_{,x}(0, y) = w_{,x}(a, y) = 0, \\ w_{,y}(x, 0) = w_{,y}(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

각각의 모달 함수 미분 값들은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} w_{,x}(x, y) &= \sum_{m=1}^N B_{0n} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad (0 \leq x \leq a, 0 < y < b), \\ w_{,xx}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad (0 < x < a, 0 < y < b), \\ w_{,xy}(x, y) &= D_0 + \sum_{m=1}^N D_{m0} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad + \sum_{n=1}^N D_{0n} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b), \\ w_{,y}(x, y) &= \sum_{m=1}^M E_{m0} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad (0 < x < a, 0 \leq y \leq b), \\ w_{,yy}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad (0 < x < a, 0 < y < b) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 스톱스 변환을 이용하면 미분 값의 푸리에 시리즈 계수들은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} B_{0n} &= \frac{2}{ab} \int_0^b \left\{ \sum_{p=1}^P \mu_p \sin \frac{p\pi y}{b} - \sum_{q=1}^Q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi y}{b} \right\} \\ &\quad \times \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \\ B_{mn} &= \frac{m\pi}{a} A_{mn} + \frac{4}{ab} \int_0^b \left\{ \left( \sum_{p=1}^P \mu_p \sin \frac{p\pi y}{b} \right) (-1)^m \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q=1}^Q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi y}{b} \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \\ C_{mn} &= - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 A_{mn}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 &= \tau_c - \varepsilon_c - \nu_c + \mu_c, \\ D_{0n} &= \tau_c (-1)^n - \varepsilon_c - \nu_c (-1)^n + \mu_c \\ &\quad + \frac{n\pi}{b} \int_0^b \left\{ \left( \sum_{p=1}^P \mu_p \sin \frac{p\pi y}{b} \right) (-1)^m \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q=1}^Q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi y}{b} \right\} dy, \\ D_{m0} &= \tau_c (-1)^m - \varepsilon_c - \nu_c (-1)^m + \mu_c \\ &\quad + \frac{m\pi}{a} \int_0^a \left\{ \left( \sum_{r=1}^R \tau_r \sin \frac{r\pi x}{a} \right) (-1)^n \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^S \nu_s \sin \frac{s\pi x}{a} \right\} dx, \\ D_{mn} &= \frac{m\pi}{a} n \frac{\pi}{b} A_{mn}, \\ E_{m0} &= \frac{2}{ab} \int_0^a \left\{ \sum_{r=1}^R \tau_r \sin \frac{r\pi x}{a} - \sum_{s=1}^S \nu_s \sin \frac{s\pi x}{a} \right\} \\ &\quad \times \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \\ E_{m0} &= \frac{n\pi}{b} A_{mn} + \frac{4}{ab} \int_0^a \left\{ \left( \sum_{r=1}^R \tau_r \sin \frac{r\pi x}{a} \right) (-1)^n \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^S \nu_s \sin \frac{s\pi x}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \\ F_{mn} &= - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 A_{mn} \end{aligned} \quad (12)$$

만약 평판의 경계 조건이 자유-경계단인 경우는 모서리 및 경계 변에서 변위를 가정하여 전체 에너지가 최소가 되도록 변위들의 계수들을 구한다. 고정-경계 단인 경우는 각각의 경계 변의 기울기가 0이 되도록 구속한다. 변분법에 의한 전단력 경계조건  $V(x, y) = 0$ 은 기하학적인 경계 조건이 아니므로 고려되지 않는다.

$$\begin{aligned} w_{,x}(a, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} (-1)^m \sin \frac{n\pi y}{b} = 0, \\ w_{,x}(0, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0, \\ w_{,y}(x, b) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} (-1)^n \sin \frac{m\pi x}{a} = 0, \\ w_{,y}(x, 0) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

이상의 과정을 통하여 직사각형 평판의 범함수(functional)는 아래식과 같이 표시되어진다. 변분과정에서 다음의 범함수가 최소화 되도록 한다.

$$\begin{aligned} \Phi_s &= U_{\max} - T_{\max} + \int_0^b \Lambda_{11} \cos \frac{l\pi y}{b} w_{,x}(a, y) dy \\ &\quad + \int_0^b \sum_{l=1}^L \Lambda_{12} \cos \frac{l\pi y}{b} w_{,x}(0, y) dy + \int_0^a \sum_{l=1}^L \Lambda_{13} \cos \frac{l\pi x}{a} w_{,y}(x, b) dx \\ &\quad + \int_0^a \sum_{l=1}^L \Lambda_{14} \cos \frac{l\pi x}{a} w_{,y}(x, 0) dx \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $L$ 은 라그랑지 상수의 항 수이다.

라그랑지 상수들에 의하여 구속되어진 기하학적인 경계 조건들은 각각의 경계 변화 보강재가 위치하는 직선을 따라 적분이 되어야 한다. 여기서 라그랑지 상수  $\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{14}$ 들은 각 변에서 기울기가 0이 되도록 하기 위한 값이며 이는 물리적으로 모멘트와 관련된 양이다. 그리고 안정화 조건에 의하여 얻어진 식들은 다음과 같이 선형 방정식의 형태로 표시된다.

$$[C_{i,j}]\{A_{mn}, \mu_p, \epsilon_q, \tau_r, \mu_s, \epsilon_c, \tau_c, v_c, \Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{14}\}^T = \{0\} \quad (15)$$

비자명해 (nontrivial solution)는 위의 선형 방정식의 계수의 행렬식이 0이 될 때 구해진다. 주파수 행렬식 (frequency determinant)은 대칭이며, 경계 조건을 만족시킨다. 고유 진동수는 이 식에서 변수로 표시되어 있다.

$$|C_{i,j}| = 0 (i, j = 1, 2, 3, \dots, M^2N^2 + 2M + 2N + 4L + 4) \quad (16)$$

(5) 고유 모드

고유 진동수는 주파수 매개변수의 값에 따라 행렬식이 0이 될 때 구해지며 고유진동수가 구해진 후 라그랑지 상수들의 상대적인 비와 경계부에서의 변위 그리고 이중 사인 시리즈의 계수들을 구함으로써 직사각형 평판의 고유모드를 계산한다. 여기서 모달함수의 절대적인 값보다 상대적인 비가 중요하다. 본 논문에서는 모달함수의 상대 비를 이용한다.

### 3. 주파수 행렬식의 예

(1) F-C-F-F 경계조건

F-C-F-F 경우 경계 조건은 다음과 같다.

$$w_{,x}(0, y) = 0 \quad (17)$$

여기서 고유 진동수는  $A_{mn}, \Lambda_2, \Lambda_{12}, \tau_c, v_c, \mu_p, \tau_r, v_s$ 의 영향을 받는다.

위의 경계 조건을 만족시키는 구성 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[C_{i,j}]\{A_{mn}, \Lambda_2, \Lambda_{12}, \tau_c, v_c, \mu_p, \tau_r, v_s\}^T = \{0\} \quad (18)$$

(2) F-C-F-C 경계조건

F-C-F-C 경우 경계 조건은 다음과 같다.

$$w_{,x}(0, y) = w_{,y}(x, 0) = 0 \quad (19)$$

여기서 고유 진동수는  $A_{mn}, \Lambda_2, \Lambda_{12}, \Lambda_{14}, \tau_c, \mu_p, \tau_r$ 의 영향을 받는다.

위의 경계 조건을 만족시키는 구성 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[C_{i,j}]\{A_{mn}, \Lambda_2, \Lambda_{12}, \Lambda_{14}, \tau_c, \mu_p, \tau_r\}^T = \{0\} \quad (20)$$

(3) C-C-F-S 경계조건

C-C-F-S 경우 경계 조건은 다음과 같다.

$$w_{,x}(0, y) = 0, w_{,x}(a, y) = 0 \quad (21)$$

여기서 고유 진동수는  $A_{mn}, \Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \tau_r$ 의 영향을 받는다.

위의 경계 조건을 만족시키는 구성 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[C_{i,j}]\{A_{mn}, \Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \tau_r\}^T = \{0\} \quad (22)$$

(4) C-C-S-C 경계조건

C-C-S-C 경우 경계 조건은 다음과 같다.

$$w_{,x}(a, y) = 0, w_{,y}(x, b) = 0, w_{,y}(x, 0) = 0 \quad (23)$$

여기서 고유 진동수는  $A_{mn}, \Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{13}$ 의 영향을 받는다.

위의 경계 조건을 만족시키는 구성 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[C_{i,j}]\{A_{mn}, \Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{13}\}^T = \{0\} \quad (24)$$

이상의 4가지 경계 조건을 갖는 평판의 고유 진동수 매개변수는 구성 방정식의 행렬식  $|C_{i,j}| = 0$ 이 될 때 얻어진다. 그리고 고유 모드는 각각의 고유 진동수 매개 변수에 대응하여 푸리에 시리즈 계수들의 상대 비를 구하여 해당 고유 모드를 구한다.

Table 1 Summary of boundary conditions

Types of support at $x=a$	Mathematical expression
Simply supported boundary condition	$(w)_{x=a} = 0,$ $(M_x)_{x=a} = (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = 0$
Clamped boundary condition	$(w)_{x=a} = 0, (w_{,x})_{x=a} = 0$
Free boundary condition	$(M_x)_{x=a} = (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = 0$ $(V_x)_{x=a} = (w_{,xxx} + (2 - \nu) w_{,xyy}) = 0$

### 4. 결 과

직사각형 평판의 자유 진동 해석을 이중 사인 시리즈법을 해석하였으며 Table 2에는 본 해석에서 사용되어진 직사각형 평판의 데이터를 나타내고 있다.

**Table 2** Data of a rectangular plate

Material	Mild steel
Width of plate	1 m
Length of plate	1 m
Young's modulus	$2.e+11 \text{ N/m}^2$
Thickness of plate	0.01 m
Poisson's ratio	0.3

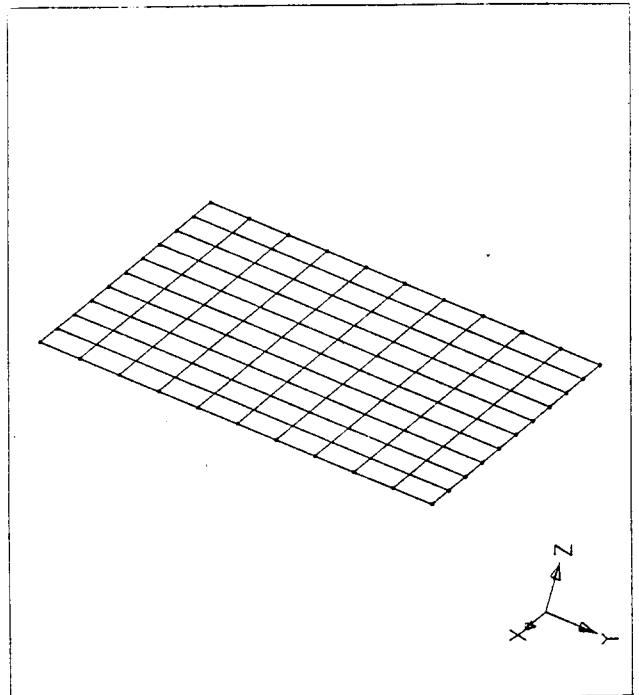
평판의 폭, 길이, 두께는 각각 1m, 1m, 0.01m인 연강이다.

**4.1 고유 진동수**

Table 3에는 Blevins<sup>(1)</sup> 및 MSC/NASTRAN과 본 해석 방법에 의하여 대표적인 F-C-F-F, F-C-F-C, C-C-F-S 그리고 C-C-S-C 경계 조건을 갖는 직사각형 평판에 대하여 해석하였으며, 이 때 구한 4차까지의 고유 진동수 매개변수를 나타내고 있다.

여기에서 F는 자유-경계단, S는 단순-지지단, 그리고 C는 고정-경계단이다.

또한 평판의 경계조건은  $x=a, x=0, y=b, y=0$ 의 순서로 표시한다.



**Fig. 2** F.E.M. modeling of MSC/NASTRAN

**Table 3** Normlized frequency parameters( $\omega a^2 \sqrt{h\rho/D}$ ) of a rectangular plate by analysis and MSC/NASTRAN ( $M=25, N=25, L=25$ )

B.C.	Method	Mode sequence			
		1st	2nd	3rd	4th
F-F-F-F	MSC/NASTRAN	13.30	18.94	23.63	33.38
	Present Analysis	16.15	17.00	23.20	36.53
	Ref. (1)	13.49	19.79	24.43	35.02
F-C-F-F	MSC/NASTRAN	3.45	8.38	20.89	26.32
	Present Analysis	3.41	8.71	21.16	28.03
	Ref. (1)	3.49	8.52	21.43	27.33
S-S-S-S	MSC/NASTRAN	19.48	48.51	48.51	75.86
	Present Analysis	19.73	49.34	49.34	78.95
	Ref. (1)	19.74	49.35	49.35	78.96
C-C-F-S	MSC/NASTRAN	23.29	34.59	62.74	63.88
	Present Analysis	23.64	36.29	63.47	67.97
	Ref. (1)	23.46	35.61	63.13	66.81
C-C-S-C	MSC/NASTRAN	31.32	62.06	69.99	96.94
	Present Analysis	31.96	63.90	72.37	102.96
	Ref. (1)	31.83	63.35	71.08	100.80
C-C-C-C	MSC/NASTRAN	35.41	72.23	72.23	104.35
	Present Analysis	36.20	74.51	74.51	111.24
	Ref. (1)	35.99	73.41	73.41	108.30

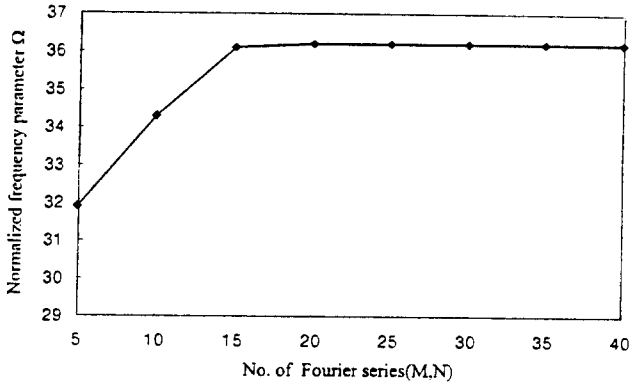
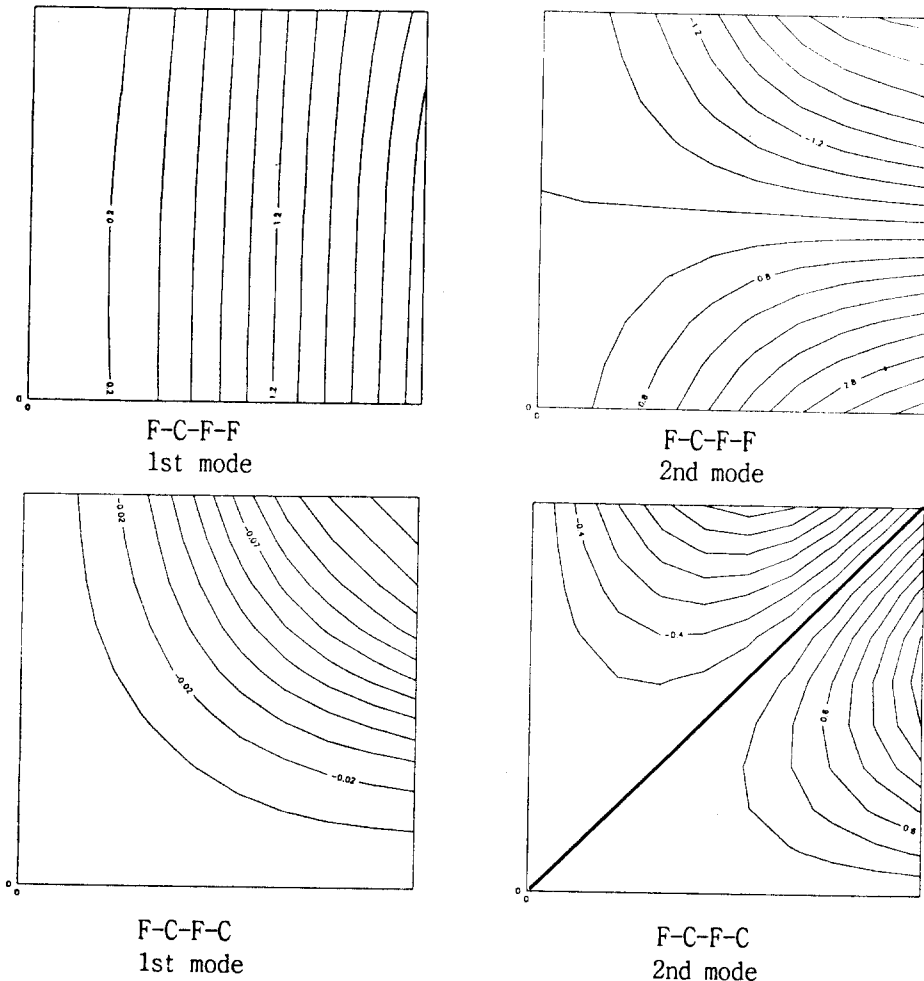


Fig. 3 Convergence of the first normalized frequency parameters ( $\omega a^2 \sqrt{h\rho/D}$ ) vs. no. of Fourier series (M, N) of a C-C-C-C rectangular plate ( $M=N=L$ )

Fig. 2에는 MSC/NASTRAN을 이용한 유한요소 모델이며, 사용 요소는 평판 요소(plate element)이다. Fig. 3에는 C-C-C-C 경계조건을 갖는 고정단 평판의 경우에 대하여 푸리에 시리즈(M, N)값에 따른 고유진동수 매개변수의 수렴성을 보여주고 있다. 여기서 항의 수가 푸리에 시리즈의 항수인  $M=N=L=25$ 일때 수렴을 하고 있음을 알 수 있다.

#### 4.2 고유 모드

본 해석 방법으로 고유진동수 매개변수를 구한 후 식 (15)에서 해당 고유진동수에 해당하는 평판의 상대 변위를 구하면 해당 모드를 구할 수 있다. 직사각형 평판이 F-C-F-F, F-C-F-C, C-C-F-S 그리고 C-C-S-C 경계 조건을 갖는 경우에 대하여 Fig. 4에는 각각의 평판에 대하여 1차 및 2차 모드를 나타내고 있다. 해석 시 사용되어진 푸리에 시리즈의 항수는 각각  $M=25, N=25, L=25$ 이다.



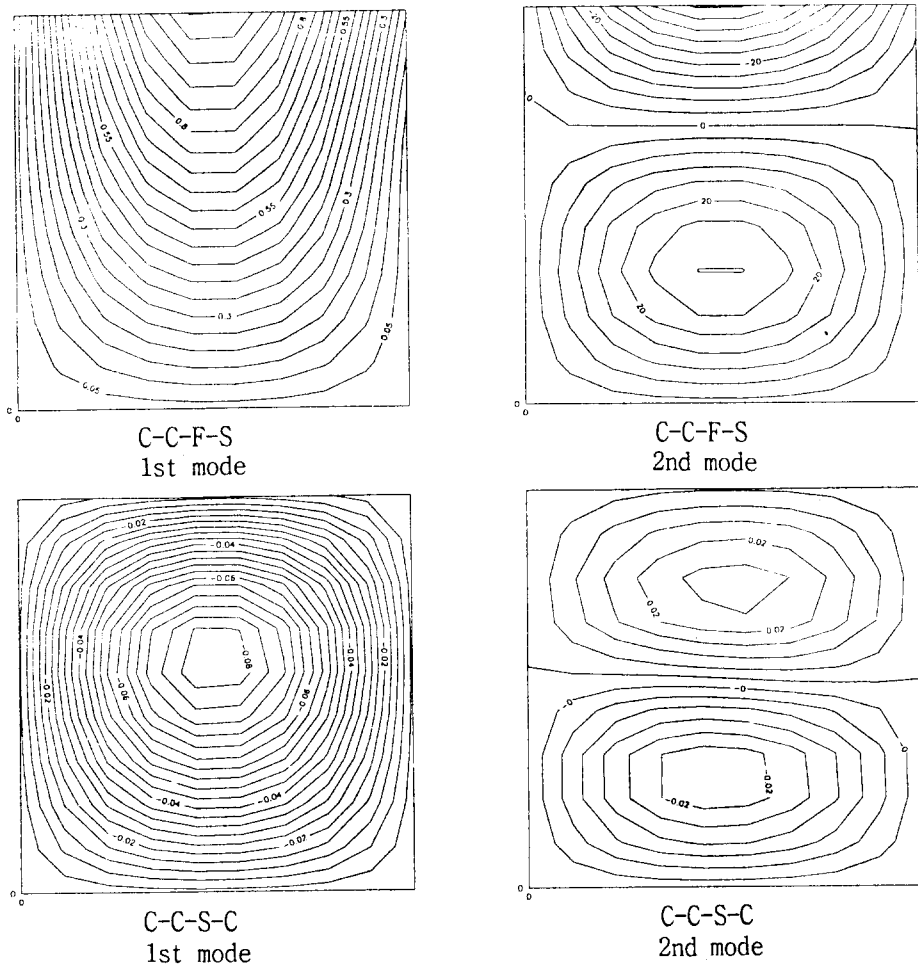


Fig. 4 Mode shapes of a rectangular plate by analysis ( $M=25, N=25, L=25$ )

#### 4. 결 론

본 연구에서는 직사각형 평판의 자유진동의 해를 해석적으로 구하였다. 제안된 이중 사인 시리즈법은 안정화 포텐셜 에너지 원리에 기초하고 있으며 모달 함수로는 이중 사인 시리즈가 사용되었다. 그리고 이중 사인 시리즈는 라그랑지 상수 및 스톡스 변환에 의하여 경계 조건을 만족시키도록 하였다. 해석에서는 대표적인 F-F-F-F, F-C-F-F, S-S-S-S, C-C-F-S, C-C-S-C 그리고 C-C-S-C 경계조건을 갖는 평판에 대하여 자유 진동 해석을 수행하였다. 해석 결과인 고유 진동수 매개변수 및 고유 모드를 유한 요소 해석 프로그램인 MSC/NASTRAN의 결과와 비교하여 그 타당성을 검증하였다. 고전적인 레일리-릿츠법은 각각의 경계 조건이 바뀔 때마다 각각 다른 모달 함수를 사용하였으나 본 연구에서는 이러한 단점을 해소하기 위해 이중 사인 시리즈를

사용하였다. 상기 방법은 직사각형 평판의 고유 진동수 및 고유 모드를 정확히 구할 수 있으며 이는 모달 해석을 통해 동적 응력을 계산하는데 유용하게 이용될 수 있다. 더 나아가 본 방법은 보강재를 갖는 평판 및 내부 변위 구속 조건을 갖는 평판의 자유 진동 해석에도 이용될 수 있다.

#### 참고 문헌

- (1) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company.
- (2) Reddy, J. N., 1984, Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, Wiley Interscience.
- (3) Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M., 1980, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press.
- (4) Soedel, W., 1993, Vibrations of Shells and



- Plates, Marcel Decker, Inc.
- (5) Catwright M., 1990, *Fourier Methods for Mathematicians, Scientists and Engineers*, Ellis Horwood.
- (6) MSC/NASTRAN User's Manual, 1994, The Macneal-Schwendler Corporation.
- (7) 윤종욱, 이장무, 김윤영, 1994, "경사진 내부 직선상에서 변위가 구속된 평판에 대한 이중푸리에 사인시리즈 방법의 자유 진동해석," 한국 소음진동공학회 '94 춘계 학술대회 논문집, pp. 128~133.
- (8) Chung, H., 1981, "Analysis Method for Calculating Vibration Characteristics of Beams with Intermediate Supports," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 63, pp. 55~80.
- (9) Gorman, D. J., 1982, *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*, Elsevier.
- (10) Leissa, A. W., 1969, "Vibration of Plates," NASA Sp, 160.
- (11) Almeida, M. C. V., 1982, "The Application of the FFT to the Analysis of Large Deflections of Beams and Plates," Engineering Thesis, Stanford University, Stanford, California.
- (12) 윤종욱, 1995, 경사진 방향으로 보강재 및 구속조건을 갖는 평판의 자유진동 해석에 관한 연구, 서울대학교 공학 박사 학위 논문.