

〈論 文〉

기하학적 초기형상결함을 갖는 보강 원통의 충격좌굴 신뢰성해석

Impact Buckling Reliability Analysis of Stiffened Cylinder with Initial Geometric Imperfection

김 두 기*

Du Ki Kim

(1996년 6월 13일 접수 ; 1996년 10월 2일 심사완료)

Key Words : Geometric Imperfection(기하학적 초기결함), Impact Bukling(충격좌굴), Reliability(신뢰성), Response Surface Method(응답면 기법), Failure Probability(파괴확률)

ABSTRACT

In this paper, buckling reliability analyses of stiffened cylinder with random initial geometric imperfection under axial impact load are performed by the combined response surface method. The effect of random geometric imperfection on the failure probability and reliability is recognized quantitatively. Buckling reliability decreases with the increase of mean value, cov of initial geometric imperfection under the same external load. Buckling probability under impact load is greater than those under static load with the same condition. From the probabilistic characteristics of impact buckling load, relation between reliability index and safety parameter can be obtained in addition to the relation between load and reliability index. And those results can be used to determine the range of required safety parameter and acceptable imperfection.

기 호 설 명

\bar{x} : 기본확률벡터
 \bar{x}_0 : 기본확률벡터의 평균점
 Φ : 정규 누적분포 함수
 β : 신뢰성 지수
 A_s : Stringer의 단면적
 A_r : Ring의 단면적
 D : 셀의 flexural rigidity
 d_s : Stringer의 배치간격
 E : 셀의 탄성계수
 E_s : Stringer의 탄성계수
 E_r : Ring의 탄성계수
 F : Airy의 응력함수
 $G(x)$: 상태함수
 G : 셀의 전단 탄성계수
 h : 셀의 두께

I_{os} : Stringer의 단면 2차 모멘트
 I_{rs} : Ring의 단면 2차 모멘트
 J_s : Stringer의 극관성 모멘트
 L : 셀의 길이
 \bar{M} : 보강 셀의 단위 길이 등가질량
 P : 축방향 하중
 R : 원통형 셀의 반경
 W_0 : 반경방향의 기하학적 초기결함
 w_0 : 무차원화된 반경방향의 기하학적 초기결함
 z_s : Stringer의 eccentricity
 ν : Poisson 비
 ρ_c : 셀의 밀도
 ρ_s : Stringer의 밀도
 ρ_r : Ring의 밀도
 τ : 무차원화된 시간
 Δ_i : 근사한계상태 방정식의 고차항

$$\left(\right)_{,\xi} = \frac{\partial(\quad)}{\partial\xi}$$

*정회원, 국방과학연구소

$$(\quad), \eta = \frac{\partial(\quad)}{\partial \eta}$$

1. 서 론

기하학적 초기형상결함이 셀 구조물의 좌굴강도를 감소시키는 주요 원인이라는 것은 Koiter의 연구⁽¹⁾ 이후 이미 잘 알려진 사실이다.

기하학적 초기형상결함이란 원통의 제작과정에서 필연적으로 발생하는 것으로서 실제 제작되는 셀이 이상적인 셀의 형상으로부터 길이방향과 원주방향으로 벗어나는 정도를 의미한다. 이 초기형상 결함은 대량 생산되는 셀의 경우에 동일한 공정, 동일한 설계치수, 동일 허용 오차범위 내에서 생산되었다 하더라도 동일한 형태로 존재하지 않고 어떠한 통계분포로 표현할 수 있는 랜덤(random)한 모양으로 존재하게 되므로⁽²⁾ 실제적인 기하학적 초기형상결함을 고려한 좌굴해석을 위해서는 이러한 랜덤한 초기형상결함을 고려할 수 있는 방법이 필요하게 된다.

기하학적 초기형상결함을 고려한 구조물의 좌굴해석에 있어서 확정론적 이론을 초기결함에 관한 통계분석의 결과와 결합시켜 좀 더 실용적이며 합리적인 연구결과를 얻고자 Bolotin⁽³⁾ 이래 많은 연구가 수행되어 왔다. 특히 해양구조물, 비행기 동체, 특수선박의 핵심부재로 사용되고 있는 원통형 구조물에 있어서 축방향 정압축력을 받는 원통에 관한 좌굴신뢰성연구가 Amazigo⁽⁴⁾에 의해 수행된 이후 많은 연구⁽⁵⁻⁹⁾가 이루어 졌다.

정적인 하중이 작용하는 경우에 비해 동적하중이 작용하는 경우의 좌굴 신뢰성 연구는 주로 단순 구조물에 대해 관한 연구가 대부분이다⁽¹⁰⁻¹⁴⁾.

국내에서는 기하학적 초기결함을 고려한 셀 구조물의 정적, 동적좌굴에 관한 연구가 수행되었으나 그 대부분은 확정론적 관점에서 수행되었으며⁽¹⁵⁻¹⁷⁾ 확률론적 관점에서의 연구는 극히 최근에 시작되었다⁽¹⁸⁻²⁰⁾.

좌굴을 고려한 신뢰성 연구들은 확정론적 해석 수단과 신뢰성 해석수법을 연결하여 수행되었는데 신뢰성 해석수단으로는 Monte Carlo 모사법이나 평균 2차모멘트법을 이용하였다. 몬테칼로 모사법은 정확한 신뢰도 해석결과를 주지만 계산에 소요되는 시간이 과다하므로 효율성의 면에서는 문제가 있다. 평균 2차 모멘트법은 적용이 단순하고 효율성은 뛰어나나 구조물의 파괴를 정의하는 한계상태방정식의 형태에 따라 파괴확률이 바뀌는 단점이 있다. 다중

모드의 기하학적 초기결함을 갖는 셀의 좌굴문제와 같은 비선형성이 강한 문제의 신뢰성 해석에는 불변 2차 모멘트법⁽²¹⁾이 유용하나 확률변수의 도함수를 도출하기 위한 수치미분시의 오차누적으로 인해 직접 적용한 연구결과를 찾아보기 어렵다.

전술한 바와 같이 기존의 연구에서는 셀의 좌굴문제와 같은 비선형 문제의 신뢰성 해석에 불변 2차 모멘트법을 직접 적용하지 못하였으나 본 논문에서는 응답면기법을 이용하여 근사한계상태방정식을 구하고 이에 불변 2차 모멘트법을 결합하므로써 비선형 문제의 신뢰성 해석을 효과적으로 수행할 수 있는 방법을 제시하였고 이를 적용하며 계단하중(step load) 형태의 충격하중이 작용하는 경우에 보강 원통의 좌굴 신뢰성해석을 수행하였다.

2. 신뢰성 해석 방법

2.1 파괴확률과 신뢰도의 정의

구조물의 안전에 영향을 미치는 기본확률변수벡터를 \bar{x} 로 표시하고 이들 변수의 결합확률밀도함수(joint probability density function)를 $f_s(x_1, \dots, x_n)$ 이라고 하면 구조물의 파괴확률 P_f 는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$P_f = 1 - R_e = 1 - \int_D f_s(x_1, \dots, x_n) dL \quad (1)$$

위 식의 R_e 는 외력에 의해 파괴되지 않는 확률, 즉 신뢰도이고 D 는 구조물의 안전 영역이다. 기본확률변수들에 의해 이루어지는 n 차 공간에서의 구조물의 안전영역과 파괴영역을 나누는 초평면(hyper plane)을 파괴면(failure surface)이라 하고 이 파괴면을 표현하는 식을 한계상태 방정식(limit state equation)이라 한다. 한계상태 방정식 Z 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{R} - \tilde{L} \\ &= G(\bar{x}) \\ &= G(x_1, \dots, x_n) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

위식에서 \tilde{R} , \tilde{L} 은 구조물이 외부하중에 저항할 수 있는 능력, 외부의 작용하중을 각각 의미하는 확률함수이고 \tilde{R} 이 \tilde{L} 보다 큰 경우에는 구조물이 안전하다고 말할 수 있다. 이때 $G(\bar{x})$ 를 상태함수라고 하는데 확률변수 벡터 \bar{x} 의 결합 확률 밀도함수에 의해 Z 의 확률 밀도함수 혹은 분포함수를 구한 뒤, $Z < 0$ 일 때의 확률을 구하게 되면 이것이 파괴확률 P_f

인 것이고 식 (1)에 의해 신뢰도를 구할 수 있게 된다.

2.2 기존의 신뢰성 해석법

식 (1)에 따라 파괴확률을 구하는 것이 파괴확률을 가장 정확하게 구하는 방법이지만 일반적으로 기본 확률변수들의 결합확률 밀도함수는 알려져 있지 않으며 또 그것이 알려져 있다고 하더라도 식 (1)의 다중적분을 수행하는 점에 상당한 어려움이 있다. 따라서 이러한 다중적분을 피하고 근사적으로 파괴확률을 추정하는 근사적 신뢰성 방법이 사용되어 왔다. 그 대표적 방법으로는 평균 2차 모멘트법(mean value first order second moment method), 불변 2차 모멘트법(advanced first order second moment method) 등이 있다^(21, 22).

평균 2차 모멘트법은 같은 파괴면을 갖는 경우라 하더라도 한계상태 방정식이 달리 표현되면 파괴확률이 달라진다는 문제점과 확률변수들이 비정규 분포를 갖는 경우에는 적용할 수 없다는 문제점을 갖는다. 평균 2차 모멘트법의 문제점은 Hasofer & Lind⁽²³⁾에 의해 해결되었는데 그들이 제안한 방법은 기본 확률변수들을 표준 정규분포를 갖는 새로운 변수로 선형 변환하여 변환된 좌표 공간의 원점에서 가장 가까운 거리에 있는 파괴면상의 점(most probable failure point)에서 파괴면을 선형 근사하므로써 평균 2차 모멘트법의 불변성 결여 문제를 극복하였다. 불변 2차 모멘트법에 의해 구한 파괴확률은 평균 2차 모멘트법에 비해 정확하나 결국 이 방법도 상태함수를 선형화하는 방법이므로 선형화에 따른 오차를 피할 수 없으므로 비선형성이 강한 복잡한 구조물의 신뢰성 해석에 직접 적용하는 데에는 상당한 어려움이 있다. 파괴면을 1차 직선으로 근사화하는 근사법과 함께 많이 사용되고 있는 방법으로 몬테칼로모사법이 있다. 몬테칼로 모사법은 주어진 상태함수를 그대로 사용하여 확률변수 각각의 확률 밀도함수를 바탕으로 상태함수의 밀도함수를 구하는 방법이다. 이 방법은 먼저 확률변수를 각각의 밀도함수에 맞게 생성하고 이 값으로 상태함수 값을 계산한 다음 계산된 상태함수 값을 통계분석하여 상태함수의 확률밀도함수를 구한다. 따라서 확률변수의 생성 및 상태함수값 계산을 많이 하면 할수록 보다 정확한 확률밀도함수를 구하게 된다. 이 방법은 확률변수에 대한 상태함수 값만 알면 되므로, 상태함수가 확률변수의 함수로 명확히 표현될 필요가 없어 복잡한 구조물의 신뢰성해석에 이용할 수 있다. 그

러나 이 방법은 파괴확률의 계산에 소요되는 시간이 과다하다는 단점을 갖는다.

2.3 응답면을 이용한 신뢰성 해석법

전술한 기존의 신뢰성 해석방법의 단점을 보완하면서 복잡한 구조물에 적용할 수 있는 효율적 신뢰성 해석 방법으로서 본 논문에서는 Bucher⁽²⁴⁾가 제시한 응답면 기법(response surface method)에 불변 2차 모멘트법⁽²²⁾을 혼합한 방법을 사용하였다.

셀 구조물과 같이 비선형거동을 갖는 복잡한 구조물의 신뢰성 해석시 몬테칼로 모사법에서는 파괴확률을 비교적 정확하게 구할 수 있으나 여기에서 문제가 되는 것은 그를 구하기 위한 계산 시간이 과다하다는 것이다. 이와 같은 단점을 보완하기 위해서 실제의 복잡한 비선형 한계상태 방정식 $Z(\bar{x})$ 를 적절한 다항식 $\bar{Z}(\bar{x})$ 으로 치환하는 것이 응답면 기법의 기본개념이다.

한계상태 방정식 Z 가 기본 확률변수 벡터 $\bar{x}(x_1, \dots, x_n)$ 의 함수로 표현될 때 이를 평균점 \bar{x}_0 를 기점으로 테일러(Taylor) 전개하면

$$Z(\bar{x}) = Z(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial x_i} \right) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j + \sum_{i=1}^n \Delta \quad (3)$$

여기에서

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}_0) &= c_0 \\ \left. \frac{\partial Z}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} &= c_i \\ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} &= c_{ij} \end{aligned}$$

로 놓으면 식 (4)는 다음과 같이 다항회귀모형(polynomial regression model)으로 표현되는데 Bucher⁽²⁴⁾의 제안에 따라 연성항을 무시하면

$$Z(\bar{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \Delta \quad (5)$$

식 (5)에서 x_i 는 공학적인 관심대상이 되는 영역에서 한계상태 방정식을 계산하는 표본점(sampling point)으로서 주로 $E[x_i]$ 와 $E[x_i] \pm k\sigma_i$ 를 사용한다. 여기에서 $E[x_i]$ 는 x_i 의 평균값, σ_i 는 x_i 의 표준편차, k 는 임의의 계수이다. 이와같이 식 (5)을 얻기 위한 표본점은 $(2n+1)$ 개가 되며 이 표본점의 개수만큼 한계상태 방정식을 계산하면 복잡한 구조물의 근사한계상태방정식을 표현할 수 있고 그 방정식을 이용하여 파괴확률을 구할 수 있다는 점에서 기존의 근

사법이나 모사법에 비해 매우 효율적이다.

식 (5)는 다음과 같은 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$[Z]=[x][c]+[\Delta] \quad (6)$$

여기에서

$$\begin{aligned} [Z]&=[Z^1 \ Z^2 \ \dots \ Z^N]^T \\ [x]&=[[Y_1][Y_2] \ \dots \ [Y_N]]^T \\ [Y_i]&=[1 \ x_i^1 \ \dots \ x_i^N(x_i^1)^2 \ \dots \ (x_i^N)^2] \\ [c]&=[c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{11} \ \dots \ c_{NN}]^T \\ [\Delta]&=[\Delta^1 \ \Delta^2 \ \dots \ \Delta^N]^T \\ [x]&=[1 \ x_1 \ \dots \ x_n(x_1)^2 \ \dots \ (x_n)^2] \end{aligned}$$

위 식의 N 은 $(2n+1)$, 상부첨자는 각 표본점에서의 변수 및 한계상태 방정식을 표현한다. 최소자승법 (least square method)에 의해 최소화 시키려는 양은 오차의 제곱항으로서 이를 $[c]$ 에 대해 미분하면 최소화 조건을 만족하는 $[c]_{final}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$[c]_{final} = ([x][x]^T)^{-1}[x]^T[Z] \quad (7)$$

따라서 구성된 근사 한계상태 방정식은

$$\bar{Z} = [x][c]_{final} \quad (8)$$

식 (8)에 의해 구해진 근사한계상태방정식을 이용하여 파괴면상의 근사 파괴점을 구하게 되는데 이를 위한 확률변수벡터의 i 번째 m 번째 추정값인 x_i^m 에서 출발한 2차 전개점 x_i^{m+1} 은 다음식과 같이 표현된다⁽¹⁸⁾.

$$\begin{aligned} x_i^{m+1} &= E[x_i] + [-\bar{Z}(\bar{x}^m) + \sum_i \frac{\partial \bar{Z}(\bar{x}^m)}{\partial x_i} (x_i^m - E(x_i))] / [\sum_i \sum_j \frac{\partial \bar{Z}(\bar{x}^m)}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{Z}(\bar{x}^m)}{\partial x_j} \\ &\quad \times COVAR(x_i, x_j)] \frac{\partial \bar{Z}(\bar{x}^m)}{\partial x_i} \sigma_x \quad (9) \end{aligned}$$

식 (9)에서 $COVAR(x_i, x_j)$ 은 두 확률변수의 공분산을 의미한다.

식 (9)에 의한 반복계산이 수렴기준을 만족하면 평균점에서 파괴면까지의 최단거리를 계산하고⁽²²⁾ 그로부터 1차 근사파괴점 $[\bar{x}_D]$ 를 구하게 되는데 $[\bar{x}_D]$ 주위에서 다음과 같이 선형 보간을 실시하여 새로운 시작점 $[x^M]$ 을 구한다.

$$[x^M] = [\bar{x}_0] + ([\bar{x}_D] - [\bar{x}_0]) \frac{Z([\bar{x}_0])}{Z([\bar{x}_0]) - Z([\bar{x}_D])} \quad (10)$$

$[x^M]$ 을 새로운 중심점으로 하여 동일한 과정을 반복하여 계산을 실시하면 수렴된 해로부터 최종적인 파괴점을 구하게 되며 이에 대한 파괴확률 및 신뢰성 지수가 얻어진다. 이때의 신뢰성 지수는 안전 여유인 $\bar{R} - \bar{L}$ 의 평균과 표준편차의 비를 의미하므로⁽¹⁸⁾ 신뢰성 지수가 큰 경우가 외력에 의해 파괴될 확률이 상대적으로 낮게 된다.

신뢰성 지수 β 와 파괴확률 P_f 의 관계는 다음 식과 같이 표현된다⁽²²⁾.

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (11)$$

여기에서

Φ : 정규누적분포함수

P_f : 파괴확률

3. 좌굴하중 계산

Fig. 1에는 본 논문에서 취급하는 보강 원통의 기하학적 특징 및 좌표계, 하중상태를 표시하였다. 본 논문에서는 충격하중으로서 시간 $t=0$ 이후에 무한

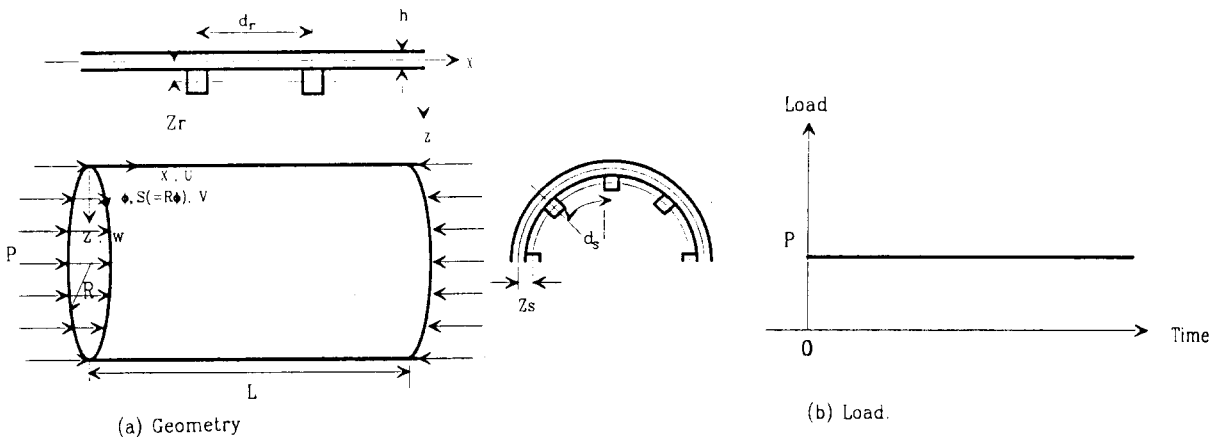


Fig. 1 Geometry and load

작용시간(infinite duration time)을 갖는 계단하중 형태의 축방향 충격하중을 기본적으로 고려하였다.

Fig. 1에 보인 보강 원통형 셸은 박판 셸 이론, 셸로우 셸(shallow shell) 이론, 탄성 영역에서의 Donnell의 변위-변형도 관계⁽²³⁾가 적용가능하고 직교 이방성 셸 이론이 적용될 수 있도록 보강재는 충분히 조밀한 간격을 갖는다고 가정하여 확산(smearing) 기법을 적용하였다⁽²⁵⁾. 또한 기하학적 초기결함은 셸의 기본제원에 비해 그 크기, 기울기가 미소하고 양단은 단순지지 경계조건으로 가정하였다. 또한 충격하중에 의한 축방향 관성력은 여러 연구^(11, 13, 26, 27)에서와 같이 무시하였다. 이와 같은 가정하에 Hamilton의 원리를 적용하여 기하학적 초기결함을 갖는 보강원통의 무차원화된 돌널형의 운동 방정식 및 적합방정식⁽²⁵⁾을 무차원 응력함수 f 와 무차원 반경변위 w 를 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \hat{h}_{11}w,_{\xi\xi\xi\xi} + 2\hat{h}_{12}w,_{\xi\xi\eta\eta} + \hat{h}_{22}w,_{\eta\eta\eta\eta} - [\hat{q}_{11}f,_{\xi\xi\xi\xi} \\ & + 2\hat{q}_{12}f,_{\xi\xi\eta\eta} + \hat{q}_{22}f,_{\eta\eta\eta\eta}] - \alpha_1 c f,_{\xi\xi} - c[f,_{\xi\xi}(w \\ & + w_o),_{\eta\eta} - 2\beta_1^2 f,_{\xi\xi}(w + w_o) + \beta_1^4 f,_{\eta\eta}(w + w_o),_{\xi\xi}] + w_{\tau\tau} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \hat{d}_{11}f,_{\xi\xi\xi\xi} + 2\hat{d}_{12}f,_{\xi\xi\eta\eta} + \hat{d}_{22}f,_{\eta\eta\eta\eta} + [\hat{q}_{11}w,_{\xi\xi\xi\xi} \\ & + 2\hat{q}_{12}w,_{\xi\xi\eta\eta} + \hat{q}_{22}w,_{\eta\eta\eta\eta}] + \frac{1}{2}c\beta_1^2[w,_{\xi\xi}(w \\ & + 2w_o),_{\eta\eta} - 2w,_{\xi\eta}(w + 2w_o),_{\xi\eta} + w,_{\eta\eta}(w \\ & + 2w_o),_{\xi\xi}] + c\alpha_1 w,_{\xi\xi} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

앞 식의 $\hat{d}_{11}, \dots, \hat{h}_{11}, \dots, \hat{q}_{22}$ 등은 보강재의 효과를 나타내는 무차원 계수이다. 여기에서의 무차원 계수는 부록에 표현하였다. 양단 경계조건을 단순지지상태로 가정할 때 면내, 외 기하학적 경계조건, 하중조건 및 주기성 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & w=0 \text{ at } \xi=0, \pi \\ & v=0 \text{ at } \xi=0, \pi \\ & m_x=0 \text{ at } \xi=0, \pi \\ & \int_0^{2\pi} f,_{\eta\eta} d\eta = -\sigma \text{ at } \xi=0, \pi \\ & \int_0^{2\pi} \frac{dv}{d\eta} d\eta = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

무차원 원주변위 v , 무차원 길이방향 굽힘 모멘트 m_x 의 식은 변위-변형도 관계식과 모멘트-변위 관계식에서 구해진다⁽²⁵⁾.

양단 단순지지 경계조건을 만족하는 w, w_o 은 좌굴모드의 형태를 따라 다음과 같이 가정하였다.

$$w_o = \sum_{m=1}^{NM} C_{n1(m), n2(m)} \sin n1(m) \xi \cos n2(m) \eta$$

$$w = \sum_{m=1}^{NM} A_{n1(m), n2(m)} \sin n1(m) \xi \cos n2(m) \eta \quad (15)$$

이때 NM 은 고려된 좌굴모드의 수이고 $n1(m), n2(m)$ 은 각각 m 번째 모드의 길이방향 반파수(half wave number), 원주방향 전파수(full wave number)를 의미한다. 가정된 형태의 함수를 적합방정식 및 경계조건식에 대입하여 응력함수 f 를 구하고 이를 평형 방정식에 대입한 후 모드 w_i 의 각각에 대해 Galerkin 적분을 중립면 전체에 대해 취한 결과를 정리하면 다음과 같은 형태의 i 번째 모드 일반화 좌표의 가속도 \ddot{a}_i 에 대한 NM 개의 비선형 연성 2차 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{a}_i = G_i(a_i, c_i, \varepsilon), \quad (i=1, NM) \quad (16)$$

이때 $\ddot{a} = \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$, $a_i = a_{n1(i), n2(i)}$, $c_i = C_{n1(i), n2(i)}$, ε 는 무차원화된 하중을 의미하고 G_i 는 $a_i, c_i (i=1, NM)$, ε 의 비선형 함수를 의미한다.

이 식으로부터 4차 Runge-Kutta 방법에 의한 수치적분을 통해 변위, 속도의 초기 조건이 0인 각 시간 단계에서의 일반화 좌표의 값을 구할 수 있고 이를 이용하면 시간에 따라 변화하는 변위 및 응력의 크기를 구할 수 있다. 계단하중의 크기를 증가시키면서 매 시간 단계에서의 값을 구하고 이 결과로부터 Budiansky-Roth 기준⁽²⁶⁾에 준하여 축방향 길이축소의 최대값의 변화율이 설정된 기준치를 초과할 때의 계단하중을 좌굴하중으로 결정하였다.

식 (12)에서 관성항을 무시하고 구해진 응력함수를 이용하여 모드 w_i 의 각각에 대해 갤러킨적분을 중립면 전체에 대해 취하면 정적좌굴하중의 결정에 사용할 수 있는 $a_i, c_i (i=1, \dots, NM)$ 에 관한 비선형 다중모드 연성 대수방정식을 얻게된다. 이 식은 임의 하중상태에서의 각 일반화 좌표를 구하는 비선형 다중 모드 방정식이므로 이를 정확히 만족하는 엄밀해를 구하기는 불가능하다. 따라서 주어진 하중의 값에서 Newton의 준선형화에 의거하여 방정식을 만족하는 상태변수들의 근사해를 반복계산을 통해 구하며 이러한 과정을 거쳐 좌굴하중을 결정한다⁽¹⁸⁾.

4. 수치해석 및 결과검토

축방향 충격하중하에서의 기하학적 초기결함으로 인한 확정론적 좌굴강도의 감소정도를 고찰하기 위하여 스트링거(stringer) 보강 셸 S1을 이용하였다.

셀 S1의 기하학적, 재료적 특성은 Table 1에 표시된 바와 같다. 하중은 계단하중형태의 축방향 충격하중을 고려하였는데 이러한 하중은 감소율(decay rate)이 매우 작고 감소 소요 시간(decay time)이 매우 큰 충격하중을 모델링한 것이다. 무한 작용시간을 갖는 계단하중 형태의 충격하중이 작용할 때의 좌굴모드는 동일한 크기의 정적하중하에서의 좌굴모드와 일치하므로⁽²⁷⁾ 본 해석에서는 정적하중하에서의 좌굴모드 형태로 존재하는 기하학적 초기결함을 고려하여 확정론적 충격좌굴해석을 실시하였다.

Table 1 Geometric & material properties of stringer stiffened shell S1

Item	Shell S1
L	140.26 (mm)
L/R	1.38
R/h	518.37
d_s/R	0.0625
z_s/h	-1.709
$A/d_s h$	0.638
$I_{s0}/d_s h^3$	0.311
Elastic modulus	6.89E3 (kgf/mm ²), 6.75E2 (MPa)
Poisson ratio	0.30
Bartdorf parameter	942.1

Fig. 2에는 이러한 충격하중하에서의 기하학적 초기결함에 의한 좌굴강도의 감소정도를 셀 S1에 대해 정적 하중하에서와 동일한 기하학적 초기결함 상태인 $w_0 = c_{(1, 10)} \sin \xi \cos 10\eta$ 인 경우의 초기결함 민감도 해석결과와 비교하였다. 이 결과에서 보면 기하학적 초기결함이 존재하지 않은 경우에는 충격좌굴하중이 정적 좌굴하중과 거의 일치하지만 기하학적 초기결함이 존재하는 경우에는 초기결함에 의한 충격좌굴하중의 감소정도가 초기결함에 의한 정적 좌굴강도 감소정도에 비해 크게 나타나며 기하학적 초기결함의 존재가 충격좌굴하중의 감소에 결정적인 영향을 가짐이 확인된다. 충격좌굴하중의 감소정도는 단일모드의 기하학적 초기결함만을 고려하는 경우에 대한 Budiansky⁽²⁶⁾의 방법에 의한 결과와 유사하다. 무차원 하중은 보강재 및 초기결함이 없는 원통이 축방향 압축을 받을 때의 고전적 좌굴하중 $P_{cl} = \frac{2\pi E h^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ 로 나누어 준 값이므로 실제하중은 부록

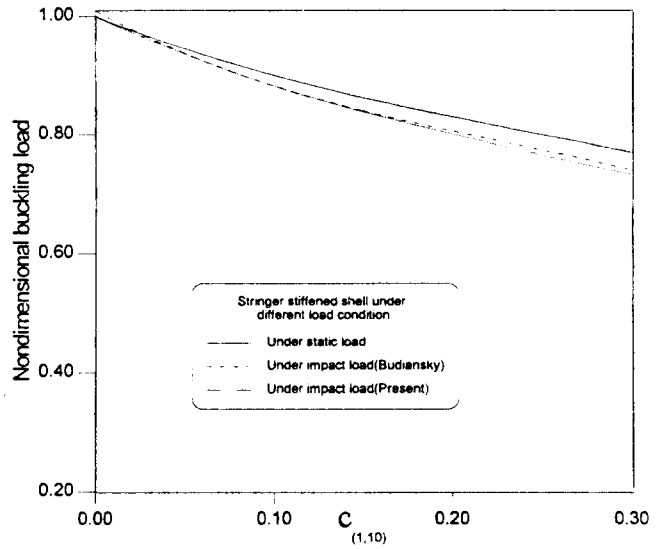


Fig. 2 Imperfection sensitivity comparison of shell S1 under axial static and impact load

에 언급된 관계를 이용하여 계산이 가능하다.

Fig. 3에서는 정적하중하에서의 Table 2에 표시된 case D4에 대하여 본 논문의 응답면을 이용한 좌굴 신뢰성해석 결과와, 정확한 신뢰성해석 결과를 준다고 일반적으로 인정되는 몬테칼로 모사법에 의한 해석결과를 비교하였다. 이 결과에서 보면 두가지의 결과가 상당히 근접하고 있으므로 본 논문에서 사용한 응답면 기법의 정확도를 확인할 수 있다. 두가지

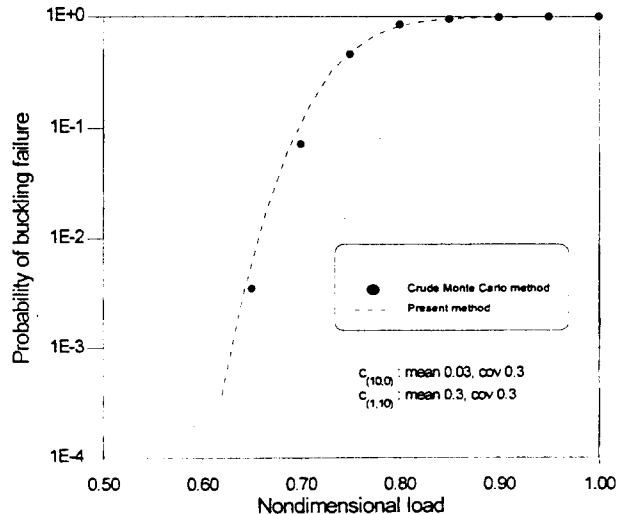


Fig. 3 Result comparison with that by Monte Carlo method for shell S1

방법에서의 계산 시간은 응답면을 이용한 방법이 해석의 정확도에 비해 계산시간면에서 상당한 이득을 얻을 수 있음을 이미 확인 하였다⁽¹⁸⁾.

축방향 충격하중하에서의 Table 1에 표시된 보강 원통형 셸의 좌굴 신뢰성 해석을 실시하였는데 우선 2개의 초기결함 모드의 Fourier 계수만을 확률변수로 고려한 확률론적 해석을 스트링저 보강 셸 S1에 대하여 실시하였다. 기하학적 초기결함은 정규분포의 확률특성을 갖는다고 가정하였고 해석에 사용한 스트링저 보강 셸의 기하학적 특성, 기하학적 초기결함 및 작용하중의 특성은 Table 2에 표시되어 있듯이 기하학적 초기결함의 평균 및 분산계수(coefficient of variation, cov)를 4가지 경우로 변환시키면서 실시하였고 하중과 신뢰도와의 관계를 Fig. 4, 5에 나타내었다. 여기에서 분산계수란 표준편차와 평균값의 비를 의미한다. 이 결과에서 보면 신뢰도 0.5에 해당하는 확정론적 좌굴하중 이전까지는 초기결함의 분산계수가 증가할수록, 확정론적 좌굴하중 이후에는 분산계수가 감소할수록 신뢰도는 감소한다. 이와 같은 현상을 외부하중이 확정론적 좌굴하중보다 큰 값을 갖는 좌굴후 영역(postbuckling range)에서는 초기결함의 분산정도가 큰 경우가 새로운 평형점을 초기결함의 분산정도가 작은 경우에 비해 더욱 쉽게 찾을 수 있다는 것을 의미한다. 또한 Fig. 4, 5의 결과 비교에서와 같이 이와 같은 경향은 초기결함의 평균이 증가하면 더욱 현저하게 나타난다.

Table 2 Reliability analysis cases for shell S1 under axial impact load

Case	Random variable c(10, 0)	Random variable c(1, 10)
D1	Mean 0.01, cov 0.1	Mean 0.1, cov 0.1
D2	Mean 0.01, cov 0.3	Mean 0.1, cov 0.3
D3	Mean 0.03, cov 0.1	Mean 0.3, cov 0.1
D4	Mean 0.03, cov 0.3	Mean 0.3, cov 0.3

랜덤한 기하학적 초기결함을 고려한 충격좌굴하중은 확률론적 특성을 가지게 되며 이러한 충격좌굴하중의 분포 또한 Fig. 6에 표시된 바와 같이 전체적인 분산정도는 정적하중에 의한 좌굴의 경우⁽¹⁸⁾에 비해 미소하게 증가되어 정규분포에 가까운 분포형태를 보이고 있다.

Fig. 7에는 스트링저 보강 셸 S1의 4가지 경우에 대해서 신뢰성 지수 $\beta^{(21)}$ 와 외부하중의 관계를 도시

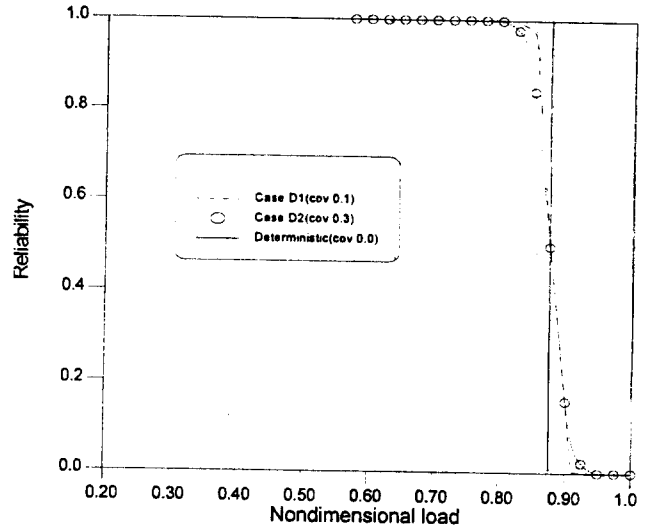


Fig. 4 Load v. s. reliability relation of shell S1 under axial impact load(case D1 & D2)

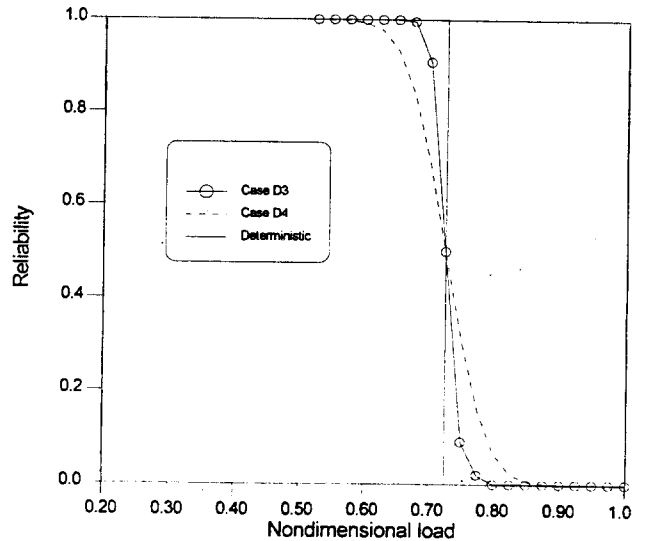


Fig. 5 Load v. s. reliability relation of shell S1 under axial impact load(case D3 & D4)

하였는데 기하학적 초기형상결함의 평균, 분산계수의 크기가 증가할수록 동일하중에서의 신뢰성 지수는 감소하게 된다.

Fig. 8에서는 각 경우의 신뢰성 지수 대 안전계수(safety parameter)의 관계를 보여주고 있는데 초기결함의 분산계수가 증가할수록 동일한 신뢰성 지수를 유지하기 위해 요구되는 안전계수는 증가하게 되며 랜덤한 기하학적 초기결함의 분산계수의 범위를

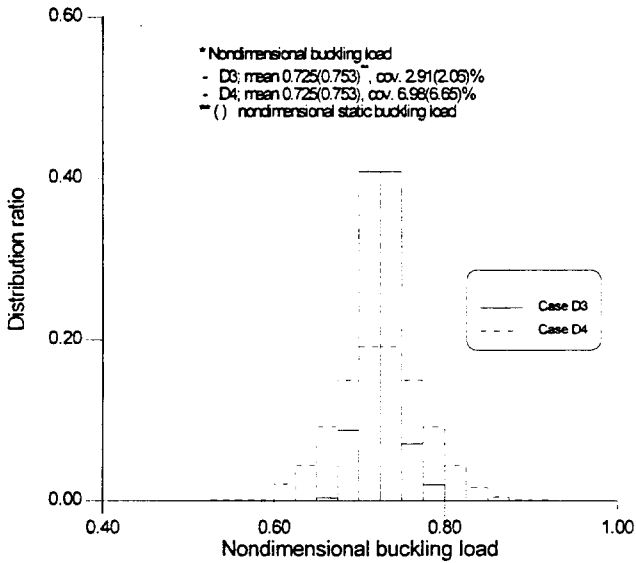


Fig. 6 Distribution of impact buckling load of S1 for case D3, D4

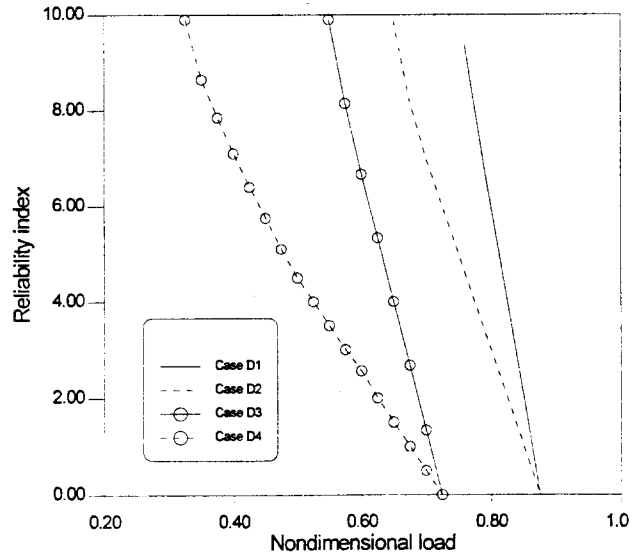


Fig. 7 Load v. s. reliability index relation for shell S1 under axial impact load

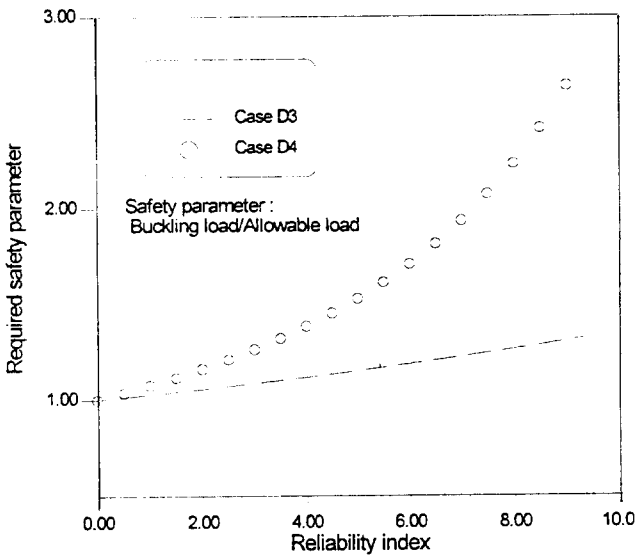


Fig. 8 Reliability index v. s. safety parameter relation of shell S1 for cases D3, D4

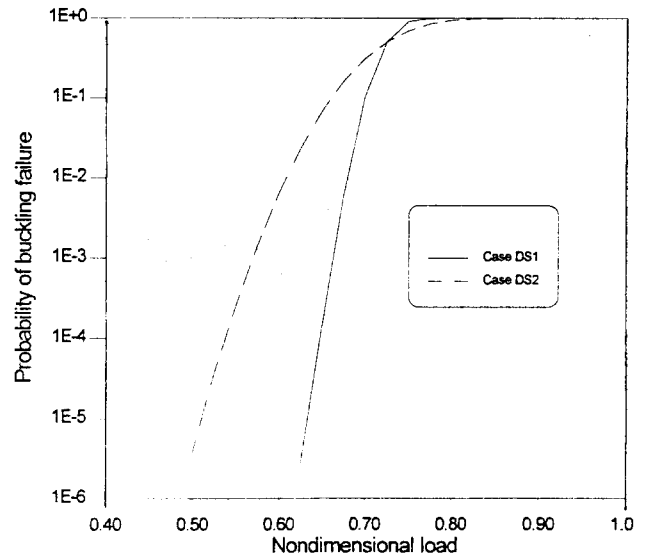


Fig. 9 Load v. s. buckling probability relation of shell S1 under axial impact load(case DS1 & DS2)

사전에 예측할 수 있으면 원하는 신뢰성을 보장하는 안전계수의 범위를 결정할 수 있음을 의미한다.

이때의 안전계수는 무차원 계수로서 좌굴강도를 외부하중으로 나눈 값이다.

정적인 하중하에서 랜덤한 보강재의 단면적을 확률변수로 고려하였을 때 그것이 기하학적 초기결함과 비선형 연성을 통해 좌굴확률에 영향을 주는 것은 이미 정량적으로 확인되었다⁽¹⁸⁾. 축방향 충격하중

하에서도 스트링거 보강 셀에 대하여 기하학적 초기 결함과 스트링거 단면적을 동시에 확률변수로 고려한 신뢰성 해석을 실시하였다. 해석의 경우별 특성은 Table 3에 표시하였고 그중 대표적인 경우에 대한 작용하중 대 파괴확률의 관계를 Fig. 9에 표시하였다. 이 경우에는 스트링거 단면적의 통계적 특성을 고정하고 기하학적 초기결함의 분산계수의 크기를 변화시켰다. 기하학적 초기결함의 분산계수의 크

기준가에 따라 동일한 외부하중하에서의 좌굴 확률이 상당히증가한다. 이때의 충격좌굴하중의 분포는 Fig. 10에서와 같이 거의 정규분포상태를 보이고 있다.

Table 3 Reliability analysis cases with impefection and stiffener sectional area as random variable for shell S1

Case	Geometric imperfection	Sectional area
DS1	$c_{(10,0)}$: mean 0.03, cov 0.1	Mean 0.795, cov 0.1
	$c_{(1,10)}$: mean 0.03, cov 0.1	lognormal
DS2	$c_{(10,0)}$: mean 0.03, cov 0.3	Mean 0.795, cov 0.1
	$c_{(1,10)}$: mean 0.3, cov 0.3	lognormal

Fig. 11에서는 충격하중하에서 스트링거 단면적을 확률변수로 취급한 경우의 해석결과와 스트링거 단면적을 확률변수로 취급하지 않은 경우의 하중과 좌굴파괴확률의 관계를 비교하였다. 이 결과에서 보면 정적 하중하에서의 결과⁽¹⁸⁾와는 달리 스트링거 좌굴 파괴확률에 미치는 영향이 정적하중하에서의 신뢰성 해석결과에 비해 다소 감소하게 된다. 이와같은 결과는 스트링거 단면적의 분산계수로 표현되는 변동성의 보강 셀의 강성 뿐만 아니라 관성하중에도 영향을 미치어 상호 상쇄되는 것으로 생각된다.

유한한 작용시간을 갖는 경우의 하중작용시간의 변화에 따른 파괴확률의 변화를 보기 위하여 셀 S1에 대해 Table 4에 표시한 2가지 경우에 대해 외부하중과 파괴확률간의 관계를 조사하여 Fig. 12에 도시하였다.

Table 4 Reliability analysis cases with different and duration time of step load

Case	Random variable	Nondimensional duration time τ_a
DT1	$c_{(1,10)}$: mean 0.3, cov 0.3	0.872
DT2	$c_{(3,16)}$: mean 0.3, cov 0.3	0.218

Table 4에 언급된 무차원 하중지속시간 τ_a 는 부록에서 이미 표현한대로 D =원통의 처짐강성 (flexural rigidity), \bar{M} =보강재를 셀에 확산(smearing) 시킬 때의 등가단위질량이라고 할 때 실제시간 t 와는 $\tau_a = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{M}}} t$ 에 의해 정의되는 값이다.

하중 작용시간의 변화에 따라 파괴확률이 상당히 변화함을 확인할 수 있고 하중이 유한시간동안 작용

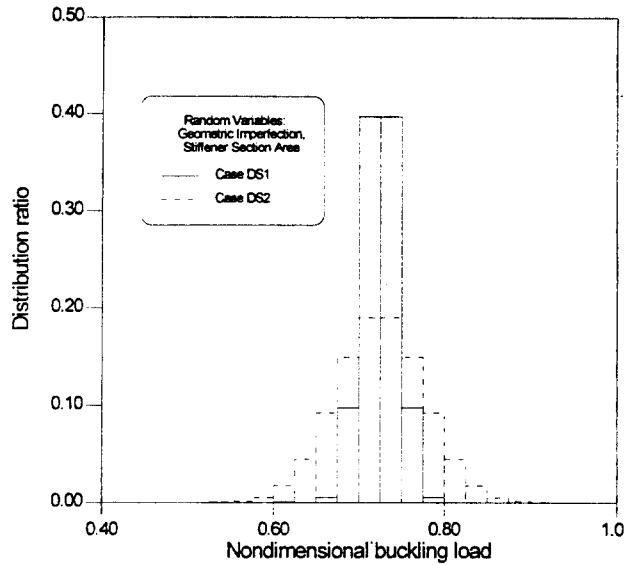


Fig. 10 Distribution of impact buckling load of S1 for case DS1, DS2

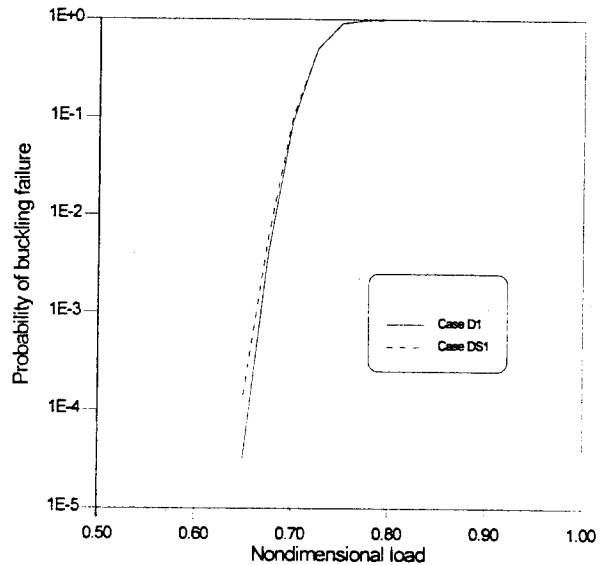


Fig. 11 Effect of A_s as random variable on the buckling probability of shell S1 under axial impact load

하는 실제 경우에는 하중작용시간의 영향을 고려해야 할 것으로 생각된다.

원환 (ring) 보강 셀에 대해서는 Table 5의 셀 R1에 대해 무한 작용시간을 갖는 계단하중하에서 기하학적 초기결함만을 확률변수로 보고 외부하중-신뢰도의 관계를 구하여 Fig. 13에 표시하였는데 그 경향은 스트링거 보강 셀의 경우와 유사하게 신뢰도 0.5

에 해당하는 확정론적 좌굴하중 이전까지는 초기결합의 분산계수인 cov가 0.1에서 0.3으로 증가할수록, 확정론적 좌굴하중 이후인 좌굴 후 영역에서는 분산계수가 감소할수록 신뢰도는 감소한다.

Table 5 Geometric & material properties of ring stiffened shell R1

Item	Shell R1
L	133.10(mm)
L/R	1.31
R/h	430.51
d_r/R	0.309
Z_r/h	-1.127
$A/d_r h$	0.0414
$I_{r0}/d_r h^3$	0.00581
Elastic modulus	6.89E3(kgf/mm ²), 6.75E2(MPa)
Poisson ratio	0.3

Table 6 Reliability analysis cases for shell R1 under axial impact load

Case	Random variable $C_{(16,0)}$	Random variable $C_{(1,8)}$
DR1	Mean 0.01, cov 0.1	Mean 0.1, cov 0.1
DR2	Mean 0.01, cov 0.3	Mean 0.1, cov 0.3

Fig. 14에는 Table 6에 언급된 바대로의 원환 보강

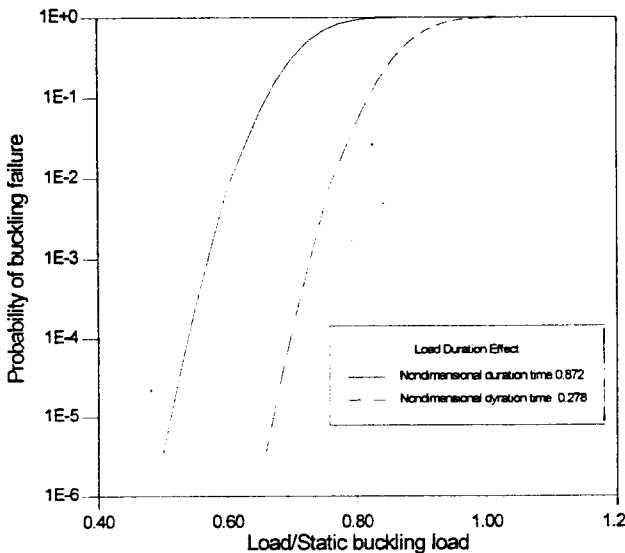


Fig. 12 Effect of duration time on the buckling probability of stringer stiffened shell

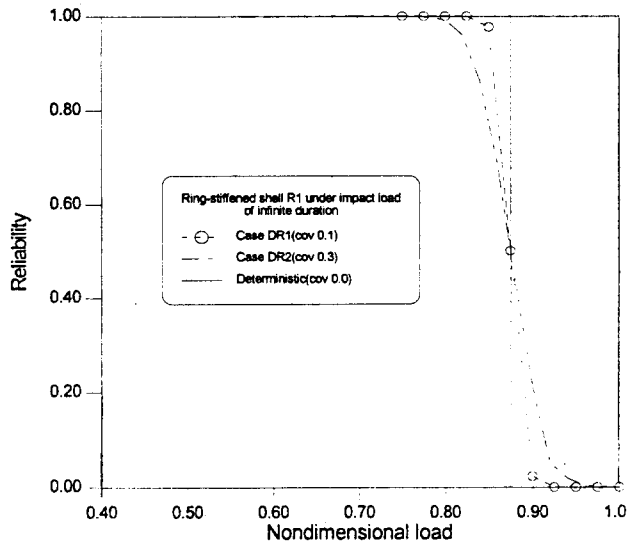


Fig. 13 Load v. s. reliability relation of shell R1 under axial impact load(case DR1 & DR2)

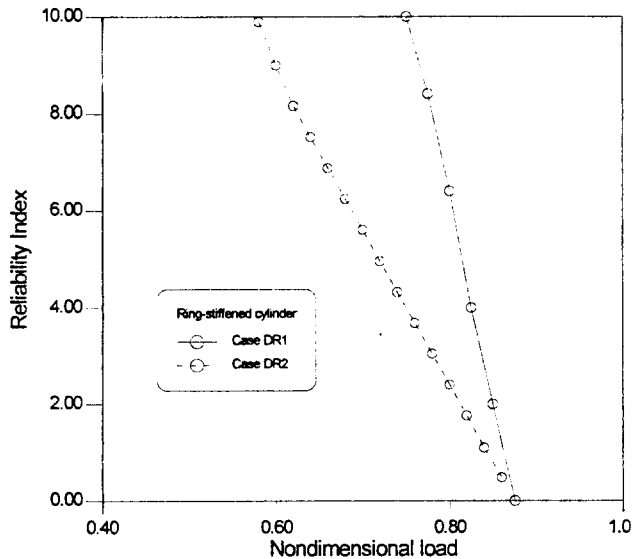


Fig. 14 Load v. s. reliability index relation for shell R1 for case DR1, DR2

셀의 2가지 경우에 대해서 신뢰성 지수 β 와 하중의 관계를 도시하였는데 기하학적 초기 결합의 평균, 분산계수의 크기가 증가함에 따라 신뢰성 지수는 감소하게 되고 전체적인 정성적 경향은 스트링저 보강 셀의 경우와 유사하다.

Fig. 15에서는 신뢰성 지수와 안전계수의 관계를 보여주고 있는데 스트링저 보강 셀의 경우와 같이 초기결합의 분산계수가 증가할수록 동일한 신뢰성

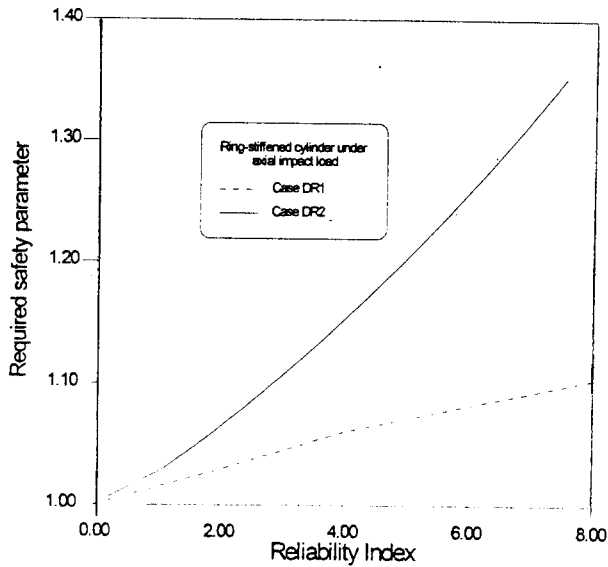


Fig. 15 Reliability index v. s. safety parameter relation of shell R1 for cases DR1, DR2

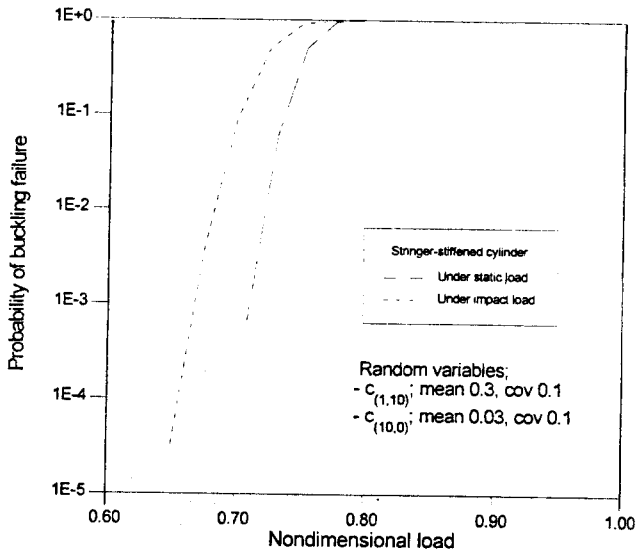


Fig. 16 Result comparison of buckling probability for shell S1 with the same random imperfection condition

지수를 갖기 위해 요구되는 안전계수는 증가하게 된다.

Fig. 16에서는 스트링거 보강 셸인 S1에서 기하학적 초기결함 및 여타 확률변수에 대해 동일한 통계적 특성을 가질 때의 외부하중과 파괴확률의 관계에 대한 정적하중 및 충격하중하에서의 해석결과를 대표적인 경우에 대해 비교하였다.

전체적으로 보아 계단하중과 같은 충격 하중하에서의 결과가 정적해석결과에 비해 파괴확률이 상당히 증가된 결과를 보이고 있다.

이와 같이 충격하중이 작용하는 경우에는 기하학적 초기결함이 파괴확률에 미치는 영향이 정적하중을 받는 경우에서보다 크게 나타나므로 확률변수로서 기하학적 초기결함의 영향을 반드시 고려해야 할 것이다.

5. 결 론

본 논문에서는 랜덤한 기하학적 초기결함을 갖는 보강 원통형 셸이 축방향 충격하중을 받는 경우의 좌굴 신뢰성 해석을 수행하였다.

이를 위해서 기존의 신뢰성 해석 방법의 단점을 보완할 수 있도록 응답면을 이용하여 충격좌굴에 관한 한계상태방정식을 근사적으로 구성하고 이를 불변 2차 모멘트법과 결합하였다.

충격하중이 작용하는 경우의 확률론적 초기결함 민감도 해석을 수행한 결과 확률변수들이 동일한 통계특성을 갖는 상태에서 정적 하중이 작용하는 경우에 비해 좌굴확률이 크게 나타나고 있다. 기하학적 초기결함의 평균, 분산계수의 증가에 따라 동일한 하중하에서의 신뢰도는 감소하며 동일한 신뢰도지수를 유지하기 위해 요구되는 안전계수 또한 증가하게 된다. 또한 확률론적 좌굴하중의 분포상태는 여러 확률변수들의 다양한 통계특성에도 불구하고 정규분포와 유사한 분포를 하고 있다.

본 논문에서의 해석 방법을 이용하여 얻어지는 충격좌굴하중의 통계특성을 분석하면 이로부터 신뢰성 지수와 안전계수, 하중과 신뢰성 지수의 관계를 얻을 수 있다. 이러한 관계를 이용하면 확률변수들의 통계특성을 고려하여 요구되는 신뢰도를 만족하는 허용하중이나 안전계수의 범위를 결정할 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

- (1) Koiter W. T., 1970, "On the Stability of Elastic Equilibrium," Dissertation, U. of Delft, Holland (1945), English Translation AFFDL Report TR-70-20.
- (2) Arbocz, J., 1974, "The Effect of Initial Imperfection on Shell Stability," in 'Thin-Shell Structure' edited by Fung & Sechler, Prentice-Hall, pp. 205

- ~245.
- (3) Bolotin V. V., 1969, "Statistical Methods in Structural Mechanics," Holden-Day.
 - (4) Amazigo J. C., 1969, "Buckling Under Axial Compression of Long Cylindrical Shells with Random Axisymmetric Imperfections," Q. of Applied Mathematics, Vol. 26, pp. 537~566.
 - (5) Hansen J. S., 1977, "General Random Imperfection in the Buckling of Axially Loaded Cylindrical Shells," AIAA Journal, Vol. 15, No. 9, pp. 1250~1256.
 - (6) Vermeulen P. G., Elishakoff I., 1984, "The Statistical Analysis of Initial Imperfection Measurements," Delft Univ. Report LR-442.
 - (7) Elishakoff I., 1985, "Reliability of Axially Compressed Cylindrical Shells with General Random Imperfections," J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 52, pp. 122~128.
 - (8) Cryssantopoulos M. K., Baker M. K., Dowling P. J., 1991, "Statistical Analysis of Imperfections in Stiffened Cylinders," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 7, pp. 1979~1997.
 - (9) Arbocz, J., 1991, "Collapse of Axially Compressed Cylindrical Shells with Random Imperfections," AIAA Journal, Vol. 29, No. 12, pp. 2247~2256.
 - (10) Jacquot R. G., 1972, "Nonstationary Random Column Buckling Problem," J. of Engineering Mechanics Div., ASCE Proceeding, Vol. 98, No. EM5, pp. 1173~1182.
 - (11) Elishakoff I., 1979, "Buckling of a Stochastically Imperfect Finite Column on a Nonlinear Elastic Foundation," J. of Applied Mechanics, Trans. of ASME, Vol. 46, pp. 411~416.
 - (12) Ibrahim R. A. and Heo H., 1987, "Stochastic Response of Nonlinear Structures with Parameter Random Fluctuation," AIAA Journal, Vol. 25, No. 2, pp. 331~338.
 - (13) Ariaratnam S. T. and Xie W. C., 1988, "Dynamic Snap-Buckling of Structures Under Stochastic Loads," in 'Stochastic Structural Dynamics; Progress in Theory and Application' Edited by G. I. Schueller, pp. 1~20.
 - (14) Wang F. Y., 1990, "Monte Carlo Analysis of Nonlinear Vibration of Rectangular Plates with Random Geometric Imperfections," Int. J. Solids Structures, Vol. 26, No. 1, pp. 99~109.
 - (15) 박치모, 1990, "원환으로 보강된 원통형 셀의 최종강도 해석," 서울대학교 조선공학과 박사학위 논문.
 - (16) 전승문, 홍창선, 1988, "초기결함을 고려한 원통형 판넬의 좌굴거동," 한국항공우주학회지, 제 16권, 제 4 호, pp. 40~46.
 - (17) 김천옥, S. Y. Lu, 1983, "압축하중을 받는 직교이방성 원통 셀의 동적 안정성," 대한기계학회 논문집, 제 5 권, 제 4 호, pp. 266~273.
 - (18) 김지호, 1991, "확률 유한요소법에 의한 구조 신뢰성 해석," 서울대학교 조선공학과 박사 학위 논문.
 - (19) 김두기, 양영순, 1992, "기하학적 초기결함을 갖는 원통형 셀의 탄성좌굴신뢰성 해석," 대한조선학회논문집 29권 2호, pp. 103~114.
 - (20) 김두기, 양영순, 1994, "불확정적인 초기형상 결함을 갖는 보강 원통형 셀의 확률론적 초기결함 민감도 해석," 대한조선학회논문집, 제31권 제1호, pp. 142~154.
 - (21) Hasofer A. M. and Lind N. C., 1974, "Exact and Invariant Second Moment Code Format," J. of Engineering Mechanics Division, ASCE Proceeding, Vol. 100, No. EM1, pp. 111~121.
 - (22) Parkinson D. B., 1978, "Solution for Second Moment Reliability Index," J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE Proceeding, Vol. 104, No. EM5, pp. 1267~1275.
 - (23) Yamaki N., 1984, "Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells," North-Holland.
 - (24) Bucher C. G., Bourgund U., 1987, "Efficient use of Response Surface Methods," Report of Universitat Innsbruck, No. 9~87.
 - (25) Simitises G. J., 1974, "Buckling Analysis of Geometrically Imperfect Stiffened Cylinders under Axial Compression," AIAA Journal, Vol. 15, No. 3, pp. 374~382.
 - (26) Budiansky B., 1964, "Dynamic Buckling of Imperfection-Sensitive Structures," ONR Report No. 18.
 - (27) Lakshimikantham L. and Tsui T., 1975, "Dynamic Buckling of Ring Stiffened Cylindrical Shells," AIAA Journal, Vol. 13, No. 9, pp. 1165~1170.

부 록

$$\xi = \frac{\pi x}{L}, \quad \eta = \frac{\pi s}{l}, \quad l = \pi R, \quad w = \frac{W}{h}, \quad w_o = \frac{W_o}{h},$$

$$f = \frac{F}{Eh^3}, \quad \alpha_1 = \frac{L^2}{\pi^2 Rh}$$

$$\beta_1 = \frac{L}{\pi R}, \quad c = 12(1 - \nu^2), \quad \tau = \Omega_o t, \quad \Omega_o = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{D/\bar{M}},$$

$$D = \frac{Eh^3}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}$$

$$P_{cl} = \frac{2\pi Eh^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}, \quad \Xi = \frac{P}{P_{cl}}, \quad \sigma = \frac{PL^2}{\pi^3 ERh^3},$$

$$\bar{M} = \rho_c h + \rho_s (A_s/d_s) + \rho_r (A_r/d_r)$$

$$h_{11} = 1 + L_s - \frac{12}{h^2} \frac{z_s^2 K_s^2}{\alpha} (1 + K_r)$$

$$h_{12} = 1 - \frac{12}{h^2} \frac{\nu z_r z_s K_s K_r}{\alpha} + \frac{G}{2D} \left(\frac{J_s G}{d_i s G} + \frac{J_r G}{d_i r G} \right)$$

$$h_{22} = 1 + L_r - \frac{12}{h^2} \frac{z_r^2 K_r^2}{\alpha} (1 + K_s)$$

$$q_{11} = -\frac{\nu z_r K_r}{\alpha}$$

$$q_{12} = \frac{[(1 + K_r) z_s K_s + (1 + K_s) z_r K_r]}{2\alpha}$$

$$q_{22} = -\frac{\nu z_r K_r}{\alpha}$$

$$d_{11} = \frac{(1 + K_s)}{\alpha D_1}$$

$$d_{12} = \frac{[(1 + K_s)(1 + K_r) - \nu]}{\alpha(1 - \nu) D_1}$$

$$d_{22} = \frac{(1 + K_r)}{\alpha D_1}$$

$$D_1 = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad \alpha = [(1 + K_r)(1 + K_s) - \nu^2]$$

$$K_s = \frac{A_s(1 - \nu^2)}{hd_s}, \quad L_s = \frac{EI_{os}}{Dd_s}, \quad K_r = \frac{A_r(1 - \nu^2)}{hd_r},$$

$$L_r = \frac{EI_{or}}{Dd_r}$$

$$\hat{a}_1 = a_1 Eh \beta_1^2, \quad \hat{a}_2 = a_2 Eh, \quad \hat{a}_3 = \frac{a_3}{h}, \quad \hat{a}_4 = \frac{\beta_1^2}{h} a_4$$

$$\hat{b}_1 = b_1 Eh \beta_1^2, \quad \hat{b}_2 = b_2 Eh, \quad \hat{b}_3 = \frac{b_3}{h}, \quad \hat{b}_4 = \frac{\beta_1^2}{h} b_4$$

$$a_1 = \frac{(1 + K_r)}{\alpha D_1}, \quad a_2 = -\frac{\nu}{\alpha D_1}$$

$$a_3 = \frac{(1 + K_r) z_s K_s}{\alpha}, \quad a_4 = -\frac{\nu z_r K_r}{\alpha}$$

$$b_1 = -\frac{\nu}{\alpha D_1}, \quad b_2 = \frac{(1 + K_s)}{\alpha D_1}$$

$$b_3 = -\frac{\nu z_s K_s}{\alpha}, \quad b_4 = (1 + K_s) z_r K_r$$