

〈논 문〉

강-점소성 ALE 유한 요소 수식화에 근거한 사각형 형재의 평금형 등은 압출에 대한 3차원 해석

강 연 식* · 양 동 열*

(1995년 10월 31일 접수)

A Three-Dimensional Rigid-Viscoplastic Finite Element Analysis of Isothermal Square Die Extrusion of a Square Section Based on ALE Description

Yeon-Sick Kang and Dong-Yol Yang

Abstract

In the finite element analysis of metal forming processes, the updated Lagrangian approach has been widely and effectively used to simulate the non-steady state problems. However, some difficulties have arisen from abrupt flow change as in extrusion through square dies. In the present work, an ALE(arbitrary Lagrangian-Eulerian) finite element formulation for deformation analysis are presented for rigid-viscoplastic materials. The developed finite element program is applied to the isothermal analysis of square die extrusion of a square section. The computational results are compared with those by the updated Lagrangian finite element analysis.

Key Words : Arbitrary Lagrangian-Eulerian Description(임의의 라그랑지안-오일러리안 묘사), Finite Element Formulation(유한요소수식화), Extrusion through Square Dies (평금형 압출)

1. 서 론

소성가공 공정을 해석하는데 있어서 지금까지 여러가지 운동학적 묘사에 근거한 유한요소법이 이용되어져 왔다. 이 중에서 가장 널리 이용되어져온 방법이 Lagrangian묘사에 의한 유한요소법이다. 이 방법은 물질과 격자가 일치하므로 경로의존적인 비정상상태의 소성가공 문제에 적합하며 지금까지 소성가공 공정을 성공적으로 해석하여 왔다. 그러나 변형이 큰 경우, 특히 국부적으로 변형이 심한 경우 유한요소해석에 어려움을 겪어왔다. Eulerian 묘사에 의한 유한요소해석은 준 정상상태의 소성가

공 문제에 자주 이용되어져 왔다. 격자가 공간에 고정되었기 때문에 큰 변형의 해석이 가능하나 대류 항(convective term)이 생겨 수치적으로 곤란한 문제가 발생할 수 있으며 물질의 경계등을 제대로 표현할 수가 없다. 근래에 들어서는 위의 두가지 접근 방식의 장점을 취한 ALE 묘사에 의하여 유한요소법이 사용되기 시작하였다. ALE 방법은 격자와 물질간의 이동을 독립적으로 처리 할 수 있으므로 사용자가 격자를 임의대로 이동시켜 해석할 수 있다.

ALE 방법은 초기에 주로 유체역학 분야에서 사용되어져 왔다. 1974년에 Hirt등⁽¹⁾은 유체역학에서 Navier-Stokes방정식을 푸는데 사용하였고 1981년에 Hughes등⁽²⁾은 비압축성 점성유동에 대하여 유체 경계면과 자유면에서의 문제를 처리할 수 있는

*한국과학기술원 기계공학과

유한요소 수식화를 하였다. 비선형고체역학 분야에서는 1984년에 Haber⁽³⁾가 유한요소법에 적용하였으며 그 후에 Liu등⁽⁴⁾이 경로의존적인 물질에 대한 탄-소성해석을 하였다. Benson⁽⁵⁾은 ALE 접근방식을 단순화시켜 여러가지 예제를 해석하였다. 1990년대에 들어와서 Ghosh⁽⁶⁾는 탄-소성 유한요소법의 수식화와 압출문제에 적용한 바 있다. 최근에 들어서는 다양한 분야로 사용이 확대되어 지고 있다.

지금까지 소성가공 공정해석에 있어서 탄소성 ALE 유한요소해석이 주로 이루어졌다. 본 연구에서는 3차원 문제의 계산시간을 고려하여 강-점소성 유한요소 수식화와 이를 바탕으로 유한요소 프로그램을 개발하였다. 강-점소성 유한요소법에 의한 해석으로는 Kang등^(7,8)이 축대칭 압출 문제들을 해석한 바 있다. 개발된 프로그램으로 오리피스(orifice)부에서 국부적으로 변형이 심한 경우인 평균형 압출 문제를 해석하여 보았다. 해석 예제로는 사각형형체의 평균형 압출을 등온으로 해석하였다. 또한 ALE 방식에 의한 결과와 Lagrangian 방식에 의한 결과를 비교하여 검토하여 보았다.

2. ALE 유한요소 수식화

2.1 변형해석을 위한 변분식의 유도

본 논문에서는 관성효과를 무시하고 소재는 강-점소성체로 가정하여 기본방정식을 유도하였다. 비압축성을 가정하여 밀도의 변화는 무시하였다. 일반적인 운동량방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$(\tau_{ij})_{,j} + b_i = \rho \dot{v}_i \quad (1)$$

여기서 b_i 는 물체력이고 ρ 는 밀도이다. τ_{ij} 는 코시응력(Cauchy stress) 성분을 나타낸다. 물질 좌표에 대한 미분과 기준좌표에 대한 미분을 각각 \cdot , $*$ 로 나타내면 속도에 대한 두가지 미분들과의 관계⁽²⁾는 다음과 같다.

$$\dot{v}_i = v_i^* + c_j(v_i)_{,j} \quad \text{where } c_j = v_j - w_j \quad (2)$$

v 는 물질의 속도, w 는 격자의 속도를 나타낸다. 재료가 강-점소성이고 등방성과 비압축성을 가진다고 가정하면 다음 식⁽⁹⁾를 만족한다.

$$\tau'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}'_{ij} \quad (3)$$

변형해석을 위한 기본식은 식(2)와 식(3)을 식(1)에 대입하여 변분을 취하면 다음⁽⁷⁾과 같이 쓸

수 있다. 이때 δv_i 는 경계조건에 합치하는 속도장에 대한 임의의 변분량이다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \int \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} dV + K^* \int \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v dV \\ & + \int \rho (v_j - w_j) v_{i,j} \delta v_i dV - \int T_1 \delta v_i dS = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

여기서 K^* 는 비압축성을 고려하기 위한 벌칙상수(penalty constant)이고 $\dot{\epsilon}_v$ 는 체적변형률 속도이다.

2.2 유한요소 근사

등계수를 갖는 8절점 육면체 요소의 보간함수는 다음과 같다.

$$h_a = \frac{1}{8} (1+r_a r) (1+s_a s) (1+t_a t) \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = -r_5 = -r_6 = -r_7 = -r_8 = 1 \\ -s_1 = s_2 = s_3 = -s_4 = -s_5 = s_6 = s_7 = -s_8 = 1 \\ -t_1 = -t_2 = t_3 = t_4 = -t_5 = -t_6 = t_7 = t_8 = 1 \end{aligned}$$

$$N_{ia} = \begin{cases} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_8 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & h_8 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & h_8 \end{cases} \quad (5b)$$

위의 식(5)를 이용하여 속도와 변형율을 절점의 속도에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_i &= N_{ia} V_a, \quad \delta v_i = N_{ia} \delta V_a \\ \dot{\epsilon}'_{ij} &= A_{ij} N_{ja} V_a = B_{ia} V_a \\ \dot{\epsilon}' &= \sqrt{\frac{2}{3} k_{a\beta} V_a V_\beta}, \quad k = B^T B \\ \epsilon_v &= C^T \cdot \dot{\epsilon}' = C_i B_{ia} V_a = Q_a V_a, \\ [C_i]^T &= [1, 1, 1, 0, 0, 0] \\ \delta \dot{\epsilon}' &= \frac{2}{3} \frac{k_{a\beta} V_\beta}{\dot{\epsilon}'} \delta V_a \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 V_a 는 절점에서의 속도성분이다. 식(5)와 식(6)을 식(4)에 대입하면 최종적인 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{m=1}^M \left[\int_{v_{im}} \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} k_{a\beta} V_a V_\beta + K^* \int_{v_{im}} Q_r V_r Q_a dV \right. \\ & + \int_{v_{im}} \rho (M_{j\beta} V_\beta - w_j) V_{i,j} N_{ia} dV \\ & \left. - \int_{S_{im}} T_1 N_{ia} dS \right] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

여기서 M 은 전체요소의 수이다. 식(7)의 각항을 Π_1 , Π_2 , Π_3 과 Π_4 로 나타내면 다음과 같다.

강-점소성 ALE 유한 요소 수식화에 근거한 사각형 형재의 평금형 등은 압출에 대한 3차원

$$\Pi = \sum_{m=1}^M [\Pi_1^{(m)} + \Pi_2^{(m)} + \Pi_3^{(m)} - \Pi_4^{(m)}] = 0 \quad (8)$$

식(8)은 비선형방정식이므로 다음과 같이 Newton-Raphson 방법을 적용하여 해를 구한다.

$$\sum_{m=1}^M \left[\frac{\partial \Pi_1^{(1)}}{\partial V} + \frac{\partial \Pi_2^{(1)}}{\partial V} + \frac{\partial \Pi_3^{(1)}}{\partial V} - \frac{\partial \Pi_4^{(1)}}{\partial V} \right]_{(n-1)} \Delta V^{(m)} = - \sum_{m=1}^M [\Pi_1^{(m)} + \Pi_2^{(m)} + \Pi_3^{(m)} - \Pi_4^{(m)}] \quad (9)$$

여기서 (n) 과 (n-1)는 각각 현재와 이전시간 스텝을 나타낸다.

2.3 수치적 구현

ALE 방법에 의한 전체적인 해석 과정은 Fig. 1에 나타내었다. 평형방정식을 풀 때 소재 경계부분에서는 격자계가 물질계를 벗어나지 않게 하기 위하여 다음 조건을 적용한다.

$$(\mathbf{V} - \mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (10)$$

n은 경계면의 법선 방향이다.

평형방정식의 해는 물질계에 대한 속도장이다. 따라서 격자계에서의 경로 의존적인 상태변수를 구하기 위해서는 경로 의존 상태변수의 재지정 과정이 필요하다. ALE방법의 수치적 구현에서 중요한

또 한가지가 격자조정이다. 격자 조정방법은 Winslow 방법⁽⁵⁾, 수치적 민감도를 이용하는 방법⁽¹⁰⁾, 등매개 사상을 이용하는 방법⁽⁸⁾ 등이 있다. 본 연구에서 격자조정방법과 경로의존 상태변수의 재지정과정은 Kang등⁽⁷⁾ 2차원 연구결과와 개념을 3차원으로 확장하여 사용하였다.

3. 사각형재의 평금형 압출의 등온해석

사각형재의 등온(415°C) 압출을 해석하였다. 계산에 사용된 소재는 Al-1100이고 마찰 상수는 0.3이다. 펀치의 속도는 10 mm/sec이다. 소재의 유동응력식⁽¹¹⁾은 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = 28.565 \dot{\epsilon}^{0.153} \text{ (N/mm}^2\text{)} \quad (11)$$

초기 소재의 크기와 오리피스스의 형상은 Fig. 2에 나타내었다. 대칭성과 격자생성을 고려하여 전체의 1/4을 해석하였다. 계산에 사용된 격자는 Fig. 3과 같다. 격자는 단위체 개념을 사용하여 구성^(12,13)하였다. 압출 선단부는 거의 강제이동을 하기 때문에 계산시간의 경제성을 고려하여 이 부분에서 격자의 간격을 크게 조정하였다.

Fig. 4에는 펀치의 이동이 2.47 mm와 5.10 mm 일때 유효변형율 속도 분포를 나타냈다. Fig. 5에

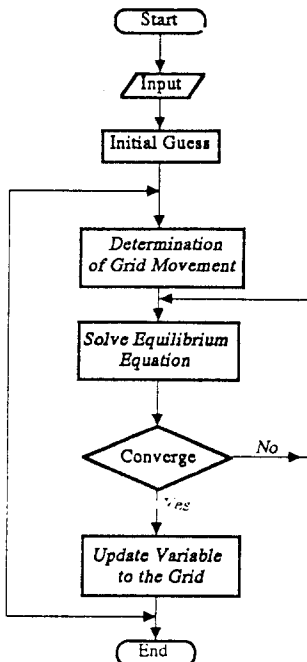


Fig. 1 Flow chart for solving procedure

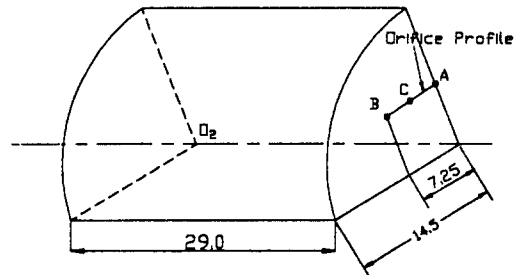


Fig. 2 Dimensions of the billet

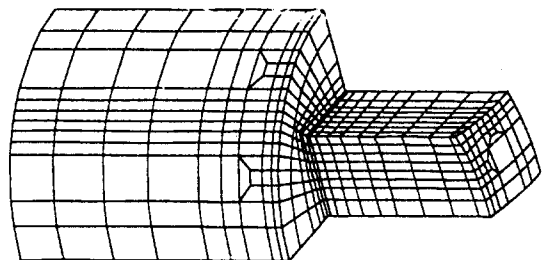


Fig. 3 Mesh configuration

는 펀치의 이동이 5.10 mm일때 각 단면에서 유효 변형률 속도 분포를 나타냈다. 오리피스 부근에서 유동이 크고 급변하기 때문에 유효변형률 속도가 크게 나왔다. Fig. 5(b)의 경우가 Fig. 5 (a)의 경

우보다 높이 감소율이 작기 때문에 유효변형률 속도가 다소 작게 나왔다. 이차원 해석의 경우는 단면감소율에 따라 유효변형률 속도가 크게 변한다. 그러나 Fig. 5(a)와 Fig. 5(b)의 경우는 3차원 유동 특성 때문에 크게 차이가 나지는 않는다.

ALE 유한요소법으로 계산된 해석결과를 기존의 Lagrangian 유한요소 프로그램⁽¹²⁾으로 해석한 결과와 비교하였다. Fig. 6과 Fig. 7에는 두방법으로 계산한 유효변형률의 분포와 하중을 비교하여 나타냈다. 유효변형률의 경우는 두 방법이 서로 비슷하게 나왔다. 그러나 하중의 경우는 ALE방법으로 계산한 결과가 실험⁽¹⁴⁾에 비해 보다 좋은 결과를 나타낸다. 압출초기의 하중은 두 방법 모두가 실험과 많은 차이가 난다. 이유는 실험시 소재를 컨테이너(container)에 넣기 위해 주는 소재와 컨테이너간

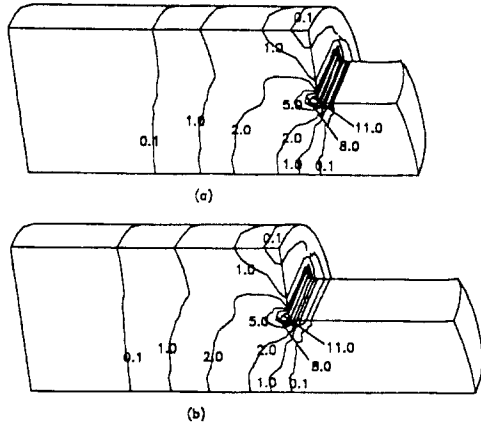


Fig. 4 Distribution of effective strain rate at the punch travel of (a) 2.47mm and (b) 5.10mm

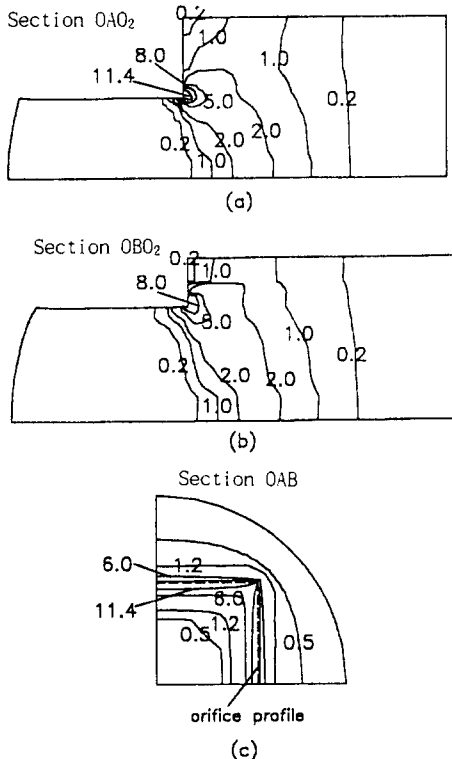


Fig. 5 Distribution of effective strain rate for each section at the punch travel of 5.10mm

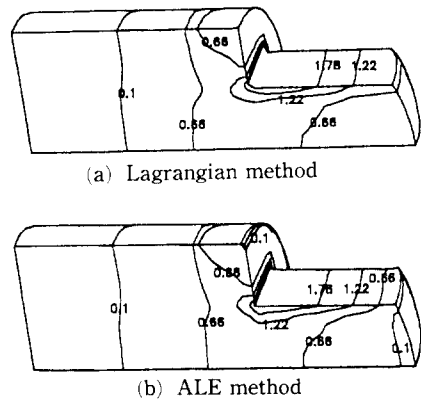


Fig. 6 Comparison of effective strain for the two methods

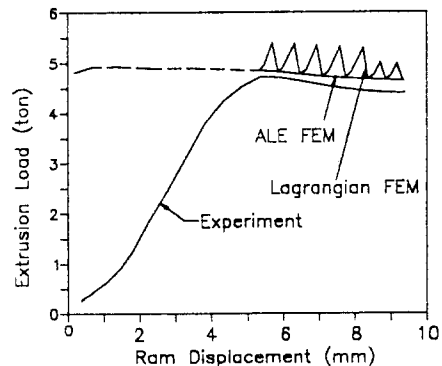


Fig. 7 Comparison of the extrusion load for the two methods

의 여유간을 (clearance) 때문이다. 실험의 경우 초기에는 벽면에 마찰력이 이 여유간주 때문에 작용하지 않는다. 또한 강-점소성모델을 사용했기 때문에 초기의 커다란 강체역의 존재에서 오는 오차도 있을것이다. 그러나 전체적으로 볼때 실험과 잘 일치 하고 있음을 볼수 있다. 두 방법을 실험과 비교해 볼때 ALE방법의 경우는 격자가 항상 좋은 상태를 유지하기 때문에 Lagrangian 방법의 경우처럼 하중의 진동이 발생하지 않는다.

계산시간은 ALE방법의 경우가 5배정도 많이 소요된다. 그러나 ALE방법은 금형과의 간섭이 매우 적고 좋은 격자를 유지할 수 있기 때문에 ALE의 경우가 보다 더 정확하게 해석되어진다고 할 수 있다.

4. 결 론

ALE 접근방식에 의하여 강소성 유한요소 수식화와 이를 기본으로 유한 요소 프로그램을 개발하였다. 개발된 ALE 유한요소 프로그램으로 사각형 형재의 평금형 압출의 예제를 통하여 그 효용성을 살펴보았다. ALE방법에 의한 해석 결과를 기존의 해석 결과를 비교하여 타당성을 알 수 있었다. ALE 방법은 계산 시간이 많이 소요된다는 단점이 있다. 그러나 보다 강건한 방법이고 향상된 결과를 얻을 수 있기 때문에 컴퓨터의 발전과 더불어 유용하게 이용될 것이다.

후 기

본 연구는 '94~'95 한국과학재단의 특정기초 연구과제의 일부로 수행되었습니다. 동 재단의 관계자분들께 감사드립니다.

참고 문헌

(1) Hirt, C. W., Amsden, A. A. and Cook, J. L., 1974, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds," J. Comp. Phys., Vol. 14, pp. 227~253.
 (2) Hughes, T. J. R., Liu, W. K. and Zimmermann, T. K., 1981, "Lagrangian-Eulerian Finite element Formulation for Incompressible Viscous Flows," Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.,

Vol. 29, pp. 329~349.
 (3) Haber, R. B., 1984, "A Mixed Eulerian-Lagrangian Displacement Model for Large-Deformation Analysis in Solid Mechanics," Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., Vol. 43, pp. 277~292.
 (4) Liu, W. K., Belytschko, T. and Chang, H., 1986, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Path-Dependent Materials," Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., Vol. 58, pp. 227~245.
 (5) Benson, D. J., 1986, "An Efficient, Accurate, Simple ALE Methods for Nonlinear Finite Element programs," Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., Vol. 58, pp. 227~245.
 (6) Ghosh, S., 1990, "Finite Element Simulation of Some Extrusion Processes Using the Arbitrary Lagrangian-Eulerian Description," J. Mater. Shaping Technol., Vol. 8, No. 1, pp. 53~64.
 (7) 강연식, 양동열, 1994, "ALE 묘사에 근거한 강-점소성 유한요소 수식화와 축대칭 평금형 압출에의 적용," 한국소성가공학회지, 제 3권 제 2호, pp. 156~166.
 (8) 강연식, 양동열, 1995, "곡면금형을 통한 축대칭 열간압출의 유한요소해석," 한국소성가공학회지, 제 4권 제 1호, pp. 69~78.
 (9) P. Perzyna, 1966, "Fundamental Problems in Viscoplasticity," Adv. in App. Mech., Vol. 9, pp. 243~315.
 (10) Kim, J. H., 1993, Remeshing Techniques Based on Arbitrary Lagrangian-Eulerian Description for Elastic-Plastic Large Deformation Problems, Master thesis, KAIST.
 (11) Altan, T., Oh, S. I. and Gegel, H. L., 1983, Metal Forming: Fundamentals and Applications, Americal Soc. for Metals, chap. 4.
 (12) 강연식, 양동열, 1994, "자동격자 재구성법을 이용한 평금형 압출의 3차원 열-점소성 유한요소 해석," 대한기계학회 '94 춘계학술대회 논문집 (I), pp. 366~370.
 (13) Yoon, J. H. and Yang, D. Y., 1990, "A Three-Dimensional Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Bevel Gear Forging by Using a Remeshing Technique," Int. J. Mech. Sci. Vol. 32, No. 4, pp. 227~291.

- (14) Yang, D. Y. and Kang, Y. S., 1995, "Investigation into the Thermal-Visco-Plastic Finite Element Analysis of Square Die Extrusion of Square Section with Lagrangian Description," Int. J. Machine Tools and Manufacture, (accepted for publication).