

# 웨이브 와셔 스프링의 剛性值에 관한 研究

이 수 종\* · 왕 지 석\*\*

A Study on the Stiffness of Wave Washer Spring

S. J. Lee · J. S. Wang

**Key words :** Non - return valve(비복귀밸브), Stiffness of wave washer spring(웨이브 와셔 스프링의 강성도), Optimum stiffness of valve spring(밸브스프링의 최적강성)

## Abstract

The wave washer springs are widely used in non - return valves of fluid, especially in air check valves to confirm the rapid shut - off of valve propers. The stiffness of wave washer springs used in suction and exhaust valves of reciprocating air compressor play an important role on efficiency of the compressor. If the stiffness of the spring is too high, the pressure differences necessary to open the valves become high and the volumetric efficiency of cylinder decrease. If the stiffness of the spring is too low, the valve can not be closed rapidly and the inverse flow of air can take place. So, the optimum stiffness of valve spring is very important and it will be very helpful that the stiffness of wave washer springs to be used in suction and exhaust valves can be calculated in design stage of air compressor.

In this paper the formula for calculating the spring constant of wave washer spring is introduced using bending and torsion theory of frames. The experiments are also carried out to measure the spring constants of several samples. It is proven that the calculated spring constants of wave washer springs are coincided well with measured values and that the formula presented in this paper for calculating the spring constants of wave washer spring is very useful for design of valves used in reciprocating air compressor.

## 1. 서 론

왕복식 공기 압축기의 흡입 밸브와 토출밸브에

많이 사용되는 웨이브 와셔 스프링(Wave washer spring)은 밸브 본체(Valve proper)가 확실하게 닫혀서 난 리턴 밸브(Non - return valve)로써의 역

\* 정회원, 부산공업대학교

\*\* 정회원, 한국해양대학교

활을 보장하는데에 꼭 필요한 기계 부품 중의 하나이다. 이 스프링의 강성이 너무 높으면 밸브가 열리는데 필요한 압력 차가 커서 공기 압축기의 용적 효율이 떨어지고 밸브 시트에 걸리는 충격 하중이 커서 시트의 수명이 단축된다. 또한 이 스프링의 강성이 너무 낮으면 스프링이 밸브 본체의 관성력을 제대로 감당하지 못하여 밸브가 빨리 닫히지 않기 때문에 흡입 밸브의 경우 공기 압축기의 피스톤이 상승하기 시작하면서 실린더 내의 흡입 가스가 역류하여 빠져나가는 일이 생기므로 공기 압축기의 효율이 떨어지고 토출밸브의 경우 공기 압축기의 피스톤이 하강하기 시작할 때 토출측의 압축 공기가 실린더 내로 역류하여 들어오는 일이 생기게 되어 효율이 또한 떨어진다. 즉 밸브가 열리는 순간에는 밸브스프링의 강성이 되도록 작아야 하나, 밸브가 닫히는 순간에는 밸브 스프링의 강성이 되도록 커야 하는 상충된 요구 사항에 직면하게 된다.

최근에 왕복식 공기 압축기가 전동기 직결식으로 됨에 따라 분당 회전수가 높으므로 밸브의 개폐가 확실하고 신속하게 이루어 질 것이 요구되고 있다. 그러므로 밸브 스프링의 최적 강성치가 중요하게 되었고 설계 단계에서 이 스프링의 강성치 과악이 필요하게 되었다.

웨이브 와셔 스프링은 유체의 밸브에서 뿐만이 아니고 다판식 클러치와 같은 축대칭 회전체에서 회전 요소의 간격 조정용으로도 널리 쓰이고 있는 중요한 기계 부품들 중의 하나이다. 여기서 쓰이는 웨이브 와셔 스프링의 강성치는 회전 요소의 축방향 이동시 마찰력과 관성력에 결정적인 영향을 준다. 그러므로 웨이브 와셔 스프링의 강성치를 계산할 수 있는 공식을 구하여 놓으면 이 스프링의 설계에 매우 유익할 것이다.

본 연구에서는 프레임의 굽힘 및 비틀림 이론을 써서 웨이브 와셔 스프링의 강성치 계산 공식을 유도하여 제시하였다. 또한 여기서 유도하여 제시한 계산 공식의 신뢰성을 검증하기 위하여 수개의 웨이브 와셔 스프링에 대하여 스프링 상수를 측정하는 실험을 실시하였다. 실험을 위하여 소정의 스프링에 몇 가지 하중을 가하고 각 하중에 대한 변위를 계측하여 구해 낸 몇 가지 스프링 상수를 평균

내는 방식을 채택하였다. 이렇게 하여 구한 스프링 상수를 계산 공식에 의한 스프링 상수와 비교 검토하였다.

## 2. 스프링 상수 계산식

Fig. 1은 웨이브 와셔 스프링의 일례로서 웨이브 수가 3인 것을 나타낸다. 지금 그림에 나타내어 보인 바와 같이 평균 반경을  $R$ , 폭을  $b$ , 두께를  $t$ 라고 하고 스프링의 자유 길이를  $H$ 라 한다. 스프링의 자유 길이  $H$ 와 폭  $b$ 가 평균 반경  $R$ 에 비하여 작다고 하면 이 스프링은 프레임 구조로 간주할 수 있으므로 프레임의 굽힘과 비틀림 이론을 써서 스프링 상수  $k$ 를 유도해 내려고 한다. 웨이브의 수는 2에서부터 무수히 많은 것에 이르기까지 다양하므로 웨이브 수가 2인 것부터 스프링 상수를 구하여 보면 다음과 같다.

### 2. 1 웨이브 수 2인 웨이브 와셔 스프링

Fig. 2(a)에서 보인 바와 같이 점 A와 B는 마루이고 점 C와 D는 골이다. 마루 A와 B에 각각  $P$ 라는 하중이 지면에 수직하게 작용한다고 할 때 그 반력은 골 C점과 D점에서 받고 이 때 C점과 D점

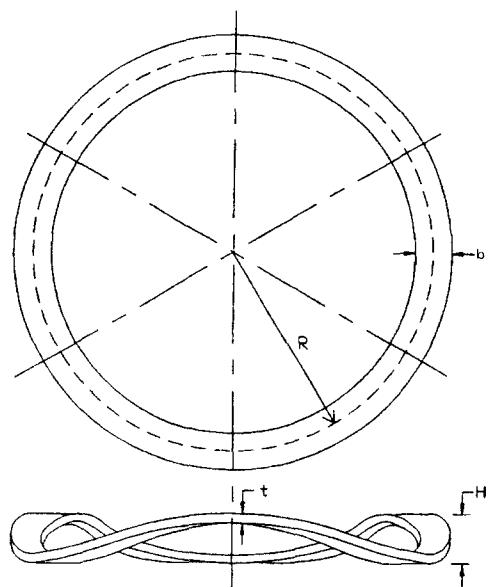


Fig. 1 Wave washer spring with 3 waves

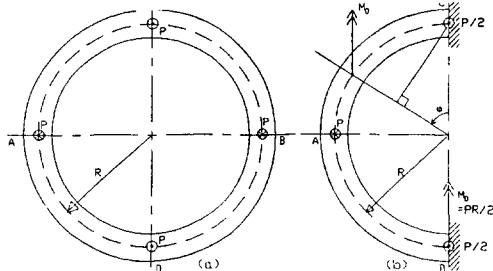


Fig. 2 Acting forces on wave washer spring with 2 waves

의 굽힘 moment는 각각  $M_0=PR/2$ 이다. 지금 이 스프링은 좌우 대칭이므로 Fig. 2(b)에 보인 바와 같이 C, D점을 고정단이라고 간주할 수 있고 따라서 한 쪽만을 고려하여 하중  $P$ 에 의한 A 점의 처짐을 구하여 보자.

Fig. 2(b)에서 C점과 D점의 반작용 moment는  $M_0=PR/2$ 이고 반력은  $P/2$ 인데, C점에서 반시계 방향으로 중심각  $\varphi$ 만큼 각변위한 점의 굽힘 moment  $M$ 과 비틀림 torque  $T$ 는 다음과 같다.

$$M = \frac{PR}{2}(\sin \varphi - \cos \varphi) \quad (1)$$

$$T = \frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi - \sin \varphi) \quad (2)$$

이 굽힘 moment  $M$ 과 비틀림 torque  $T$ 에 의한 탄성 변형 에너지  $U$ 는

$$U = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} Rd\varphi + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{T^2}{2GJ} Rd\varphi \quad (3)$$

이 되는데 여기서  $EI$ 는 굽힘강성계수이고  $G$ 는 재료의 전단탄성계수이다.  $J$ 는  $J=\beta bt^3$ 으로 직사각형 단면의 봉재를 비틀 때 단위 길이당의 비틀림 각을 계산할 때 사용되는 계수인데, 직사각형 단면의 장변  $b$ 와 단변  $t$ 의 비에 따라  $\beta$ 를 Table. 1에서 취하여 계산하면 된다.

Castigliano의 정리에 의하여 A점의 처짐  $\delta$ 는

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} Rd\varphi + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P} Rd\varphi \quad (4)$$

가 되고 식 (1), (2)에서

Table. 1  $\beta$  Values

$b/t$	$\beta$	$b/t$	$\beta$
1.00	0.141	4.00	0.281
1.50	0.196	6.00	0.299
1.75	0.214	8.00	0.307
2.00	0.229	10.00	0.313
2.50	0.249	$\infty$	0.333
3.00	0.263		

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{R}{2}(\sin \varphi - \cos \varphi) \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{R}{2}(1 - \cos \varphi - \sin \varphi) \quad (6)$$

이므로 식 (1), (2)와 이들을 식 (4)에 대입하여 정리하면  $\delta$ 는 다음과 같다.

$$\delta = PR^3 \left( \frac{0.2854}{EI} + \frac{0.0708}{GJ} \right) \quad (7)$$

그러므로 웨이브 수 2인 웨이브 와셔 스프링의 스프링 상수  $k$ 는

$$k = \frac{2P}{\delta} = \frac{1}{R^3 \left( \frac{0.1427}{EI} + \frac{0.0354}{GJ} \right)} \quad (8)$$

과 같다.

## 2.2 웨이브 수 3인 웨이브 와셔 스프링

Fig. 3(a)에서 A, C, E점은 마루이고 B, D, F점은 골이다. 지금 마루 A, C, E에서 누르는 힘이  $P$ 라고 할 때 그 반력은 골 B, D, F에서 받고 B, D, F

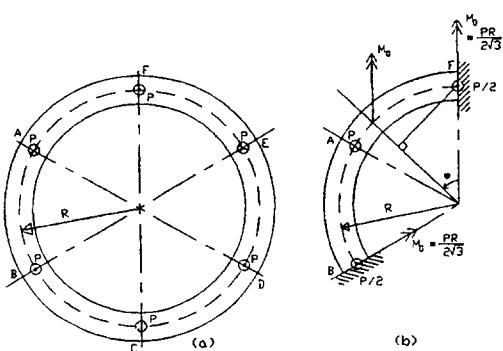


Fig. 3 Acting forces on wave washer spring with 3 waves

점의 굽힘 moment는  $M_0 = PR/(2\sqrt{3})$ 이 된다. Fig. 3(b)에서 보인 바와 같이 B점과 F점을 고정단이라 간주하고 A점에서 P라는 하중이 지면과 수직하게 작용할 때 이 점의 처짐  $\delta$ 를 구하여 보자.

고정단 B점과 F점에서의 반작용 moment는 전술한 바와 같이  $M_0 = PR/(2\sqrt{3})$ 이 되고 반력은  $P/2$ 가 된다. F점에서 반시계 방향으로 중심각  $\phi$ 만큼 각변위한 점의 굽힘 moment  $M$ 과 비틀림 torque  $T$ 는 다음과 같다.

$$M = \frac{PR}{2} \left( \sin \phi - \frac{\cos \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (9)$$

$$T = \frac{PR}{2} \left( 1 - \cos \phi - \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (10)$$

또한 탄성변형에너지  $U$ 는

$$U = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{M^2}{2EI} Rd\phi + 2 \int_0^{\pi/3} \frac{T^2}{2GJ} Rd\phi \quad (11)$$

이 되고 A점의 처짐은

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} Rd\phi + 2 \int_0^{\pi/3} \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P} Rd\phi \quad (12)$$

가 된다.

식 (9), (10)을 식 (12)에 대입하여 계산하면

$$\delta = PR^3 \left( \frac{0.0603907}{EI} + \frac{0.00663922}{GJ} \right) \quad (13)$$

을 얻을 수 있고 스프링상수  $k$ 는

$$k = \frac{3P}{\delta} = \frac{1}{R^3 \left( \frac{0.02013}{EI} + \frac{0.002213}{GJ} \right)} \quad (14)$$

가 된다.

### 2.3 웨이브 수 4인 웨이브 와셔 스프링

이상과 같은 요령으로 웨이브 수 4인 웨이브 와셔 스프링의 스프링상수  $k$ 를 구하면 다음과 같다.

$$k = \frac{4P}{\delta} = \frac{1}{R^3 \left( \frac{0.005733}{EI} + \frac{0.0003541}{GJ} \right)} \quad (15)$$

### 2.4 일반적인 경우(웨이브 수 $N$ 인 웨이브 와셔 스프링)

일반적으로 웨이브 수를  $N$ 이라 하면 Fig. 4에서 보인 바와 같이 어느 한 골에서 다음 골 까지의 중심각은  $2\pi/N$ 가 되고 골에서 마루까지의 중심각은  $\pi/N$ 가 된다. Fig. 4에 나타낸 바와 같이 A점은 마루이고 B점과 C점은 골이다. 지금 이 그림에서 보인 바와 같이 B점과 C점을 고정단이라 간주하고 A점에서 P라는 하중이 지면에 수직하게 작용할 때 이 점의 처짐  $\delta$ 를 구하여 보자.

고정단 B점과 C점의 반력은  $P/2$ 가 되고 평형조건을 이용하여 이 점들의 굽힘 moment  $M_0$ 를 구하면

$$M_0 = \frac{PR}{2} \tan \frac{\pi}{2N} \quad (16)$$

이 된다.

B점에서 반시계 방향으로 중심각  $\phi$ 만큼 각변위한 점의 굽힘 moment  $M$ 과 비틀림 torque  $T$ 는 다음과 같다.

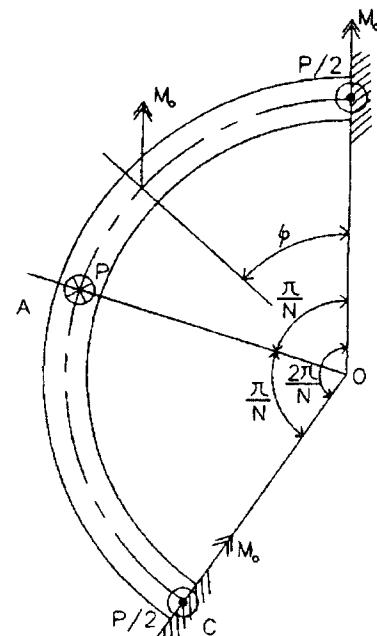


Fig. 4 One cycle of wave washer spring with  $N$  waves

$$M = \frac{PR}{2} (\sin \varphi - \tan \frac{\pi}{2N} \cos \varphi) \quad (17)$$

$$T = \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi - \tan \frac{\pi}{2N} \sin \varphi) \quad (18)$$

탄성변형에너지  $U$ 는

$$U = 2 \int_0^{\pi/N} \frac{M^2}{2EI} Rd\varphi + 2 \int_0^{\pi/N} \frac{T^2}{2GJ} Rd\varphi \quad (19)$$

이 고 Castigliano의 정리에 의하여 A점의 처짐  $\delta$ 는

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{\pi/N} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} Rd\varphi + 2 \int_0^{\pi/N} \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P} Rd\varphi \quad (20)$$

이 된다. 한편 식 (17)과 (18)로부터

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{R}{2} (\sin \varphi - \tan \frac{\pi}{2N} \cos \varphi) \quad (21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{R}{2} (1 - \cos \varphi - \tan \frac{\pi}{2N} \sin \varphi) \quad (22)$$

가 되므로 이들과 식 (17), (18)을 식 (20)에 대입하여 계산하므로써 처짐  $\delta$ 를 구할 수 있다.

$$\delta = PR^3 \left( \frac{S_{1N}}{EI} + \frac{S_{2N}}{GJ} \right) \quad (23)$$

단,

$$S_{1N} = \frac{\pi}{4N} (1 + \tan^2 \frac{\pi}{2N}) - \frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{N} (1 - \tan^2 \frac{\pi}{2N}) - \frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{2N} (1 - \cos \frac{2\pi}{N})$$

$$S_{2N} = \frac{\pi}{4N} (3 + \tan^2 \frac{\pi}{2N}) + \frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{N} (1 - \tan^2 \frac{\pi}{2N}) - \sin \frac{\pi}{N} - \tan \frac{\pi}{2N} (\frac{3}{4} - \cos \frac{\pi}{N} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{N})$$

계산의 편의상  $S_{1N}$ ,  $S_{2N}$ 을 계산하면 Table. 2와 같다.

식 (23)으로부터 스프링 상수를 계산하면 다음과 같다.

Table 2 The values  $S_{1N}$ ,  $S_{2N}$  and  $Q_{1N}$ ,  $Q_{2N}$

$N$	$S_{1N}$	$S_{2N}$	$Q_{1N}$	$Q_{2N}$
2	0.28539820E+00	0.70796339E-01	0.14269910E+00	0.35398170E-01
3	0.60390722E-01	0.66392232E-02	0.20130241E-01	0.22130744E-02
4	0.22931017E-01	0.14165345E-02	0.57327543E-02	0.35413362E-03
5	0.11203124E-01	0.44269181E-03	0.22406247E-02	0.88538362E-04
6	0.63232734E-02	0.17346826E-03	0.10538789E-02	0.28911376E-04
7	0.39230555E-02	0.79056022E-04	0.56043650E-03	0.11293717E-04
8	0.26029827E-02	0.40155929E-04	0.32537283E-03	0.50194912E-05
9	0.18161918E-02	0.22136142E-04	0.20179909E-03	0.24595713E-05
10	0.13178171E-02	0.13009381E-04	0.13178171E-03	0.13009381E-05
11	0.98667760E-03	0.80495902E-05	0.89697963E-04	0.73178093E-06
12	0.75799985E-03	0.51960952E-05	0.63166654E-04	0.43300793E-06
13	0.59497171E-03	0.34751188E-05	0.45767055E-04	0.26731683E-06
14	0.47559748E-03	0.23951638E-05	0.33971248E-04	0.17108313E-06
15	0.38617431E-03	0.16941268E-05	0.25744954E-04	0.11294179E-06
16	0.31785851E-03	0.12255569E-05	0.19866157E-04	0.76597304E-07
17	0.26476661E-03	0.90427477E-06	0.15574506E-04	0.53192633E-07
18	0.22287993E-03	0.67898031E-06	0.12382218E-04	0.37721128E-07
19	0.18938940E-03	0.51781721E-06	0.99678631E-05	0.27253537E-07
20	0.16229096E-03	0.40046042E-06	0.81145479E-05	0.20023021E-07

$$k = \frac{NP}{\delta} = \frac{1}{R^3 \left( \frac{Q_{1N}}{EI} + \frac{Q_{2N}}{GJ} \right)} \quad (24)$$

여기서  $Q_{1N} = S_{1N}/N^\circ$ 이고  $Q_{2N} = S_{2N}/N^\circ$ 이다.

Table. 2에  $Q_{1N}$ 과  $Q_{2N}$ 도 같이 계산하여 제시하였다.

### 3. 실험

전절에서 구한 웨이브 와셔 스프링의 스프링 상수 계산식의 신빙성을 검토해 보기 위하여, 웨이브 와셔 스프링의 몇 가지 샘플에 대하여 스프링 상수를 측정하고 전절에서 제시한 계산식의 계산결과와 비교하였다.

Table. 3은 스프링상수를 측정한 샘플의 기본 데이터를 나타낸다.

Photo. 1은 스프링상수 측정에 사용된 시험기계로(Fusi Seiki co. Ltd 제품) 마이크로 컴퓨터에 의하여 제어되는 시스템으로 구성되어 있다. 피 측정 스프링을 로오드 셀 위에 얹어 놓고 소정의 변위를 주었을 때의 하중을 로오드 셀로 검출하여 기록지

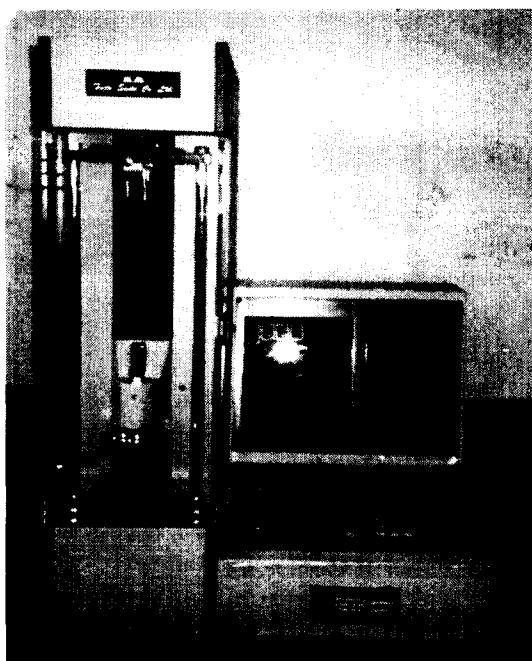


Photo. 1 Experimental apparatus

Table. 3 Basic data of samples

Item	Symbols	Sample 1	Sample 2
Number of waves	$N$	3	2
Average radius(mm)	$R$	54.1	36.5
Width(mm)	$b$	10.3	9.3
Thickness(mm)	$t$	0.4	0.4
Young's modulus(GPa)	$E$	200	200
Shear modulus(GPa)	$G$	77	77
Free length(mm)	$H$	6.8	5.8
Materials		SUP	SUP
Calculated spring constants(N/mm)	$k$	3.2172	1.2313

에 검출된 하중값을 찍도록 하였는데, 스프링을 압축하면서 측정하고 그 다음은 스프링을 해방(release)하면서 측정하여 그 두값을 평균하였다.

Fig. 5는 sample 1에 대하여 하중과 변위사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 측정치는 변위를 0.1mm씩 증가시켜가며 거기에 상응하는 하중을 찍도록하여 구한 것이고 계산치는 본 연구에서 제시한 계산공식을 써서 구한 스프링 상수( $k = 3.2172N/mm$ )에다 변위를 곱하여 구한 것이다.

Fig. 6은 sample 2에 대한 것을 나타낸 것이다. 이 그림들에서 보는 바와 같이 본 연구에서 제시한 스프링 상수계산공식을 써서 구한 하중과 변위 사이의 관계는 측정에 의한 실험치로부터 구한 것과 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 다만 측정치와 계산치 사이에 약간의 차이가 있으나 이는 실용상 무시할 만한 정도이고 또한 이 차이는 프레임이론의 한계이기도 하다.

### 4. 결론

기계 중요 부품들중의 하나로 그 역할이 까다로운 웨이브 와셔 스프링의 스프링상수를 계산하는 계산식을 유도하고, 몇 가지 샘플에 대하여 스프링상수를 측정한 값과 본 연구에서 제시한 계산식에 의하여 계산한 값을 비교, 검토하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 웨이브 와셔 스프링을 프레임으로 간주하고 프레임의 굽힘 이론과 비틀림 이론에 의한 탄성변

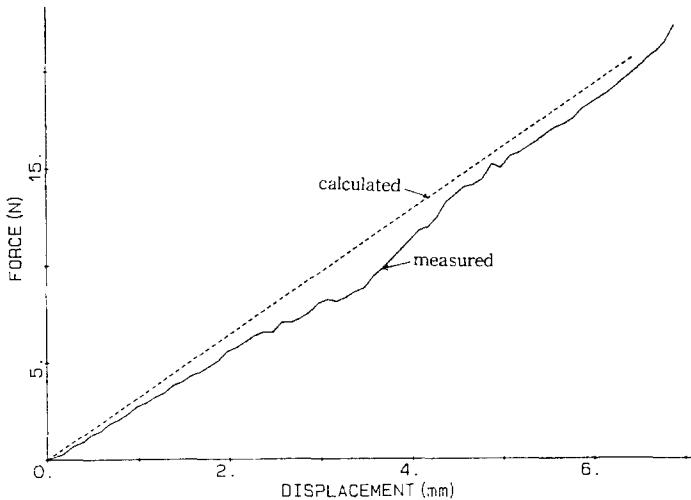


Fig. 5. Force - displacement relation for sample 1.

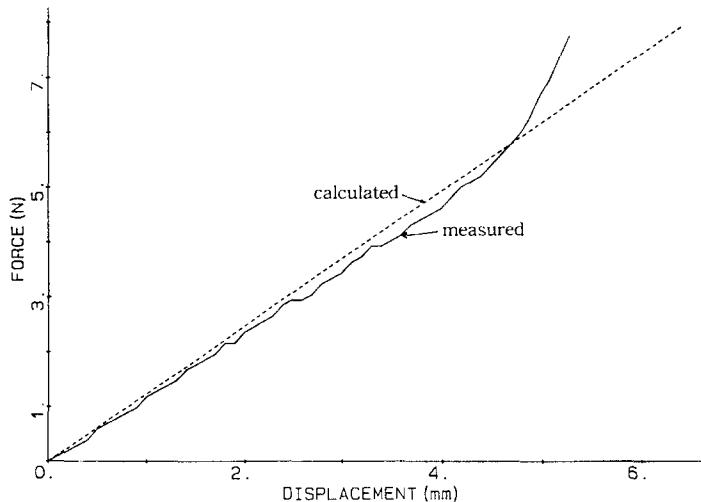


Fig. 6. Force - displacement relation for sample 2

형에너지를 구해냄으로서 소정의 하중에 대한 변위를 구할 수 있고 따라서 스프링 상수를 계산할 수 있다.

(2) 웨이브 와셔 스프링의 하중  $NP$ 에 의한 변위  $\delta$ 는 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\delta = PR^3 \left( \frac{S_{1N}}{EI} + \frac{S_{2N}}{GJ} \right)$$

(3) 웨이브 와셔 스프링의 스프링상수  $k$ 는 다음 식과 같다.

$$k = \frac{1}{R^3 \left( \frac{Q_{1N}}{EI} + \frac{Q_{2N}}{GJ} \right)}$$

(4) 본 연구에서 유도한 웨이브 와셔 스프링의 스프링상수 계산식은 실측치와 비교적 잘 일치하여 이 스프링의 설계에 유용하게 이용될 수 있다.

#### 참고문헌

1) M. F. Spotts, Mechanical Design Analysis,

- Prenssentice HALL MARUZEN, 1970, p. 90.
- 2) The following development an article by Bissohopp, K. E and Drucker, D. C., Quarterly of Applied Mathematics, 3(1945), p. 272.
- 3) Shames, Introduction to solid Mechanics, prentice HALL 1975 pp. 409 – 411.
- 4) 坂田勝, 固體力學, 朝倉, 1975, pp. 98 – 100.