

확률유한요소법을 이용한 균질 사면의 신뢰성 해석

The Reliability Analysis for Homogeneous Slope Stability Using Stochastic Finite Element Method

조 래 청*·도 덕 현**
Jo, Rae Cheong ·Doh, Duk Hyun

Summary

This study was performed to provide the design method for soil structure which guarantees proper safety with uncertainty of soil parameters.

For this purpose, the effect of uncertainty of soil parameters for slope stability was analyzed by Bishop's simplified method and Monte Carlo simulation(MC). And reliability analysis program, RESFEM, was developed by combining elastic theory, MC, FEM, SFEM, and reliability, which can consider uncertainty of soil parameters.

For factor of safety(FS) 1.0 and 1.2 by Bishop's simplified method, the probability of failure(Pf) was analyzed with varying coefficient of variation(c.o.v.) of soil parameters. The Pf increased as c.o.v. of soil parameters increased. This implies that FS is not the absolute index of slope safety, and even if FS is same, it has different Pf according to c.o.v. of soil parameters.

The RESFEM was able to express the Pf at each element in slope quantitatively according to uncertainty of soil parameters. The variation of Pf with uncertainty of soil parameters was analyzed by RESFEM, and it was shown that the Pf increased as the c.o.v. of soil parameters increased.

I. 서 론

인류는 오래전부터 안전한 구조물의 건설을 위하여 계속적인 노력을 해 오고 있다. 구조물의 안정성 문제는 시대 및 분야를 불문하고

건설기술자들에게 가장 중요한 문제이며¹⁰⁾ 궁극적인 목표는 경제적이고 기능적으로 신뢰성 있는 구조물을 설계·시공하는 것이다²⁹⁾.

구조물을 설계할 때는 안정성과 경제성 등의 모든 사항을 고려해야 한다. 구조물에 대

* 농림부 농촌개발국
** 건국대학교 농과대학

키워드 : FOSM, Monte Carlo Simulation, 사면안정, 확률유한요소법, 신뢰성, 파괴확률

한 하중조건, 구조형식의 다양성, 내구기간 등의 특수성과 그 규모의 정도에 따라 파괴시 사회적, 경제적 손실의 크기가 달라지므로, 안정성의 추구는 경제성의 확보와 직접 관계된다고 할 수 있다. 그러나, 현재 일반적으로 사용되고 있는 결정론적 구조물의 안정성 평가는 구조물이 필연적으로 가지게 되는 재료의 강도와 하중의 편차, 설계조건 등에 대한 해석상의 오차, 시공상의 오차 등 많은 불확정 요인을 무시하고 있기 때문에 비현실적이라고 할 수 있다. 따라서, 좀 더 현실에 가까운 구조물의 해석을 위해서는 이들 불확정 요인의 영향을 정량적으로 파악하여 그 영향을 고려한 안정성 평가를 하여야 한다^{11,15)}.

현재까지의 결정론적인 접근방법에서는 설계 또는 안정성 검토에 안전율을 적용함으로써 재료, 하중 등의 불확정성을 어느 정도 고려하고 있으나, 이는 경험에 의한 수치일 뿐 정확한 안전의 척도라고 할 수는 없다^{4,15,28)}.

따라서, 보다 정확한 구조물의 평가를 위하여는 확률론적 접근방법을 도입하여 구조물의 안정성에 영향을 주는 설계변수들의 불확정성을 합리적으로 고려하므로써 달성할 수 있다^{16,30,31)}.

신뢰성 해석은 구조물해석에 있어 해석자료의 불확정 요인을 취급할 수 있고, 구조물의 각 파괴모드를 파괴확률을 이용하여 정량적으로 평가할 수 있으며, 안정성의 여유를 파괴확률로 규정해서 설계하기 때문에 동일형식으로 만들어진 구조물에 대해서는 통일된 안정성 수준을 갖는 설계가 가능한 점 등의 이점이 있다¹⁴⁾.

가장 기본적인 확률론적 수치해석법의 하나로써 Monte Carlo 모사법이 주로 이용되고 있다^{6,13,19,24)}. 이는 임의의 분포를 갖는 난수를 발생시켜 하중과 저항의 확률적인 특성을 구하는 방법으로 어떤 문제든 쉽게 적용할 수 있기는 하나, 많은 계산량과 처리시간이

필요하게 되는 단점이 있다^{4,12)}. 따라서, 복잡한 구조물에 대해서 충분한 계산량을 얻기 위하여 많은 횟수를 반복한다는 것은 매우 어려운 일이다¹³⁾.

이에 반하여 1970년대 중반 이후부터 시도된 확률론적 유한요소법은 구조해석을 단 한번만 수행함으로써 결과치의 분산정도를 알 수 있으므로 복잡한 구조물의 신뢰성 해석에 적합한 방법이라 하였다⁴⁾.

사면에 대한 확률론적 해석은 토질재료의 분산성을 표현하기 위하여 토질에 대한 자료를 통계적으로 처리하는 통계학적 방법과 토질의 변동성에 따른 안정성을 확률변수로 취급하는 확률론적 방법으로 구분되며, 최근에는 확률론적 방법을 이용한 사면의 신뢰성 해석이 이루어지고 있다³⁵⁾.

확률론적 해석으로 Wu & Kraft³⁴⁾의 전응력 해석에 의한 정적, 동적 사면해석, Cornell²²⁾의 First order probability에 기초한 신뢰성 해석을 위한 일반해의 구성과 Catalan & Cornell²⁰⁾의 흙댐의 신뢰성을 level-crossing 문제로써 취급한 연구들이 있다.

Vanmarcke³¹⁾은 사면활동을 3차원 대수나선형으로 하여 활동면과 활동폭에 대한 파괴확률을 구하였다. Veneziano 등³²⁾은 3차원 사면해석에서 전단강도의 불확실성 문제를 취급하였으며, 전단강도의 분포가 사면의 신뢰성 해석에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

국내에서도 지반공학에 확률론을 도입한 예가 다수 있으며^{2,3,7,8)} 특히, 확률론에 의한 사면해석으로 鄭 등⁹⁾은 사면의 대수나선 파괴에 대하여 Monte Carlo 모사법을 이용하여 한계평형법의 안전율에 대한 파괴확률을 구하였고, 金¹⁾은 진행성 파괴에 대하여 확률론적 해석을 하였으며 또한, 徐 등⁵⁾은 사면의 대수나선형 파괴에 대하여 FOSM(First Order Second Moment), SOSM(Second Order Second Moment)을 이용하여 파괴확률을 구한

후 그 결과를 비교 분석하였다.

본 연구는 토질정수의 변동성이 사면의 안정에 미치는 영향을 Bishop의 간편법과 Monte Carlo 모사법을 이용하여 살펴보고, 토질재료의 변동성에 따라 적절한 안전도를 갖는 현실적인 성토구조물의 설계방법을 제공하기 위하여 확률론적 유한요소법을 기초로 한 사면의 신뢰성 해석 모델을 개발하고자 시도하였다.

II. 토질정수의 변동이 사면해석에 미치는 영향

결정론적인 사면의 해석에 이용하는 토질정수가 그 사면을 이루는 토질의 정확한 대표치가 아니고, 변동성을 지니고 있다는 것은 일반적으로 생각할 수 있으며, 이에 대한 연구 또한 많이 이루어진 바 있다^{25,27,28,34}).

흙 구조물 해석에 있어서 확률론의 도입은 토질정수의 변동성의 기본개념을 기초로 하고 있으며, 결정론적인 해석방법에서 안전율을 고려하는 것은 토질정수의 변동성에 의한 불확실성에 대하여 안정성을 확보하는데 있다고 할 수 있을 것이다.

그러나, 안전율이 절대적인 안전을 의미하는 것은 아니며 우연한 기회에 파괴가 일어날 가능성을 항상 내포하고 있다^{18,21,27,28}).

본 장에서는 토질정수의 변동이 사면해석에 미치는 영향을 분석하기 위하여 불확정적인 토질정수를 점착력, 내부마찰각, 단위체적중량으로 하여 Bishop의 간편법과 Monte Carlo 법을 이용하여 파괴확률을 구하였다.

1. 토질정수의 변동성을 도입한 사면 해석 프로그램 개발(BISMONT)

동일한 평균값을 갖는 토질로 이루어진 사면에 대해서 토질정수의 변동계수(coefficient of variation, σ/μ , σ 표준편차, μ : 평균)의 크

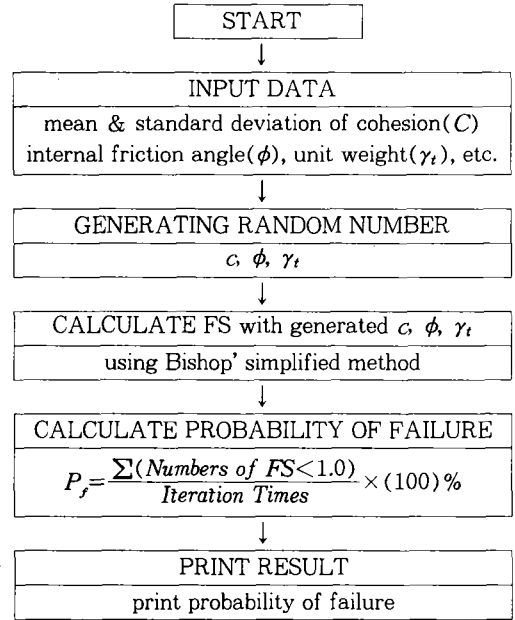


Fig. 1. Flow chart of BISMONT

기가 사면의 안정해석에 미치는 영향을 분석하기 위한 프로그램 BISMONT(Program for computing probability of failure using Bishop's simplified method and Monte Carlo simulation)를 작성하였다.

프로그램 BISMONT는 난수의 발생, 발생된 난수를 이용하여 Bishop의 간편법에 의한 안전율 계산, 파괴확률의 계산 부분으로 구성되어 있으며, 그 흐름도는 Fig. 1과 같다.

2. BISMONT의 적용

Fig. 2와 같은 단면에 대하여 안전율이 1.0이 되는 원호의 중심과 반경을 구하였으며, 구해진 원호의 중심은 $X=14.0m$, $Y=13.6m$, 반경 R 은 $13.6m$ 이었다.

점착력, 내부마찰각, 단위중량 각각의 변동계수(coefficient of variation)를 0.02와 0.2로 가정하여 토질정수 각각의 변동계수를 달리하여 파괴확률을 구하였고 또한, 동시에 3가지 토질정수의 변동계수를 달리하여 파괴확률을

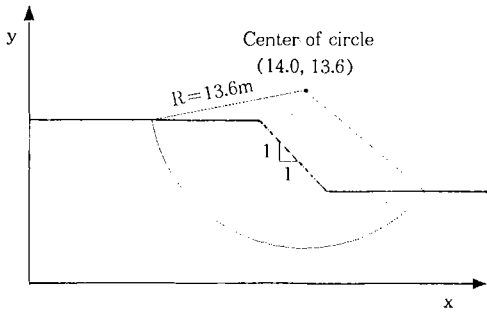


Fig. 2. Model slope and slip circle of FS 1.0

Table-1. Soil properties and results of computation by BISMONT, FS 1.0

Random variables	mean	standard deviation	c.o.v.	probability of failure	
				case	($P_{f(s, f < 1.0)}$), %
After 1×10^5 Times					
Cohesion (c , t/m ²)	0.5	0.010	0.02	1	47.253
		0.100	0.20	2	49.914
internal friction angle (ϕ , degree)	20	0.400	0.02	3	47.597
		4.000	0.20	4	49.792
unit weight (γ_t , t/m ³)	1.55	0.031	0.02	5	46.821
		0.310	0.20	6	49.444
c, ϕ, γ_t	0.5, 20, 1.55	all		7	48.182
		0.02			
c, ϕ, γ_t	0.5, 20, 1.55	all		8	47.667
		0.20			

주 : Iteration times of case 7, 8 : 1×10^6

구하였다.

본 해석에 사용한 토질정수와 그 해석결과는 Table-1과 같다.

Table-1에서 보는 바와 같이 동일 평균값에 대해서 토질정수 각각의 변동계수를 달리하였을 경우, 변동계수가 커질수록 파괴확률이 커지는 결과를 나타내었다.

토질정수 3가지 모두 변동성을 갖을 경우에는 변동계수 0.02일 때는 각각 변동성을 갖을 때보다는 파괴확률이 컸으나, 변동계수 0.2일 경우에는 각각 변동계수를 갖을 경우보다 다소 작게 나타났다.

이는 3가지의 난수로 발생되는 토질정수가 서로 보완되고 있기 때문이라고 생각된다.

일반적으로 사면해석에서 안전하다고 판단할 수 있는 안전율 1.2인 활동원을 구하고(중심 $X=14.0$, $Y=13.6$, 반경 $R=9.7$), 이 단면에 대해서 토질정수의 변동계수를 달리하여 파괴확률을 구한 결과는 Table-2와 같다.

Table-2의 CASE 1, 2, 3의 경우에 대하여 반복횟수에 대한 파괴확률의 수렴과정을 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 변동계수가 큰 경우 수렴하는 과정에서 초기의 진폭이 큰 것을 보여준다.

Table-2. Soil properties and results of computation by BISMONT, FS 1.2

CASE	soil parameters	MEAN	C.O.V.	Probability of failure
CASE 1	c	0.5	0.02	0.000
	ϕ	20		
	γ_t	1.55		
CASE 2	c	0.5	0.10	1.768
	ϕ	20		
	γ_t	1.55		
CASE 3	c	0.5	0.20	13.840
	ϕ	20		
	γ_t	1.55		

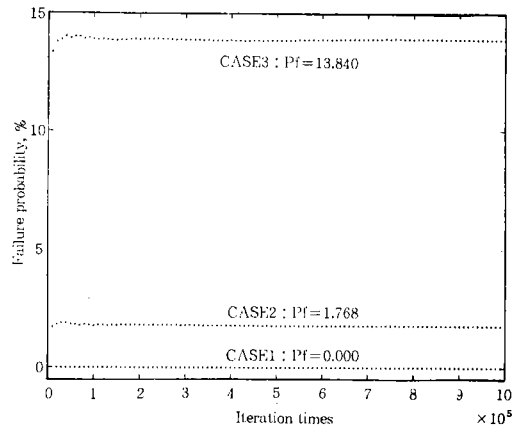


Fig. 3. Relationship between iteration times and probability of failure

Table-2의 결과와 같이 사면이 안전하다고 판단할 수 있는 안전율 1.2인 경우도 토질정수의 변동성이 커짐에 따라 파괴확률이 증가되었다.

안전율 1.0에 대한 마찰력, 점착력, 내부마찰각의 변동계수를 20%로 하였을 때의 파괴확률은 47~49%로 나타났으며, 이는 鄭⁸⁾의 연구에서 대수나선형 활동면에 대한 결과이기는 하나 토질정수의 변동계수를 10~30%로 하였을 때의 파괴확률 44~47%와 비슷한 결과를 나타내고 있다.

이상에서 보는 바와 같이 결정론적으로 표시되는 사면의 안전율은 확정치가 아니며 해석에 사용되는 토질정수의 변동계수의 크기에 따라 같은 안전율에서도 다른 크기의 파괴확률을 포함하고 있음을 확인할 수 있었다.

III. 사면의 신뢰성해석 모델(RESF-EM) 개발

1. 확률론적 유한요소법의 정식화

확률론적 유한요소법은 다음 식과 같은 유한요소해석 기본방정식으로부터 유도된다.

$$[K] \{U\} = \{R\} \dots \dots \dots (1)$$

식 (1)의 유한요소해석 기본방정식에서 강성매트릭스 $[K]$ 나 하중벡터 $\{R\}$ 이 확률변수 $X_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 으로 구성되어 있다면, 확률변수 X_i 는 결정론적 부분(Determinant part) X_i^m 와 확률론적 부분(Stochastic part) X_i^s 로 구성되며, 다음 식과 같이 표시할 수 있다.

$$X_i = X_i^m + X_i^s (i=1, 2, 3, \dots, n) \dots \dots (2)$$

가. 변위의 평균과 분산

식 (2)를 변위벡터에 대하여 Taylor 급수로 전개하여 1차항까지만을 취하면

$$\{U\} = \{U^m\} \sum_i^n \frac{\partial U}{\partial X_i} X_i^s \dots \dots \dots (3)$$

이고, 이에 대한 평균과 분산은

$$\text{평균 } \{\mu U\} = E\{U\} = \{U^m\} \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{분산 } [CU] = E\{(\{U\} - \{\mu U\})(\{U\}^T - \{\mu U\}^T)\} = \left[\left[\frac{\partial U}{\partial X} \right] [C_X] \left[\frac{\partial U}{\partial X} \right]^T \right] \dots (5)$$

가 되며, 분산 $[CU]$ 는 $\left[\frac{\partial U}{\partial X} \right]$ 를 구하는 문제가 된다. $\left[\frac{\partial U}{\partial X} \right]$ 를 구하기 위하여 식 (1)을 확률변수 X 로 미분하여 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$[K] \left\{ \frac{\partial U}{\partial X} \right\} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial X} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial X} \right] \{U\} \dots \dots \dots (6)$$

식 (6)에서 $[K]$ 와 $\{U\}$ 는 유한요소해석에 의해서 구하여지므로, $\left[\frac{\partial K}{\partial X} \right]$ 와 $\left\{ \frac{\partial R}{\partial X} \right\}$ 를 구하면 $\left\{ \frac{\partial U}{\partial X} \right\}$ 도 구할 수 있다.

$$\left[\frac{\partial K}{\partial X} \right] \text{와 } \left\{ \frac{\partial R}{\partial X} \right\} \text{를 구하는데 있어 강성매트릭스 } [K] \text{는 확률변수가 탄성계수 } E \text{ 또는 포아슨비 } \nu \text{일 경우만을 고려하고, 하중벡터 } \{R\} \text{은 확률변수가 하중 } R \text{일 경우만 고려되고, 그 외 확률변수에 대해서는 } 0 \text{가 된다.}$$

나. 응력의 평균과 분산

응력벡터 $\{S\}$ 의 평균과 분산은 변위로부터 응력을 구하는 식

$$\{S\} = [D] [B] \{U\} \dots \dots \dots (7)$$

로부터 구할 수 있다.

변위벡타의 평균과 분산을 구하는 식 (4), 식 (5)와 마찬가지로 응력벡타의 평균과 분산을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\text{평균 } \{\mu S\} = \{S\},$$

$$\text{분산 } \{CS\} = \left[\left[\frac{\partial S}{\partial X} \right] [C_X] \left[\frac{\partial S}{\partial X} \right]^T \right] \dots (8)$$

이 또한 $\left[\frac{\partial S}{\partial X} \right]$ 를 구하는 문제가 된다. 식

(7)을 확률변수로 미분하면

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial X} \right\} = \left[\frac{\partial D}{\partial X} \right] [B] \{U\} + [D] [B] \left\{ \frac{\partial U}{\partial X} \right\} \dots (9)$$

과 같이 된다.

따라서, $\left\{ \frac{\partial S}{\partial X} \right\}$ 는 앞에서 구한 $\left\{ \frac{\partial U}{\partial X} \right\}$ 를 이용하고, $\left[\frac{\partial D}{\partial X} \right]$ 를 조립함으로써 구할 수 있다.

1. 사면의 신뢰성 해석모델 개발

가. 신뢰성 해석의 기본이론

구조물이 하중 등 외력에 저항하는 능력을 X, 구조물을 파괴시키려는 외력을 Y라 하면 구조물의 파괴는 $X < Y$ 인 경우에 발생되며, 이 경우의 발생 가능성은 파괴확률, $P(X < Y)$ 로 표시할 수 있다.

X와 Y, 각각의 확률분포함수와 확률밀도함수 $F_X(x)$, $f_X(x)$ 와 $F_Y(y)$, $f_Y(y)$ 를 알고 있다고 가정하면 구조물이 파괴될 확률은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$p_F = P(X < Y) =$$

$$\sum_{all \ y} P(X < Y | Y=y) P(Y=y) \dots (10)$$

X와 Y가 서로 독립이라면 $P(X < Y | Y=y) = P(X < Y)$ 가 된다. 또, X와 Y가 연속분포이면

$$p_F = \int_0^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy$$

또는

$$p_F = \int_0^{\infty} [1.0 - F_Y(x)] f_X(x) dx \dots (11)$$

가 된다.

Fig. 4는 식 (11)을 그림으로 표시한 것으로 $f_X(x)$ 와 $f_Y(y)$ 의 중복되는 면적에 해당된다.

파괴확률을 나타내는 중복면적은 Fig. 5와 Fig. 6에서 보는 바와 같이 두 확률밀도함수 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 의 상대적 위치와 분산의 정도에

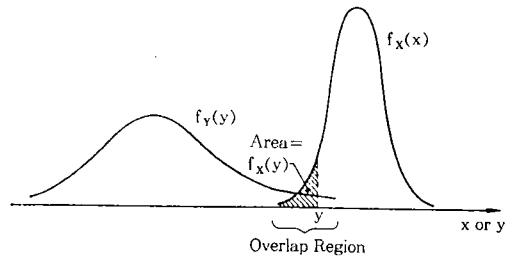


Fig. 4. Probability density function of the supply capacity X and the demand requirement Y

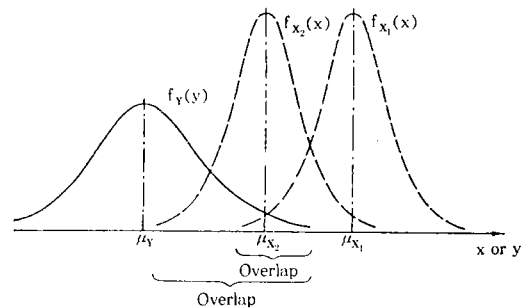


Fig. 5. Effect of relative positions between $f_X(x)$ and $f_Y(y)$ on p_F

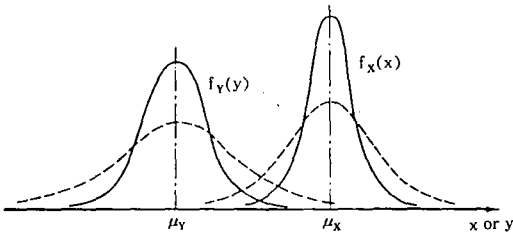


Fig. 6. Effect of dispersions in $f_x(x)$ and $f_y(y)$ on p_F

따라 크기가 달라진다.

나. First Order Second Moment(FOSM)

일반적으로 신뢰성 해석은 그 신뢰도의 표현 방법에 따라 3~4단계로 분류할 수 있으며, 확률변수의 표준편차로부터 구해지는 안정성 지수(safety index) 또는 신뢰성 지수(reliability index)에 의해서 신뢰확률 또는 파괴확률을 구하는 방법이 실용적인 면에서 널리 사용된다^{23,33}).

신뢰성 해석에 있어서는 해석에 사용되는 모든 확률변수들의 확률분포함수를 알아야 하는 어려움이 있다. 이러한 어려움을 해결하기 위하여 Cornell 등²²)은 하중과 저항의 평균과 표준편차를 이용하여 구한 신뢰지수에 의하여 파괴확률을 구하는 2차 모멘트법(Second Moment Method)을 제시하였다^{18,19}).

만약, 하중의 분포 P와 저항의 분포 R이 정규분포라면 안정성여유(Safety Margin, M)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있으며,

$$M = R - P \dots\dots\dots (12)$$

M 역시 정규분포이고, M의 평균과 표준편차는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\mu_M = \mu_R - \mu_P \quad \sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_P^2 \dots\dots\dots (13)$$

여기서 μ : 평균, σ : 표준편차
이 때의 안전확률은

$$P_s = P[M > 0] = 1 - F_M(0) \dots\dots\dots (14)$$

여기서 F_M : 누적분포함수
로 표시되며, 표준정규분포로 다음 식과 같이 변환함으로써

$$\begin{aligned} P_s &= 1 - F_M(0) = 1 - F_u\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) \\ &= F_u\left(\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = F_u(\beta) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

여기서 F_u : 표준정규분포의 누적분포
안전확률을 구할 수 있다. 여기서 β 는 신뢰성을 나타내는 신뢰지수라 한다.

FOSM은 신뢰성 해석방법중 위에서 설명한 2차 모멘트법에 해당하는 방법이다. 확률변수 X_i 가 비상관 정규분포인 경우, X_i 를 비상관 표준정규분포로 변환하면 다음 식과 같이 된다.

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \dots\dots (16)$$

또한, 식 (16)을 이용하면 확률변수 $X = \{X_1, \dots, X_2, X_n\}$ 에 대한 한계상태식은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$g(\sigma_{X_1} X'_1 + \mu_{X_1}, \sigma_{X_2} X'_2 + \mu_{X_2}, \dots,$$

$$\sigma_{X_n} X'_n + \mu_{X_n}) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

즉, 식 (17)의 한계상태식은 구조물의 안전 상태와 불안정상태의 경계를 의미하게 된다.

Fig. 7은 두 변수 X'_1, X'_2 에 대한 파괴면에 관한 한계상태를 나타내고 있는데 원점 O로부터 파괴면까지의 최소거리 D는 최소의 안전율을 의미하며 Lagrangian을 이용한 극

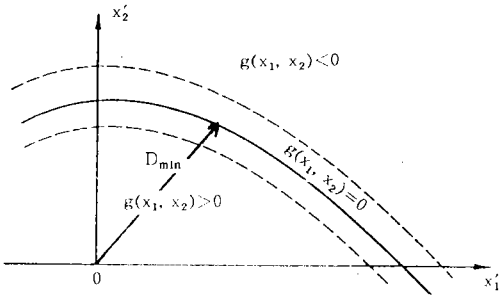


Fig. 7. Illustration of safe and failure states

치해로 전환할 수 있다.

임의의 확률변수를 가진 목적함수가 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 이고, 이때의 경계조건을 $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 이라 하면

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\sum X_i'^2} = D \tag{18}$$

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

이므로 Lagrangian 승수 λ 를 도입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = \sqrt{\sum X_i'^2} + \lambda g(X_i) \tag{19}$$

이므로 평균근방에서 한계상태식은 다음 식과 같이 된다.

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_{x_1} X_1' + \mu_{x_1}, \sigma_{x_2} X_2' + \mu_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n} X_n' + \mu_{x_n}) = g(X' \sigma_X) \tag{20}$$

식 (20)을 식 (19)에 대입하면

$$L = \sqrt{\sum X_i'^2} + \lambda g(\sigma_{x_1} X_1' + \mu_{x_1}, \sigma_{x_2} X_2' + \mu_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n} X_n' + \mu_{x_n}) \tag{21}$$

와 같이 표준정규분포 X_i' 함수로 나타낼 수 있다.

L 이 X_i' 에 관하여 극값을 가지기 위한 조건은 $\frac{\partial L}{\partial X_i'}$ 가 0이 되어야 하므로

$$\frac{\partial L}{\partial X_i'} = \frac{X_i'}{\sqrt{\sum X_i'^2}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X_i'} = 0 \tag{22}$$

로 나타낼 수 있으며, 식 (22)로부터

$$dX' = \frac{1}{\sigma_{X_i}} dX_i \text{ 또는 } \sigma_{X_i} = \frac{dX_i}{dX'} \tag{23}$$

이다. 한계상태식의 임의의 확률변수 X_i 에 대한 편미분은 다음과 같이 표준정규분포의 확률변수 X_i' 에 의한 편미분으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i'} \cdot \frac{dX_i}{dX_i'} = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \cdot \frac{\partial g}{\partial X_i'} \tag{24}$$

따라서 식 (22)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial X_i'} = \frac{\{X'\}}{D} + \lambda \{G\} = 0 \tag{25}$$

여기서 $D = \sqrt{\sum X_i'^2}$

$$\{G\}^T = \left\{ \sigma_{x_1} \frac{\partial g}{\partial X_1'}, \sigma_{x_2} \frac{\partial g}{\partial X_2'}, \dots, \sigma_{x_n} \frac{\partial g}{\partial X_n'} \right\}$$

$$\{X'\}^T = \{X_1', X_2', \dots, X_n'\}$$

그러므로

$$\{X'\} = -\lambda \{G\} D \tag{26}$$

가 된다. 식 (26)을 식 (18)의 D 에 대입하여 λ 를 구할 수 있다.

$$\lambda = (\{G\}^T \{G\})^{-1/2} \dots\dots\dots (27)$$

식 (27)을 식 (26)에 대입하고 양변의 앞에 $\{G\}^T$ 를 곱하면 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \{X'\} &= -(\{G\}^T \{G\})^{-1/2} \{G\} D \\ \{G\}^T \{X'\} &= -\{G\}^T (\{G\}^T \{G\})^{-1/2} \{G\} D \\ &= -(\{G\}^T \{G\})^{1/2} D \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

따라서, 파괴면까지의 최소거리 D 는 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$D_{\min} = -\frac{\{G\}^T \{X'\}}{(\{G\}^T \{G\})^{1/2}} \dots\dots\dots (29)$$

만약, 한계상태식 $g(X)$ 를 Taylor 급수로 전개하고, 1차항까지만을 취하면 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} g(X_1, X_2, \dots, X_n) &= g(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) \\ &+ \sum_i^n (X_i - X_i^0) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

식 (30)에서 $g(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$ 는 원점이므로 0이고, 식 (16)로부터 $X_i - X_i^0 = (\sigma_{X_i} X_i' + \mu_{X_i}) - (\sigma_{X_i} X_i^{0'} + \mu_{X_i}) = \sigma_{X_i} (X_i' - X_i^{0'})$ 이 되므로, 식 (24)를 이용하면 식 (30)은 다음 식과 같이 된다.

$$g(X) = \sum (X_i' - X_i^{0'}) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \dots\dots\dots (31)$$

한계상태식의 평균과 표준편차는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_g &= -\sum \sigma_{X_i} (X_i' - X_i^{0'}) \frac{1}{\sigma_{X_i}} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \\ &= -\sum X_i' \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\sigma_g = \left[\sum \left(\sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (33)$$

식 (33)에서 표준정규분포의 분산 $\sigma_{X_i}^2$ 는 1이므로 다음 식으로 된다.

$$\sigma_g = \left[\sum \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (34)$$

따라서, 신뢰지수 β 는 다음 식과 같이 표시된다.

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\sum X_i' \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2}} \dots\dots\dots (35)$$

즉, 앞에서 구한 D_{\min} 과 같게 된다. $\beta = D_{\min}$ 인 것을 FOSM이라 한다.

다. 사면해석을 위한 한계상태식

FOSM을 이용하여 구조물의 신뢰도 또는 파괴확률을 구하기 위하여는 그 구조물의 한계상태를 표시하는 한계상태 방정식이 필요하게 된다⁶⁾.

일반적으로 구조물의 한계상태식은

$$Z = R - S \dots\dots\dots (36)$$

와 같이 표시할 수 있다.

식 (36)에서 R은 구조물 임의의 점에서의 저항능력, S는 외력에 의해 발생하는 그 점에서의 응력으로 주어진다. Z는 안정성의 여유이다.

본 연구에서는 Mohr-Coulomb의 파괴규준식을 사용하였으며, Fig. 8에서 전단파괴의 안정성의 여유 Z는 Mohr원의 중심으로부터 파괴규준까지의 거리(τ_f)에서 Mohr의 응력원의 반경(τ)을 뺀 길이에 해당하며, Z가 0보다 작을 때 파괴가 일어난다.

Fig. 8에서와 같이 R과 S의 모멘트를 구하

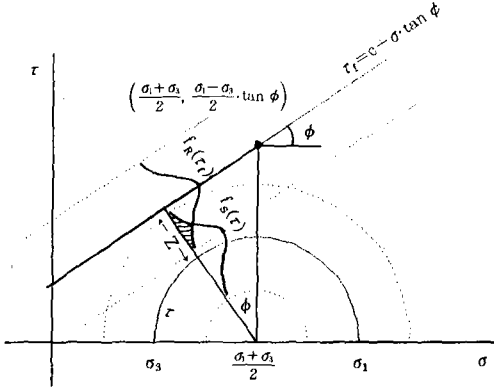


Fig. 8. Mohr-Coulomb's failure criteria

여, 확률밀도함수 $f_R(\tau_f)$ 와 $f_S(\tau)$ 를 알게 되면 두 확률밀도함수의 중복면적이 파괴확률이 된다.

식 (36)에서 R과 S는 Fig. 8에서 전단강도 τ_f 와 전단응력 τ 에 해당되며 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi, \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \dots\dots\dots (37)$$

- 여기서 c : 점착력,
- σ : Mohr 응력원의 중심점,
- ϕ : 내부마찰각
- σ_1, σ_3 : 최대, 최소 주응력

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

안정성의 여유 Z, 즉 한계상태식은 다음 식과 같이 나타낼 수 있으며,

$$Z = \tau_f \cdot \cos \phi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left\{ c + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \tan \phi \right\}$$

$$\cdot \cos \phi - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (38)$$

신뢰성 해석은 복잡한 구조가 대상이므로 여러가지 한계상태식이 필요하게 된다. 즉, Bishop의 간편법에서의 전단강도는 절편의 길이, 수평면과 절편 밑면이 이루는 각도 등이 변화됨에 따라 한계상태식이 변화하나, 유한요소해석을 사용하면 사면내 요소의 응력을 알 수 있으며, 사면내의 응력을 알고 있는 경우 한계상태식은 유일하게 된다.

라. 파괴확률의 계산

FOSM을 이용한 파괴확률을 구하기 위한 신뢰지수 β 는 다음 식과 같다.

$$\beta = \frac{R - P}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_P^2}} \quad \dots\dots\dots (39)$$

- 여기서 σ_R^2 : 전단강도 τ_f 의 분산,
- σ_P^2 : 최대전단응력 τ_{max} 의 분산
- 식 (39)의 신뢰지수를 이용하여 파괴확률 P_f 는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1.0 - \Phi(\beta) \quad \dots\dots\dots (40)$$

이 때, 식 (40)에서 $\Phi(\beta)$ 는 표준정규분포의 누적분포이므로 파괴확률을 구하기 위하여는 $\Phi(\beta)$ 를 구하여야 한다.

본 연구에서는 오차가 적은 Stegun의 방법²⁶⁾을 이용하였으며 그 식은 다음과 같다.

$$\Phi(\beta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} \left[\sum_{i=1}^5 b_i t^i + \epsilon(\beta) \right] \quad \dots\dots\dots (41)$$

- 여기서, $t = (1 + 0.2316419s)^{-1}$,
- $\epsilon(s) < 7.5 \times 10^{-8}$,
- $b_1 = 0.319381530$,
- $b_2 = -0.356563782$,
- $b_3 = 1.781477937$,

$$b_4 = -1.821255978,$$

$$b_5 = 1.330274429$$

마. 모델의 구성

FOSM을 이용하여 사면내 요소의 파괴확률을 구하기 위하여는 신뢰지수 β 를 구하여야 하는데, 먼저 한계상태식내에 포함되어 있는 변수들의 값을 구하여야 한다.

Table-3은 각 요소내의 응력점들의 신뢰지수를 구하여 파괴확률을 계산하는데 필요한 변수와 그것들의 계산방법을 정리한 것이다.

즉, 전단강도와 전단응력의 평균과 표준편차의 계산은 입력자료로서의 점착력(c), 내부마찰각(ϕ)과 확률 유한요소법에 의하여 구해지는 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 의 평균과 표준편차를 이용하여 Monte Carlo 모사에 의하여 구하였다.

단, 전단강도와 전단응력의 평균과 표준편차를 구하여 신뢰지수를 계산한 다음, 이 신뢰지수를 이용하여 누적분포함수를 Stegun의 방법에 의하여 구하여 파괴확률을 계산하였다.

본 연구에서 각 요소내의 응력점에서의 파괴확률을 구하기 위하여 작성한 신뢰성해석 프로그램 RESFEM(program for reliability analysis of Slope by Stochastic FEM)의 흐름도는 Fig. 9와 같다.

Table-3. Variables and their calculating method

Variables	Using Method for calculation
mean of σ_x, σ_y	Finite Element Method
standard deviation of σ_x, σ_y	Stochastic Finite Element
mean and standard deviation of c, ϕ	Input Data
mean and standard deviation of τ_f	Monte Carlo method - using mean and standard deviation of $c, \phi, \sigma_x, \sigma_y$ - iteration times : 3,000
mean and standard deviation of τ	Monte Carlo method - using mean and deviation of σ_x, σ_y

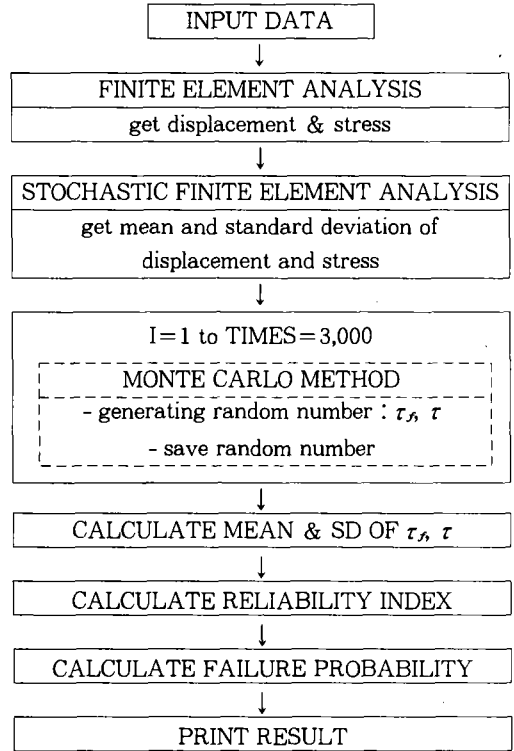


Fig. 9. Flow chart of RESFEM

프로그램 RESFEM(program for reliability analysis of Slope by Stochastic FEM)의 흐름도는 Fig. 9와 같다.

유한요소법으로부터 강성매트릭스 $[K]$, 변위 벡타 $\{U\}$, 응력 벡타 $\{S\}$ 를 구하고, 확률유한요소법에 의하여 확률변수 $\{X : E, R\}$ 에 대한 편미분 $\left[\frac{\partial K}{\partial E}\right], \left[\frac{\partial U}{\partial R}\right]$ 과 $\left[\frac{\partial S}{\partial E}\right]$ 를 구하여

응력벡타 $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ 의 표준편차를 구하였다.

안정성 여유의 하중항과 재료저항항의 평균과 표준편차는 Monte Carlo 모사에 의하여 구하였으며, 이를 이용하여 식(41)과 식(40)에 의해 누적분포와 파괴확률을 구하였다.

IV. 모델의 검증과 적용에

1. 모델의 검증

본 연구에서 개발한 신뢰성 해석 프로그램

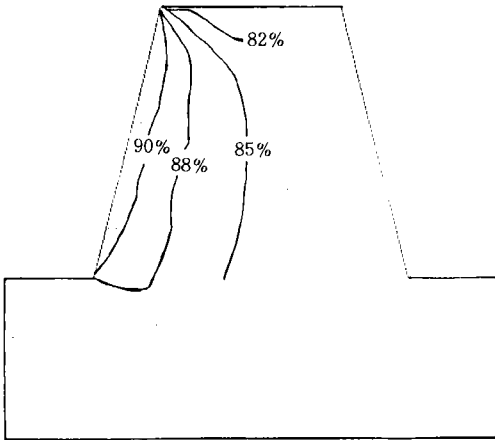


Fig. 10. Distribution of probability of failure by RESFEM

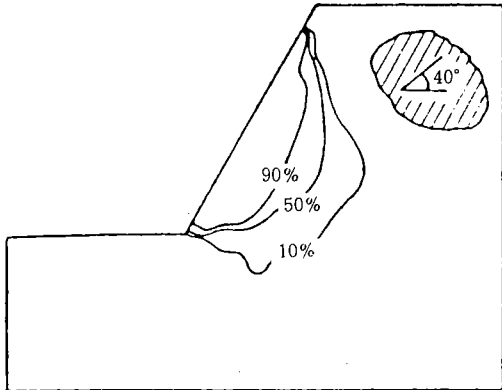


Fig. 11. Distribution of probability of failure from reference

RESFEM의 적정성의 검토는 문헌과 비교하였다.

Fig. 10은 RESFEM에 의하여 계산한 사면내 요소의 파괴확률 분포를 나타낸 것이며, Fig. 11는 土居¹⁷⁾의 연구결과를 나타낸 것이다.

Fig. 10에서 보는 바와 같이 사면내 요소의 파괴확률의 분포는 사면끝에서 가장 크게 나타나고, 사면내측으로 갈수록 적게 나타났는데, 이는 사면의 중앙부를 고정시켜 사면의 파괴확률을 구한 土居¹⁷⁾의 연구결과인 Fig. 11과 동일한 경향을 나타내었다.

RESFEM에 의하여 구한 파괴확률과 土居의 연구결과의 파괴확률이 사면 내측으로 갈수록 큰 차이를 보이고 있는데, 이는 사면중심부의 조건의 차이로 본 연구에서는 사면 중심의 수평, 수직변위를 자유로 하였으나, 土居의 연구에서는 Fig. 10의 중앙부의 우측을 안전 상태 즉, 파괴확률계산에서 제외함으로써, 이의 영향으로 파괴확률이 적게 나타난 것으로 판단된다.

2. RESFEM의 적용

RESFEM을 이용하여 토질정수의 변동성이 사면내 요소의 파괴확률에 미치는 영향을 분석하기 위하여, 같은 평균값을 갖는 토질정수들의 변동계수를 0.05, 0.1, 0.15, 0.20로 가정하여 사면내 요소의 파괴확률을 구하였다.

해석에 사용한 토질정수와 모델사면은 Table-4와 Fig. 12에 나타내었다.

Fig. 13에서 보는 바와 같이 변동계수의 크기에 따라 파괴확률의 크기가 다른 결과를 나

Table-4. Soil properties used reliability analysis

Soil parametes		CASE1	CASE2	CASE3	CASE4
Elasticity	Mean	2,000			
	Standard deviation	20			
	Coefficient of variation	0.01			
Poisson's ratio	Mean	0.30			
	Standard deviation	0.15	0.03	0.045	0.06
	Coefficient of variation	0.05	0.10	0.015	0.20
Cohesion (t/m ²)	Mean	0.5			
	Standard deviation	0.025	0.05	0.075	0.10
	Coefficient of variation	0.050	0.10	0.150	0.20
Internal friction angle (degree)	Mean	30			
	Standard deviation	0.15	0.03	4.50	6.00
	Coefficient of variation	0.05	0.10	0.15	0.20
	Unit weight (t/m ³)	Mean	1.85		
weight (t/m ³)	Standard deviation	0.0925	0.185	0.2775	0.37
	Coefficient of variation	0.050	0.100	0.1500	0.20

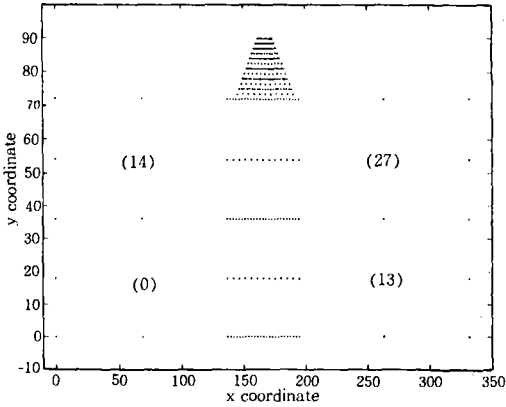


Fig. 12. Model slope for reliability analysis

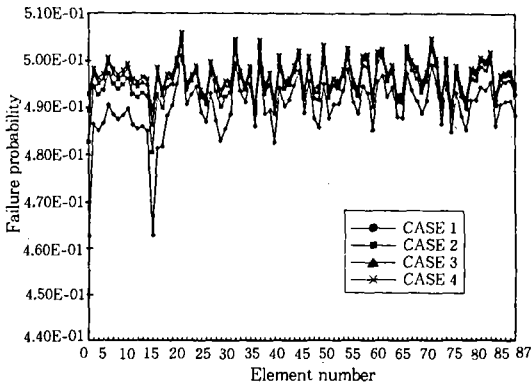


Fig. 13. Probability of failure of each element according to coefficient of variation

타내는 것을 알 수 있으며, 변동계수가 클수록 요소의 파괴확률도 크게 나타났다.

V. 결 론

본 연구는 토질재료의 변동성에 따라 적절한 안전도를 갖는 현실적인 성토구조물의 설계방법을 제공하기 위하여 수행하였다.

이를 위하여 Monte Carlo 모사법, Bishop의 간편법을 이용하여 토질정수의 변동성이 사면의 안정에 미치는 영향을 살펴보고, 토질정수의 변동성을 고려한 사면의 안정성 분석을 위

하여 확률유한요소법을 기초로 한 신뢰성 해석 모델을 개발하여 그 적용예를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Bishop의 간편법에 의한 안전율 1.0, 1.2인 원호에 대하여 토질정수의 변동계수를 달리하여 파괴확률을 구한 결과, 토질정수의 변동계수가 클수록 파괴확률도 커졌다. 이로 부터 결정론적 방법으로 해석한 사면의 안전율은 사면의 안정성을 나타내는 절대치가 아니며, 동일한 안전율이라도 토질정수의 변동성에 따라 다른 크기의 파괴확률을 포함하고 있음을 알 수 있었다.

2. 탄성론, Monte Carlo 모사, SFEM, FOSM 법을 결합하여 토질정수의 변동성을 고려할 수 있는 신뢰론적 사면해석 프로그램 RESFEM을 개발하였으며, RESFEM을 이용하여 토질재료의 변동성에 따라 사면내 요소의 파괴 가능성을 파괴확률에 의하여 정량적으로 표시할 수 있었다.

3. RESFEM을 이용하여 토질정수의 변동계수를 달리하여 사면내 요소의 파괴확률을 계산한 결과, 토질정수의 변동계수가 클수록 파괴확률도 크게 나타났다.

4. 본 연구에서 개발한 RESFEM은 사면해석에 확률유한요소법을 이용한 신뢰성 해석의 도입의 기초를 마련하는 단계로 사면의 조건을 단순화 하였으나, 보다 현실적인 사면해석을 위하여 토질의 비선형성, 비균질성, 사면내의 물의 침투 등의 해석조건을 추가로 포함하여야 할 것이며 또한, RESFEM은 사면내 요소의 파괴확률만을 얻을 수 있으나 사면전체의 파괴확률을 정량적으로 표현할 수 있는 방법에 대한 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. 金泳壽, 1988, "Probabilistic Analysis of Slope Stability for Progressive Failure", 大

- 韓土質工學會誌, 第4卷 第2號, pp. 5-14.
2. 金龍弼, 林炳祚, 1986, “單一型 舉動函數에 의한 얇은 基礎의 信賴度 解析”, 大韓土質工學會誌, 第2卷 第1號, pp. 27-44.
3. 金龍弼, 林炳祚, 1986, “有相關 破壞類型에 의한 얇은 基礎의 信賴度 解析”, 大韓土質工學會誌, 第2卷 第3號, pp. 67-75.
4. 김지호, 1991, “확률유한요소법에 의한 구조 신뢰성 해석”, 서울대학교 박사학위논문.
5. 서인식, 김영수, 1994, “對數螺線破壞에 대한 確率論的 3次元 斜面安定解析”, 韓國地盤工學會誌, 第10卷 第2號, pp. 121-137.
6. 李政宰, 1992, “段階別 塑性解析 技法을 이용한 峽대構造의 信賴性 모델 開發”, 서울大學校 博士學位 論文.
7. 정두영, 오병현, 1993, “얇은기초 침하의 확률론적 해석”, 韓國地盤工學會, 第9卷 第3號, pp. 77 -87.
8. 鄭聖寬, 1986, “斜면의 對數螺線破壞에 대한 確率論的 解析”, 慶北大學校 博士學位 論文.
9. 鄭聖寬, 權武男, 1988, “荷重의 分散性을 고려한 對數螺線斜면의 確率論的 解析”, 大韓土質工學會誌, 第4卷 第4號, pp. 39-49.
10. 高岡宣善, 1976, “構造物의 設計·安全性·信賴性”, 土木學會誌 61卷 3號, pp. 33-41.
11. 白石成人, 古田均, 中野正則, 1980, “安全性 指標의 信賴性解析への適用に關する2,3의 考察”, 土木學會論文集, 第301號, pp. 13-22.
12. 鈴木 誠, 1985, “確率有限要素法による斜面安定解析”, 土木學會論文集 第364號 III-4. pp. 199-208.
13. 鈴木 誠, 1986, “確率有限要素法による護岸의 信賴性設計의 試み”, 土木學會論文集, 第376號, pp. 49-58.
14. 星谷勝, 石井清, 1993, “構造物의 信賴性設計法”, 魔島出版會.
15. 伊藤 學, 1975, “構造設計における安全性의 規範”, 土木學會誌, 第60卷 第10號, pp. 35-43.
16. 辰己 安良, 1984, “確率有限要素法による防波堤의 信賴性 解析”, 第19回 土質工學研究發表會, pp. 897-900.
17. 土居康成, 1983, “有限要素法による斜面의 信賴性解析”, 土木學會論文集, 第330號, pp. 87-97.
18. Ang, A. H-S., & C. A. Cornell, 1974, “Reliability Bases of Structural Safety and Design”, ASCE, Vol. 100, No. ST9, pp. 1755-1769.
19. Ang, A. H-S. & W. H. Tang, 1984, “Probability Concepts In Engineering Planning and Design”, John Wiley & Sons, Vol. 2.
20. Catalan, J. M., & C. A. Cornell, 1970, “Earth slope reliability : a level - crossing approach”, ASCE Vol. 96, No. GT6, pp. 591-604.
21. Chandrupatla, T. R. & D. B. Ashoh, 1991, “Introduction to Finite Element in Engineering”, Prentice-Hall, International Editions.
22. Cornell, C. A., 1971, “First-order Uncertainty Analysis of Soils Deformation and Stability”, Proc. 1st Int. Conf. Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Hong Kong, pp. 130-143.
23. Corotis, R. B., 1985, “Probability based design codes of concrete”, Internatioal Apr., pp. 42-49
24. Lee, J. Y., 1984, “A Preliminary Study on Stochastic Finite Element Method”, Cornell University.
25. Lumb, P., 1966, “The variability of natural soils”, Canadian Geotechnical Journal 3, No. 2, pp. 74-97.
26. Melchers, R. E., 1987, “Structural Reliabil-

- ity”, John Wiley & Sons.
27. Meyerhof, G. G., 1971, “Safety Factor in Soil Mechanics”, Canadian Geotechnical Journal 7, No. 4, pp. 349-354.
 28. Tang, W. H., M. S. Yucemen & A. H-S. Ang, 1976, “Probability-based Short Term Design of Soil Slopes”, Canadian Geotechnical Journal 13, pp. 201-215.
 29. The task committee on structural safety of administrative committee on analysis and design of the structural division, 1972, “Structural safety-A Literature Review”, ASCE, Vol. 98. No. ST4, pp. 845-884
 30. Vanmarcke, E. H., 1977, “Probabilistic Modelling of Soil Profiles”, ASCE, Vol. 103 No. GT11, pp. 1227-1246.
 31. Vanmarcke, E. H., 1977, “Reliability of Earth Slopes”, ASCE, Vol. 103, No. GT11, pp. 1247-1265.
 32. Veneziano, D. & J. Antoniano, 1979, “Reliability analysis of slopes : Frequency-Domain Method”, ASCE Vol. 105, No. GT12, pp. 165-182.
 33. Wet, M. D. & F. Hugo, 1988, “Technical Note on Practical Applications : Evaluating The Design of an Earth Dam by Finite Element Analysis”, International Jour. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 12, pp. 573-578.
 34. Wu, T. H. & L. M. Kraft, 1970, “Safety Analysis of Slopes”, ASCE, Vol. 96, No. SM2, pp. 609-630.
 35. Yong, R. N., E. Alonso, M. M. Taba & P. B. Fransham, 1977, “Application of risk analysis to the prediction of slope instability”, Canadian Geotechnical Journal 14, pp. 540-553.