韓國軍事運營分析學會誌
第 22 卷, 第 2 號, 1996. 12. 31

다수 미사일의 공격에 대한 복합취약 표적의 생존확률에 대한 연구
(A Study on a Method for Computing the Kill/Survival Probability of Vulnerable Target)

황 홍 석*

Abstract

In this paper, the problem of determining the probability of kill(or survival) of a vulnerable target by one or more missiles is considered. The general formulas are obtained for the kill or survival probability the target is killed or survival. Several well-known concepts such as those of vulnerability, lethality, multi-component target, and a general combinatorial theorem of probability are introduced and used.

For the convenience in this paper, the word missile is used in a very general sense and the target is generally taken to be a point target. And, this paper is concentrated primarily with the probabilistic aspects of the problem, also a general numerical procedures are also described. Two examples are shown to illustrate the use of some of the formulas in this study, but also illustrate a few points which may not have been sufficiently emphasized. The extension study to complete a software package will be followed.

---

* 동의대학교 산업공학과
** 본 연구는 서울대학교 ACRC의 96년도 연구비 지원으로 연구되었음.

1. 서론

본 연구는 다 취약성을 갖는 표적(Multi-Vulnerable Target)이 다수의 동일한 미사일의 공격을 받을 경우 생존할 확률(Kill/Survival Probability)의 산정을 위한 방법론의 연구이다. 본 연구에서의 다 취약표적은 취약성의 특성이 다른 부분품들로 구성된 표적을 전제로 하며, 표적의 취약성(Vulnerability), 치명도(Lethality) 및 복합취약성을 갖는 표적을 고려하여 생존확률을 산 정하는 수식을 전개하였다. 이를 위하여 먼저 독립적으로 발사된 N개의 미사일의 경우, 일제발사(Salvo)의 경우, 및 복합취약 표적의 경우의 생존확률을 계산하고 이로부터 N개의 동일한 미사일의 경우의 표적이 생존할 확률의 산정을 위한 수식을 전개하였으며, 또한 가상적인 예를 들어 계산 결과를 보였다. 본 연구에서는 기본적으로 확률적인 관점에서 접근하였으며, 특정한 교전 가정사항들과 일반적인 여건을 고려하여 표적의 살상확률(Kill Probability)의 산정을 위한 수식들을 제시하였다. 살상확률을 계산하고 식을 유도하는 과정에서 미사일들간의 상관관계(Correlation)가 0인 경우와 1인 경우 즉 2가지의 특정 경우만 고려하였으며, 일반적인 경우는 본 연구를 확장 연구하면 가능하리라 생각된다.

위의 일반적인 문제 범위를 수리적 모델로 정형화하기 위하여 많은 가정사항들을 통하여 실제의 조우(Engagement)상황을 위한 극히 이상적인 경우의 수리모델들을 구성하였으며, 특정조건을 감안한 부 모델(Sub-model)들을 제시하였다. 교전모델(Engagement Model)을 위한 기본 요소들을 다음과 같이 고려하였다.

1) 신뢰도와 신관(Fuze)가능 작동 요인

2) 미사일과 탄두(Missile and War-head)

3) 조준(Aim) 탄두(Ballistics) 및 신관(Fuze)오차

4) 표적의 취약성(Target Vulnerability)

우선 단일 미사일의 경우의 표적이 살상 및 생존할 확률을 구하고, 이를 다 미사일의 경우로 확장 연구하였으며 다 미사일의 경우, 독립적으로 발사될 경우와 일제발사(Salvo)의 경우를 모두 다루었다. 또한 동일한 다 미사일의 경우와 표적의 취약특성을 고려한 살상 확률을 구하였으며 가상 예제를 통하여 실제계산 문제를 다루었다.

2.단일 미사일에 의한 살상확률

가. 일반 수식

단일 미사일에 의하여 표적이 파괴될 확률은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$P^{*} = \rho \cdot P \text{ ---------- } (1)$$

ρ : 계획된 발사가 성공적으로 수행될 신뢰도

P : 표적이 파괴될 확률

여기서 신뢰도 ρ는 여러 가지 형태로 주어질 수 있으며본 연구의 주요 초점은 P 의 산정을 위한 수식전개에 있으며 이는 특정한 경우를 제외하고 고정지점(Fixed Point)의 표적이거나, 표적의 가능한 위치들이 고정된 영역(Space)에 존재하는 것을 전제로 한다. 주어진 탄두 폭발지점이 $\overline{a}$인 경우, 이 확률을 P($\overline{a}$)로 표시하고 탄두의 폭발지점 $\overline{a}$를 3차원 공간의 한 점으로 가정하고, f($\overline{a}$)를 탄두폭발지점을 결정해주는 확률밀도함수라 하면,

$$P = \int_a P(\bar{a}) \cdot f(\bar{a}) \cdot d\,\bar{a} \text{ ------ } (2)$$

이는 한 표적이 단일 미사일에 의하여 파괴될 확률이며 이 경우 미사일의 폭발지점(Burst point)이 특정 탄도상의 점에서 이루어지며 위의 기대값으로 표시되는 표적이 생존할 확률 S($\bar{a}$)는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$S(\bar{a}) = 1 - P(\bar{a}) \text{ -------- } (3)$$

식 (1) 및 (2)으로 부터,

$$P^{*} = \rho\,(1 - \int_a S(\bar{a}) \cdot f(\bar{a}) \cdot d\,\bar{a}\,) \text{ ---------------- } (4)$$

$$P = 1 - \int_a S(\bar{a}) \cdot f(\bar{a}) \cdot d(\bar{a})$$

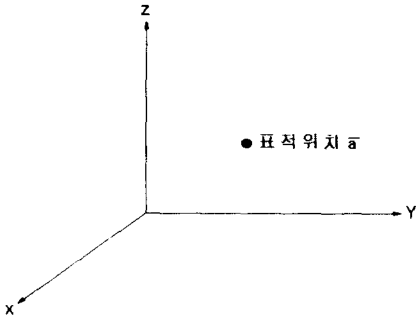
위의 두 식에서 적분부분은 모두 미사일이 성공적으로 발사되었을 경우 즉 ρ=1 경우의 표적의 생존확률을 표시한다. 표적의 생존확률 S^{*}는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} S^{*} &= 1 - P^{*} \\ &= 1 - \rho + \rho \int_a S(\bar{a}) \cdot f(\bar{a}) \cdot d\,\bar{a} \text{ ------------ } (5) \end{aligned}$$

이는 다음과 같은 두 가지 경우를 나타내는 식으로 볼 수 있다.

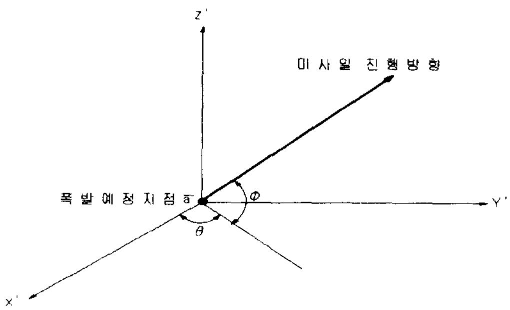
- 미사일이 성공적으로 발사되지 않는 확률
- 미사일이 성공적으로 발사될 수 있고 이 경우 표적이 파괴되지 않고 생존할 확률을 표시한다.

<그림 1> 및 <그림 2>에서와 같이 임의의 폭발지점 $\bar{a}$에서 임의의 방향 $\bar{\varphi}$ 를 고각(Elevation) Φ 와 방위각(Azimuth)을 θ로 표시할 경우



< 그림 1> 표적위치

폭발점 위치 $\bar{a}$에서 미사일의 진행방향 Φ일 때의 표적이 살상될 확률 P($\bar{\varphi}$| $\bar{a}$), 방위의 조건부 확률을 g($\bar{\varphi}$| $\bar{a}$)라고 하면 표적의 살상확률 및 생존확률은 다음과 같다.



<그림 2 > 임의의 폭발지점에서의 미사일 방위각

$$P(\bar{a}) = \int_a P(\bar{\varphi},\ \bar{a}) \cdot g(\bar{\varphi} \mid \bar{a}\,) \cdot d\bar{\varphi} \text{ ---------- } (6)$$

$$S(\overline{a}) = \int_{\varphi} S(\overline{\varphi}, \overline{a}) g(\overline{\varphi} \mid \overline{a}) d\overline{\varphi} ---- \quad (7)$$

나. 직각좌표계에서의 일반식

위의 식들에서 $\overline{a}$ 를 (x, y, z)로 표시하면

$$P = \underset{(x,y,z)}{\iiint} p(x,y,z) \cdot f(x,y,z)\ dx \cdot dy \cdot dz$$

위 식에서 폭발지점이 (x, y)로 주어질 경우,

$$P = \underset{(x,y)}{\iint} p(x,y) \cdot f(x,y)\ dx \cdot dy \quad ---(8)$$

많은 경우 미사일의 탄도(비행경로)에 수직인 평면상에서 (x, y)의 폭발점이 포함되는 평면을 가정하고 실제와의 근사 해를 구하여 사용할 수 있다. 표적 근접에서 탄도(비행경로) 상의 폭발지점 (x, y, z)은

$Z_1(x, y) \leq Z \leq Z_2(x, y)$를 만족할 경우

$$P(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} p(x,y,z) \cdot f(z \mid x,y) dz$$

$$P(x,y) = \underset{(x,y)}{\iint} f(x,y) \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} p(x,y,z) f(z \mid x,y) dz\ dx\ dy$$

$$f(x,y,z) = f(x,y)\ f(z \mid x,y)$$

실제 문제에서는 f(x, y) 및 f(z|x, y)는 이 변량 정규분포로 가정할 수 있으며 이 경우 위 식은 다음과 같다.

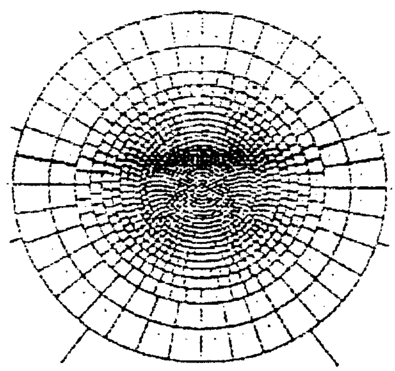
$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$f(x,y,z) = f(x,y) \cdot f_3(z) \quad -------(9)$$

다. 근사적 접근 방법

표적의 살상 확률 P를 결정하는 일반적인 절차는 위에서와 같이 우선 유한개의 폭발점 각각에서 하나의 폭발에 의한 조건부 살상확률을 구하고 이들의 평균값을 구하는 방법이다.

여기서 폭발지점을 구하는 2가지 기본적인 방법은 첫째 Monte Carlo 방법이며, 다른 하나는 각 조건부 살상확률을 계산하는 폭발지점의 분포를 이산분포로하는 근사적 접근방법을 들 수 있다. 폭발지점들의 표본을 추출하는 방법으로 각 점의 폭발확률이 모두 동일한 격자(Equal Probability Cell)나누어 표본의 개수의 역수가 각 지점에서 폭발할 확률 값이 되게 하는 방법이다.(그림 3 참고)



< 그림 3 > 동일확률 격자

<그림 3> 에서와 같이 이 변량 정규분포(Bivariate Normal Distribution)를 따르는 표본(Systematic Sample)이라 가정하고, (u, v)를 표본을 구성하는 한 점의 좌표라 하면, 이에 대응하는 이 변량 정규분포를 갖는 점(x, y)의 확률 밀도함수는

다음과 같이 주어진다.

$$f(x, y)=(1/2\pi\sigma_x\sigma_y)\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

여기서, $x = \sigma_x\mu + x_0$

$$y = \sigma_y\nu + y_0$$

3. N개의 미사일의 공격으로부터 표적이 생존할 확률

가. 기본개념.

N개의 미사일의 공격을 받을 경우 표적이 생존할 확률 Q^* 와 N개의 미사일의 공격이 성공적으로 이루어졌을 경우(발사성공)의 표적이 생존할 확률 Q 을 구하는 식을 구하려고 한다. 위의 각각의 경우의 살상확률을 P^* 및 P 라 두면

$$P^* = 1 - Q^*$$
$$P = 1 - Q$$
로 표시할 수 있다.

여기서 N개의 미사일의 폭발지점의 조합을 다음과 같이 정의한다.

$\overline{a_i}$: i번째 미사일의 폭발예정 지점 조합

i = 1, ..., N

$f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N)$: N개의 지정된 폭발지점이 발생할 경우의 확률밀도함수

이 경우 N개의 미사일이 모든 가능한 지점에의 폭발이 일어날 확률은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\int_{\overline{a}_1}\ldots,\int_{\overline{a}_N} f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N)d\,\overline{a}_1, \ldots, d\,\overline{a}_N = 1$$

나. 독립적으로 발사된 N개의 미사일의 경우 표적의 살상확률

1) N개의 미사일의 발사가 성공적으로 이루어졌을 경우의 표적의 생존확률

N개의 미사일이 1개의 표적을 향해서 각각 독립적으로 발사되었을 경우 표적이 생존할 확률을 $Q(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N)$이라 하고 이때의 N개의 미사일이 각각 $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N$ 지점에서 폭발될 경우 Q는 다음과 같다.

$$Q = \int_{\overline{a}_1}, \ldots, \int_{\overline{a}_N} Q(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N)$$
$$* f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N)d\overline{a}_1, \ldots, d\overline{a}_N \quad --(10)$$

여기서 독립조건을 가정할 경우의 적분 부분 식을 표시하면 다음과 같다.

(a) $f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N) = f_1(\overline{a}_1)\cdot\ \cdot\ \cdot f_N(\overline{a}_N)$

(b $Q(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N) = Q_1(\overline{a}_1)\cdot\ \cdot\ \cdot Q_N(\overline{a}_N)$

이를 식(10)에 대입하면

$$Q = \prod_{i=1}^{N}\int_{\overline{a}_i} Q_i(\overline{a}_i)\cdot f_i(\overline{a}_i)\,d\,\overline{a}_i \quad - (11)$$

여기서 i번째 미사일의 공격이 성공적으로 발사되었을 경우 표적이 살상될 확률은 다음과 같다.

$$P_i(\overline{a}_i) = 1 - Q_i(\overline{a}_i)$$

식 (11)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$Q=\prod_{i=1}^{N}\left[1-\int_{\overline{a}_i} P_i(\overline{a}_i)\,f_i(\overline{a}_i)\,d\overline{a}_i\right] \quad --(12)$$

여기서 N개의 미사일이 모두 동일하고 동일한 확률 분포, $Q_i(\overline{a_i})$ 및 $f_i(\overline{a_i})$를 가지고 각각 i에 대해서 독립일 경우 식 (11) 및 (12)은 다음과 같이 표시된다.

$$Q = \left[\int_{\bar{a}} Q_1(\bar{a}) \cdot f_1(\bar{a})\, d\bar{a} \right]^N$$

$$Q = \left[1 - \int_{\bar{a}} P_1(\bar{a}) \cdot f_1(\bar{a})\, d\bar{a} \right]^N$$

위 식의 적분부분은 바로 단일미사일 발사시의 생존 및 살상확률의 표시이다.

2) N개의 미사일의 공격에 대한 생존확률

N개의 미사일이 발사되어 성공 또는 실패를 포함할 경우의 표적이 생존할 확률을 계산하려고 한다.

$$P_i^* = \rho_i \int_{\bar{a}_i} P_i(\bar{a}_i) \cdot f_i(\bar{a}_i)\, d\bar{a}_i$$

여기서 ρ_i 는 i번째 미사일이 성공적일 확률이다.

$$P_i^* = \rho_i - \rho_i \int_{\bar{a}_i} Q_i(\bar{a}_i) \cdot f_i(\bar{a}_i)\, d\bar{a}_i$$

이 경우 표적이 생존할 확률은 다음과 같이 구해진다.

$$Q_i^* = 1 - \rho_i \int_{\bar{a}_i} P_i(\bar{a}_i) \cdot f_i(\bar{a}_i)\, d\bar{a}_i \quad ,$$

또는

$$Q_i^* = 1 - \rho_i + \rho_i \int_{\bar{a}_i} Q_i(\bar{a}_i) \cdot f_i(\bar{a}_i)\, d\bar{a}_i$$

여기서 주어진 t개의 미사일의 set, $1 \leqq t \leqq N$, 의 , β_1번째, · · · β_t번째 미사일의 성공적인 발사확률을 다음과 같이 정의한다.

$$\rho_{\beta_1} \cdot \rho_{\beta_2} \cdot \cdots \cdot \rho_{\beta_t}$$

이 경우, 계획된 N개의 미사일의 발사가 각각 독립이고, 이때의 각 미사일 확률분포가 각각 독립이고, N개의 미사일의 각 폭발지점이 주어진 경우 표적이 생존할 확률들이 각각 독립이므로 앞의 N개의 미사일의 발사에 대한 표적의 생존확률 계산과 같은 논리이다.

$$Q^* = \prod_{i=1}^{N} Q_i^*$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \left[1 - \rho_i \int_{\bar{a}_i} P_i(\bar{a}_i) \cdot f_i(\bar{a}_i)\, d(\bar{a}_i) \right]$$

또는

$$Q^* = \prod_{i=1}^{N} \left[1 - \rho_i + \rho_i \int_{\bar{a}_i} Q_i(\bar{a}_i) \cdot f_i(\bar{a}_i)\, d\bar{a}_i \right]$$

여기서 각 미사일의 확률분포가 동일하므로 , 즉 ρ_i , $Q_i(\bar{a}_i)$ 와 $f_i(\bar{a}_i)$ 가 모든 i에 대해서 같다고 보면 위의 식은 다음과 같이 간략하게 표시될 수 있다.

$$Q^* = \left[1 - \rho \int_{\bar{a}} P_1(\bar{a}) \cdot f_1(\bar{a})\, d\bar{a} \right]^N$$

$$Q^* = \left[1 - \rho + \rho \int_{\bar{a}} Q_1(\bar{a}) \cdot f_1(\bar{a})\, d\bar{a} \right]^N$$

여기서 $P_1(\bar{a})$, $Q_1(\bar{a})$ 는 단일 미사일의 경우 $\bar{a}$ 에서 폭발될 경우의 살상확률 및 생존확률이다.

다. 일제발사(Salvo)의 경우

1) N개의 미사일이 모두 성공적으로 발사될 경우의 표적의 생존확률

m회의 일제발사(Salvo)된 미사일이 모두 성공적으로 이루어진 경우, 즉 i번째 Salvo, i = 1, ..., m 에서 발사된 미사일의 수는 N_i 이라고 가정한다. 여기서 Salvo는 동일한 성능을 갖는 한 set의 미사일이 동시에 같은 표적을 향해서 발사되는 것을 뜻한다.

총 발사된 미사일의수 $N = \sum_{i=1}^{m} N_i$

$\overline{a}_{ij}$: i번째 Salvo에서 j번째 미사일의 폭발지점.

$\overline{R}_i$: i번째 Salvo에서 j번째 미사일의 목표지점.

$f_{ij}(\overline{a}_{ij}|\overline{R}_i)$,i=1,...,m

: $\overline{R}_i$ 목표지점을 향해 발사된 i번째의 Salvo의 j번째 미사일의 폭발지점의 확률밀도함수

$Q_{ij}(\overline{a}_{ij})$: i번째 Salvo의 j번째 미사일의 폭발지점 $\overline{a}_{ij}$ 가 주어진 경우 표적이 생존할 확률이다.

여기서 다음과 같은 독립 조건을 가정한다.

(a) 조준 목표점이 통계학적으로 서로 독립이고(또는 각 Salvo가 독립적으로 발사되고)

(b) i번째 Salvo의 가능한 표적에 대한 폭발지점이 통계학적으로 서로 독립이며

(c) N개의 미사일의 Sub-Set의 공격에 표적이 생존할 확률은 각 미사일이 같은 폭발지점에서 폭발되는 경우의 확률의 곱과 같다.

위와 같이 Salvo로 발사된 N개의 미사일의 공격에서 표적이 생존할 확률을 구하는 식을 다음과 같이 유도한다.

$Q_{ij}(\overline{R}_i)$: $\overline{R}_i$ 을 조준한 i번째 Salvo의 j번째 미사일에 대하여 표적이 생존 할 확률

$$Q_{ij}(\overline{R}_i) = \int_{\overline{a}_{ij}(\overline{R}_i)} Q_{ij}(\overline{a}_{ij}) f_{ij}(\overline{a}_{ij}|\overline{R}_i)\, d\overline{a}_{ij}$$

위 식의 적분부분은 i번째 Salvo의 모든 미사일에 대하여 각 조준점 $\overline{R}_i$에 따라 적분한 것을 나타낸 것이다.

$Q_i(\overline{R}_i)$: 표적을 향하여 발사한 i번째 Salvo의 모든 미사일에 대하여 표적이 생존할 확률은 다음과 같다.

$$Q_i(\overline{R}_i) = \prod_{j=1}^{N_i} Q_{ij}(\overline{R}_i)$$

그러므로 i번째 Salvo에서 표적이 생존할 확률 Q_i 는 다음과 같다.

$$Q_i = \int_{\overline{R}_i} Q_i(\overline{R}_i) g_i(\overline{R}_i)\, d\overline{R}_i$$

마지막으로 모든 Salvo에서 N개의 미사일로부터 표적이 생존할 확률,

$$Q = \prod_{i=1}^{m} Q_i$$

여기서 각 Salvo의 조준점의 확률분포가 같고, $N_1 = N_2 = , \ldots , = N_m$ 일 경우 Q는 다음과 같다.

$$Q = \left[\int_{\overline{R}} Q(\overline{R}) \cdot g(\overline{R})\, d\overline{R} \right]^m$$

여기서 $Q(\overline{R}) = \left[\int_{\overline{a}\,\overline{R}} Q(\overline{a}) f(\overline{a} | \overline{R})\, d\overline{a} \right]^{N_i}$

2) N개의 미사일에 대한 표적의 생존확률

계획된 m회의 Salvo의 미사일에 대하여 표적이 생존할 확률의 계산을 위한 수식의 전개를 위하여 i 번째 Salvo의 미사일의 수가 N_i ,i = 1, 2, ..., m으로 주어지고, ρ_{ij} 를 i번째 Salvo의 j번째 미사일의 발사가 성공할 확률이고 i, j에 대하여 통계학적으로 서로 독립일 경우를 가정한다. 이 경우 전체 발사미사일의 수는 다음과 같다.

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i$$

여기서 Q를 구하기 위한 수식을 다음과 같이 전개한다.

$$P_{ij}(\overline{a}_{ij}) = 1 - Q_{ij}(\overline{a}_{ij})$$

폭발지점이 $\overline{a}_{ij}$ 로 주어진 경우 i번째 Salvo에서 j 번째 미사일에 표적이 살상될 확률을 $P_{ij}(\overline{a}_{ij})$라 하고 i번째 Salvo의 조준점을 $\overline{R}_i$라 두면 앞에서와 마찬가지로,

$$P_{ij}(\overline{R}_i) = \int_{\overline{a}_{ij}\,\overline{R}_i} P_{ij}(\overline{a}_{ij}) f_{ij}(\overline{a}_{ij} | \overline{R}_i)\, d\overline{a}_{ij}$$

또는 $P_{ij}(\overline{R}_i) = 1 - Q_{ij}(\overline{R}_i)$

$$P^*_{ij}(\overline{R}_i) = \rho_{ij} P_{ij}(\overline{R}_i) = \rho_{ij} - \rho_{ij} Q_{ij}(\overline{R}_i)$$

$$Q^*_i(\overline{R}_i) = \prod_{j=1}^{N_i} [1 - \rho_{ij} P_{ij}(\overline{R}_i)]$$

또는

$$Q^*_i(\overline{R}_i) = \prod_{j=1}^{N_i} [1 - \rho_{ij} + \rho_{ij} Q_{ij}(\overline{R}_i)]$$

그러므로 i번째 Salvo에서 표적이 생존할 확률 Q^*_i 은 다음과 같다.

$$Q^*_i = \int_{\overline{R}_i} Q^*_i(\overline{R}_i) g_i(\overline{R}_i)\, d\overline{R}_i$$

끝으로 모든 Salvo(m 번의 Salvo)에서 표적이 생존할 확률 Q^* 은 다음과 같다.

$$Q^* = \prod_{i}^{m} Q^*_i$$

여기서 모든 미사일이 동일하고 표적조준점의 확률분포가 동일하고 ρ_{ij} 가 모든 N_i 에 따라 동일한 경우 Q^* 는 다음과 같다.

$$Q^* = \left[\int_{\overline{R}} Q^*(\overline{R}) g(\overline{R})\, d\overline{R} \right]^m$$

여기서

$$Q^*(\overline{R}) = \left[1 - \rho \int_{\overline{a}\,\overline{R}} P(\overline{a}) f(\overline{a} | \overline{R})\, d\overline{a} \right]^{N_i}$$

또는

$$Q^*(\overline{R}) = \left[1 - \rho + \rho \int_{\overline{a}\,\overline{R}} Q(\overline{a}) f(\overline{a} | \overline{R})\, d\overline{a} \right]^{N_i}$$

여기서 ρ = 신뢰도

N_i = 한 Salvo에서의 미사일의 발사수

m = Salvo 수

라. 다 취약표적의 생존확률

다 취약표적의 생존확률의 산출을 위하여, 단일 미사일의 경우에서 미사일의 폭발지점 $\bar{a}$ 를 $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N$로 대치하여, 각 독립조건을 가정하여 다음과 같이 N개의 미사일 경우로 바꾸어 생각하고 h개의 가능한 표적의 취약부분 집합(Set)을 다음과 같이 고려할 경우, 취약부분의 생존확률은 다음 식과 같이 표시할 수 있다. 즉

$$2 \leq h \leq n_1 + \cdot \cdot \cdot + n_n$$

$$q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N) = \prod_{u=1}^{h} q(C_u \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$$

여기서 $q(C_u \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$는 폭발지점이 $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N$로 주어진 경우 N개의 미사일의 공격에 표적의 취약부분 C_u 가 생존할 확률이고 $q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$ 는 h개의 취약부분이 모두 생존할 확률이다.

위의 독립조건에 따라,

$$Q(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N) = \prod_{j=1}^{n} Q_j(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$$

여기서 $Q(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$ 은 표적의 j번째 취약부분의 군(Class)이 생존할 확률이다.

$$Q_j(\bar{a}_1, .., \bar{a}_N) = \sum_{i_j=k_j}^{n_j} (-1)^{i_j-k_j} \binom{i_j-1}{k_j-1} \cdot$$

$$\sum_{i_j} \prod_{u=1}^{i_j} q(C(t_u, j) \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$$

여기서 $q(C(t_u, j) \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$ 은 j번째 취약분야의 t_u번째 취약부분의 생존확률이며, $\sum_{i_j}$ 는 정수 $t_1, \ldots, t_{i_j}$의 가능한 Set에 대하여 합을 구하는 기호이다.

즉 $1 \leq t_1 < t_2 < \cdot \cdot \cdot t_{i_j} \leq n,$

N개의 미사일의 발사가 성공적인 가정 하에 표적이 생존할 확률 Q는 다음과 같이 표시된다.

$$Q = \int_{\bar{a}_1} \ldots \int_{\bar{a}_N} Q(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N) * f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N) d\bar{a}_1, \ldots, d\bar{a}_N$$

여기서 독립조건들의 가정을 고려하면 다음과 같다.

$$f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N) = \prod_{i=1}^{N} f_1 \bar{a}_1$$

$$q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N) = \prod_{i=1}^{N} q_i(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_1)$$

여기서 $q_i(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_1)$은 i번째 미사일에 대하여 표적의 $C_1, \ldots, C_h$ 의 취약부분이 생존할 확률이다. 따라서 모든 취약부분이 생존할 확률은 다음과 같다.

$$q^*(C_1, \ldots, C_h) = \prod_{i=1}^{N} (1 - \rho_i + \rho_i q_i(C_1, \ldots, C_h))$$

여기서,

$q_i(C_1, \ldots, C_h)$

$$= \int_{\bar{a}_i} q_i(C_1, \ldots, C_N \mid \bar{a}_i) f_i(\bar{a}_i) d\bar{a}_i$$

모든 미사일의 폭발지점의 확률분포를 동일하다고 볼 경우,

$$q^*(C_1, \ldots, C_h) = [1-\rho+\rho q(C_1, \ldots, C_h)]^N$$

여기서

$$q(C_1, \ldots, C_h)$$

$$= \int_{\bar{a}} q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}) f(\bar{a}) d\bar{a}$$

마. N개의 파편형 미사일의 공격에 대한 표적의 생존확률

여기서 고려된 N개의 미사일은 파편형 미사일(Fragment Missile)이다. 한 개의 표적을 향해서 N개의 미사일을 발사하는 경우이며 다음의 살상조건을 고려하였다.

$$q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_{\beta_1}, \ldots, \bar{a}_{\beta_t})$$

$$= \prod_{u=1}^{h} q(C_u \mid \bar{a}_{\beta_1}, \ldots, \bar{a}_{\beta_t})$$

위 식은 t개의 미사일의 폭발지점 $\bar{a}_{\beta_1}, \ldots, \bar{a}_{\beta_t}$ 이 주어질 경우 표적의 취약부분품 $C_1, \ldots, C_h$ 이 생존할 확률을 표시한다.

위에서와 같이 주어진 폭발지점 $\bar{a}$ 에 대해서

$$q(c_u \mid \bar{a}_i) = \exp(-K_{ui})$$

여기서 K_{ui}는 i번째 미사일이 $\bar{a}_i$ 에서 폭발될 경우, 이로부터 취약부분품 C_u 를 살상할 기대 파편의 수를 표시한다. 같은 방법으로,

$$q(C_u \mid \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_N) = \exp(-K_u)$$

$$K_u = K_{ui} + \ldots + K_{ui} + \ldots + K_{uN}$$

이로부터

$$q(C_u \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N) = \prod_{i=1}^{N} q(C_u \mid \bar{a}_i)$$

위의 식들로부터

$$q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{n=1}^{h} q(C_u \mid \bar{a}_i)$$

앞에서와 같은 독립조건들을 고려하면, 표적의 취약부분품 C_u에 대한 폭발지역 R_u 가 주어질 경우, i 미사일 $1 \le i \le N$, 폭발지점 $\bar{a}_i$ 가 R_u 내에 존재한다면 C_n는 살상될 것이며 이 경우,

$$q(C_u \mid \bar{a}_i) = 0$$

분명히, 임의의 u ($1 \le u \le h$)에 대해서, $1 \le i \le N$ 이고, $\bar{a}_i$ 가 R_u내에 존재할 경우

$$q(C_u \mid \bar{a}_i, \ldots \bar{a}_N) = 0$$

$$q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_i) = 0,$$

및 $\quad q(C_1, \ldots, C_h \mid \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = 0$

4. N개의 동일한 미사일의 공격에 대한 다 취약부분표적의 생존확률

가. 기본수식의 전개

N개의 충격형 미사일이 다 취약부분 표적에 대하여 발사될 경우 표적의 생존확률을 계산하는 문제 즉 i번째 미사일(i=1, 2,..., N)의 폭발지점을 $\bar{a}_i$으로

표시하고 표적의 생존할 확률 계산을 위하여 다음 조건들을 가정하였다.

a) 표적을 n+1가지 취약분야로 구분하고 표적이 j번째(j=1,..,n+1) 취약분야의 n_j취약부분 중에서 적어도 K_j의 취약부분이 생존해야 표적이 생존한다고 본다. 즉 $K_i < n_j$ j=1,2,...,n이고 n+1번째 취약부분은 단일 취약부분, 즉 $K_{n+1} = n_{n+1}$ 이다.

b) $f_i(\overline{a_i})$는 i번째 미사일의 폭발지점의 확률밀도 함수이며, 모든 i에 대하여 확률적으로 독립이라고 가정한다.

c) ρ_i는 i번째 미사일의 발사성공 신뢰도이며 역시 모든 i에 대하여 통계적 독립이라고 가정한다.

d) $C_1, C_2, \ldots\ldots C_k$를 다 취약 표적의 임의의 취약부분의 조합이라고 할 경우,

$\overline{a_{\beta_1}}, \ldots\ldots \overline{a_{\beta_t}}$,를 N개 미사일의 임의 조합의 폭발지점이라고 할 경우, 이는 표적의 모든 취약부품이 생존할 확률을 다음과 같이 표시할 수 있다.

이때의 β_i 번째 미사일의 폭발지점이 $\overline{a}_{\beta_i}$

i =1, ..., t일 경우

$$q(C_1, \ldots, C_h \mid \overline{a}_{\beta_1}, \ldots, \overline{a}_{\beta_t})$$

$$= \prod_{u=1}^{h} q(C_u \mid \overline{a}_{\beta_1}, \ldots, \overline{a}_{\beta_t}) \text{ ---(13)}$$

e) 모든 취약부분 및 모든 폭발지점의 조합을 고려할 경우

$$q(C_u \mid \overline{a}_{\beta_1}, \ldots, \overline{a}_{\beta_t})$$

$$= \prod_{i=1}^{t} q(C_u \mid \overline{a}_{\beta_i}) \text{ ------(14)}$$

f) 여기서 N개의 미사일이 동일하고, 동일한 피해능력을 가질 경우, 위의 식으로부터

$$q(C_1, \ldots, C_u \mid \overline{a}_{\beta_1}, \ldots, \overline{a}_{\beta_t})$$

$$= \prod_{i=1}^{t} \prod_{u=1}^{h} q(C_u \mid \overline{a}_{\beta_i}) \text{ -------(15)}$$

식(13)에서 t=1일 경우

$$q(C_1, \ldots, C_u \mid \overline{a}_{\beta_i}) = \prod_{u=1}^{h} q(C_u \mid \overline{a}_{\beta_i}) \text{ --(16)}$$

식(16)을 식(15)에 대입하면

$$q(C_1, \ldots, C_u \mid \overline{a}_{\beta_1}, \ldots, \overline{a}_{\beta_t})$$

$$= \prod_{i=1}^{t} q(C_1, \ldots, C_h \mid \overline{a}_{\beta_i})$$

가정 a)로부터 N개의 충격형 미사일의 공격으로부터 표적이 생존할 확률 Q^*는 다음과 같이 표시된다.(본 식의 유도는 생략)

$$Q^* = \sum_{i_1=k_1}^{n_1} \cdots \sum_{i_n=k_n}^{n_n} S^*(i_1, \ldots, i_n, n_{m+1})$$

$$* \prod_{j=1}^{n} (-1)^{i_j - k_j} \binom{i_j - 1}{k_j - 1} \text{ ---(17)}$$

여기서,

$$\binom{i_j - 1}{k_j - 1} = \frac{(i_j - 1)!}{(k_j - 1)!(i_j - k_j)!}$$

$$S^*(i_1, \ldots, i_n, n_{n+1}) = \sum_{i_1} \cdot \cdot \cdot \sum_{i_n} q^* \text{ --(18)}$$

여기서 $\sum_{i_j}$는 정수 $t_1, \ldots\ldots, t_j$ 의 가능한 조합(set)에 대하여 합을 구하는 기호이다.

즉 $1 \le t_1 < t_2 < \cdot \cdot \cdot < t_{i_j} \le n_j$

q^*는 N개의 미사일이 한 표적을 향해서 발사될 경우 (n+1)번째의 단일 취약분야의 모든 부분품이 동시에 생존할 확률을 뜻한다. 이들 부분품은 다음과 같이 표시된다.

$C(t_1,1),\ldots,C(t_{i_1},1);,\ldots,;C(t_1,n),\ldots,C(t_{i_n},n)$

여기서 $C(t_1,j),\ldots,C(t_{i_j},j)$는 j번째 분야의 취약부분품을 표시한다. 위의 식(16)과 가정사항 b), c) 및 f)에 의하여

$$q^* = [1-\rho+\rho q]^N----------(19)$$

여기서 $q = \int_{\bar a} q(\bar a)f(\bar a)d\bar a$ 는 $q(\bar a)$ 의 평균값을 구한 식이다.

$$P(\bar a) = 1 - q(\bar a)$$

$P(\bar a)$ 는 $\bar a$ 에서 폭발되고 미사일에 대한 단일 취약부분에서 h개중의 1개의 취약부분품이 살상될 확률이다. 이를 충격형 미사일에서 생각해보면,

$$P(\bar a) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{t_j}{}^{*}P(C(t_j,j)\mid\bar a) + \sum_{i=1}^{n_{n+1}}P(C(i,n+1)\mid\bar a)$$

여기서 $P(C(t_j,j)\mid\bar a)$는 폭발지점이 $\bar a$인 미사일에 의해서 j번째 취약분야에서 t_j번째 취약부분품이 살상될 확률이다.

$$P(i,j)=\int_{\bar a}P(C(i,j)\mid\bar a)f(\bar a)d\bar a,---(20)$$

$$P_s = \sum_{i=1}^{n_{n+1}}P(i,n+1)\ ----------(21)$$

여기서 $P(i,j)$는 j번째 취약분야의 i번째 취약부분품이 단일 미사일에 의해 살상될 확률이며 이 경우 미사일이 성공적으로 발사된 것을 전제로 하고 있다. (17)에서부터 식(19)까지의 식에 의해서,

$$q^* = [q_s^* - \rho\sum_{j=1}^{n}\sum_{t_j}{}^{*}P(t_i,j)]^N------(22)$$

여기서 $q_s^* = 1 - \rho P_s$

지금까지의 결과를 요약하면, 다 취약표적이 N개의 동일한 미사일의 공격에서 생존할 확률 Q^* 는, 그 조우조건이 위에서와 같은 a) ~ f)까지의 조건하에서 식(17)과 같이 구할 수 있다. 또한 식(22)에서와 같이 q^*이 주어지며, 다음 내용들이 구하여진다.

- 미사일이 성공적으로 발사될 신뢰도 ρ
- 식(20)에 의하여 단일 발사시의 살상확률 P(i, j)
- 식(21)에 의하여 미사일이 성공적으로 발사되었을 경우 단일 취약분야내의 한 취약부분품이 단일 미사일에 의하여 살상될 확률 P_s

나. 수정 수식의 전개

위의 수식에서

$K_j > \frac{n_j}{2}$, $1\le j\le n$ 경우, Q^*의 수식을 수정하여 사용할 수 있다. 즉 단일 또는 여러 값의 j에 대한 Q^*의 수식을 다음과 같이 변경할 수 있다.

1) $\sum_{t_j=K_j}^{n_j}$ 을 $\sum_{t_j=\phi}^{n_j-K_j}$ 로 대치.

2) 수식(10)에서 $q_s^* - P\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}P(i,j)$을 대치하고 그 결과를 Q_v^* 로 표시.

3)수식(22)에서

$\sum_{t_j}^{*} P(t_j, j)$ 을 $- \sum_{t_j}^{*} P(t_j, j)$로 대치

위의 변경을 고려하면, Q^*는 다음과 같다.

$$Q^* = \sum_{i_1=0}^{n_1-K_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{n_n-K_n} S(i_1, \ldots, i_n, n_{n+1})$$

$$* \prod_{j=1}^{n} (-1)^{n_j-i_j-K_j} \binom{n_j-i_j-K_j}{K_j-1}$$

여기서

$S(i_1, \ldots, i_n, n_{n+1})$

$$= \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_n} [Q_v^* + \rho \sum_{j=1}^{n} \sum_{t_j}^{*} P(t_j, j)]^N$$

그리고 $$Q_v^* = q_s^* - \rho \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} P(i, j)$$

5. N개의 미사일 공격시 표적의 살상확률의 계산의 예

가. 응용 1

단일 취약표적 (Single-Vulnerable Target)이 다음과 같이 3가지의 취약부분품 C_1, C_2 및 C_3으로 구성되어 있으며 N개의 동일한 충격미사일이 이 표적을 향해서 발사되고,

p_j, j = 1, 2, 3,이 각각 취약부분품 C_j의 살상 확률 이라 할 때 다음 각 경우에 이 표적이 살상될 확률 P를 구하려고 한다.

a) $p_1 = p_2 = p_3 = 0.08$ d) $p_1 = 0.004$

b) $p_1 = p_2 = p_3 = 0.04$ $p_2 = 0.008$

c) $p_1 = p_2 = p_3 = 0.16$ $p_3 = 0.012$

e) $p_1 = 0.02$, $p_2 = 0.04$, $p_3 = 0.06$ f) $p_1 = 0.08$, $p_2 = 0.16$, $p_3 = 0.24$

위의 각각의 경우 N = 1, 5, 20을 고려한다.

위의 표적이 N개의 동일 미사일의 공격에 대하여 살상될 확률을 구하려고 한다.

c_1	c_2	c_3

이 표적이 N개의 동일 미사일의 공격에서 살상될 확률은 앞에서 구한 수식으로 다음과 같이 구하였다.

$$P_N = 1 - q_s^N = 1 - (1 - P_s)^N$$

여기서 $P_s = p_1 + p_2 + p_3$

위의 각각의 경우 P_j 을 계산하면,

case	P_1	P_5	P_{20}
a), d)	0.024	0.11	0.38
b), e)	0.12	0.47	0.92
c), f)	0.48	0.96	1.00

나. 응용2.

응용1에서 3개의 취약부분품 대신에 3쌍의 취약부분의 경우를 고려하였으며, 각 쌍의 2개의 부분품 중 1개는 중복(Redundant)되어 있다. 이 경우 표적이 살상되기 위해서는 적어도 1쌍의 부분품이 살상

되어야 한다고 가정하였다. 즉 P_{ij} ,i = 1, 2, j = 1, 2, 3이라 두면, j번째 쌍의 i번째 부분품 즉 C_{ij}가 살상되어야 한다.

C_{11}	C_{12}	C_{13}
C_{21}	C_{22}	C_{23}

여기서 j = 1, 2, 3,

$p_{1j} = p_{2j} = p_j$ 이며 p_j 는 응용1.에서 주어진 값과 같다. 이 경우 표적이 살상될 확률, P_N을 구하려고 한다.

$$P_N = 1 - Q^*$$

n = 3, ρ = 1

$$Q^* = \sum_{h_1=0}^{2}\sum_{h_2=0}^{2}\sum_{h_3=0}^{2} W(h_1)W(h_2)W(h_3)$$

$$*\left[Q_v^* + \sum_{j=1}^{3} P(h_j, j)\right]^N$$

여기서, $$W(h_i) = \begin{cases} 1 & h_j \neq 0 \\ -1 & h_j = 0 \end{cases}$$

$$Q_v^* = q_s^* - \sum_{j=1}^{3}[P(1, j) + P(2, j)]$$

$$q_s^* = 1 - P_s$$

여기서 표적이 단일 취약표적이 아니므로

$$P_s = 0, \qquad q_s^* = 1$$

$$Q^* =$$

$$\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}[Q_v^* + P(r,1) + P(s,2) + P(t,3)]^N$$

$$-\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}[Q_v^* + P(r,1) + P(s,2)]^N$$

$$-\sum_{r=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}[Q_v^* + P(r,1) + P(t,3)]^N$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}[Q_v^* + P(i,j)]^N - [Q_v^*]^N$$

여기서 $$Q_v^* = 1 - \sum_{j=1}^{3}[P(1,j) + P(2,j)]$$

N=1, $P_{ij} = P(1,j)$ 을 위 식에 각각 대입하면 $P_1 = 0$, N=5, N=2일 때 위 식을 계산하면 다음과 같은 값을 얻을 수 있다.

case	P_1	P_5	P_{20}
a)	0.00	0.00	0.06
b)	0.00	0.08	0.68
c)	0.00	0.77	1.00
d)	0.00	0.00	0.07
e)	0.00	0.09	0.70
f)	0.00	0.79	1.00

6. 결 론

본 연구에서는 단일 및 다 미사일의 공격에 대한 단일 및 다 취약부분으로 된 표적이 살상 또는 생존할 확률을 구하는 수식을 구하는데 초점을 맞추었다. 수식의 복잡성을 고려하여 많은 가정사항을 고려하였으며 이러한 가정 하에서 기본 수식을 전개하고 이를 가상적인 응용 문제에 응용해 보았으며, 보

다 실질적인 수식의 전개와 간편한 계산을 위한 대화방식의 전산 프로그램의 개발과 공격 미사일 및 표적의 특성을 고려한 실용화 모델로 확장 연구가 이루어질 경우 실용효과가 매우 클 것으로 생각된다.

참고문헌

1. A.D.Groves, "A Method for Obtaining Probabilities of Various Types of Kill on Multiple-Component Targets, " AMSAA Technical Memorandum No.87, Sep. 1970.
2. J. R. Miller, "Interim Report on the Sensitivity Analysis of Fragment Vulnerability Simulation Models, " Rep. NWC TP 5421, NWC, Oct. 1972.
3. C. Candl and G. Kuel, " A Survey of Models Used within the Vulnerability Laboratory ," BRL Memorandum Rep. No. 2434, Jan. 1975.
4. 황 홍석외 2명, " 유도무기체계 효과분석 연구 (명중률/살상확률 중심)", ADD Rep. MSRD-414-91007, 1990.1.
5. 황 홍석외 3명, " Missile System의 생존성과 방어체계의 최적구성에 관한 연구", ADD Rep. MSDC-415, 1993.1