단체법에서의 초기기저 구성에 관한 연구†

서용원* · 김우제** · 박순달*

A Study on constructing a good Initial Basis in the Simplex Method†

Yongwon Seo* · Wooje Kim** · Soondal Park*

ABSTRACT

Constructing an initial basis is an important process in the simplex method. An initial basis greatly affects the number of iterations and the execution time in the simplex method. The purpose of this paper is to construct a good initial basis.

First, to avoid linear dependency among the chosen columns, an enhanced Gaussian elimination method and a method using non-duplicated nonzero elements are developed. Second, for an order to choose variables, the sparsity of the column is used.

Experimental results show that the proposed method can reduce the number of iterations and the execution time compared with Bixby's method by 12%.

Keywords : simplex method, initial basis, linear independency, preference order for structural variables

1. 서 론

단체법을 이용하여 선형계획문제를 풀기 위해서는 초기기저가능해(initial basic feasible solution)가 필요하다. 문제에서 바로 초기기저가능해를 찾아낼 수 있는 경우에는 별 문제가 없지만 대다수의 경우 이것이 불가능하므로, 대수법(Big-M Method)이나 2국면법(Two Phase Method) [1][10]등의 방법을 사용하여 초기기저가능해를 찾아내기 위한 노력을 하게 된다.[1)] 2국면법에서는 초기기저가능해를 찾아내기 위해 1국면(Phase 1)을 수행한다. 1국면은 기저이지만 가능

* 서울대학교 산업공학과
** 대진대학교 산업공학과
† 이 연구는 한국과학재단의 지원에 의한 "고속선형계획법의 개발" 과제의 일부입니다.
1) 대수법과 2국면법은 실용적으로 비슷한 계산량을 보이므로, 본고에서는 2국면법을 대상으로 한다.

이 아닌 해로부터 출발하는데, 이를 초기기저해라 고 하고, 이 때의 기저를 초기기저라 한다.

전통적인 2국면법에서는 여유(잉여)변수와 인공변수를 사용하여 초기기저를 구성하였는데, 이 경우 쉽게 초기기저를 구성할 수는 있으나, 많은 인공변수가 도입된다. 그런데, 인공변수가 존재하면 인공변수를 탈락시키기 위해 단체법의 한 회(Iteration)가 사용되어야 하므로, 인공변수를 적게 사용하는 것이 수행 횟수와 수행 시간을 줄이는 데 바람직하다[1]. 따라서, 가급적 인공변수 대신 구조변수를 사용하여 초기기저를 구성하려는 연구가 Bixby[6]등에 의해 이루어지게 되었다.

본 연구에서는 Bixby가 사용한 초기기저 구성 방법과 문제점을 고찰하고, 보다 효율적인 초기기저 구성 방법을 제안하고자 한다.

2. 연구 현황－Bixby가 제안한 초기기저 구성 방법

Bixby[6]는 단체법에서 수행 횟수와 시간을 줄이기 위한 초기기저 구성 방법에 대해 연구한 바 있다. Bixby가 제안한 초기기저 구성 방법은 크게 다음과 같은 절차로 이루어진다.

단계 1. 여유잉여변수를 초기기저에 포함시킨다.

단계 2. 초기기저에 포함된 열의 갯수$=m$이면 끝. (m은 제약식의 수) 아니면 단계 3으로 진행

단계 3. 구조변수의 사용 순서 결정
구조변수를 사용 우선순위에 따라 정렬한다. $k=1$로 두고 단계 4로 진행.

단계 4. 구조변수열의 일차독립성 판정
k번째 구조변수열이 이미 초기기저에 포함된 열과 일차독립인지 판정한다.
일차독립이면 k번째 구조변수열을 초기기저에 포함시킨다.

단계 5. 종료 판정
초기기저에 포함된 열의 갯수$=m$이면 끝.
그렇지 않고 모든 구조변수를 다 소모하였으면 단계 6으로 진행.
두 경우 모두 아니면 $k \leftarrow k+1$로 두고 단계 4로 돌아간다.

단계 6. 인공변수 도입
초기기저에 포함된 열의 갯수$<m$이면 모자라는 갯수만큼 인공변수를 도입한다.

본 연구에서 제안하는 방법도 기본적으로 이와 같은 절차를 따른다. 위에서 보듯이, 구조변수를 초기기저에 사용하기 위해서는 두가지 사항, 즉 구조변수의 사용 순서를 결정하고 일차독립성을 판정하는 방법에 대한 고려가 이루어져야 한다. Bixby는 이들을 각각 다음과 같이 제안하였다.

변수의 자유도에 기반한 구조변수의 사용 순서 결정

Bixby는 먼저 여유 · 잉여변수들을 모두 초기기저에 포함시켰는데, 이는 이들의 희소성과 수치 안정성이 우수하기 때문이다. 다음으로, 상 · 하한 폭이 넓은 구조변수를 우선으로 초기기저에 포함시켰는데, 이는 상 · 하한의 폭이 넓은 변수일수록 최적기저에 남아있을 가능성이 크다는 가정에 기반한다. 따라서, 가급적 상 · 하한의 폭이 넓은 변수를 우선으로 하여 초기기저로 선택하는 것이 수행 횟수를 줄이는데 효과적일 것이라는 가정이다.

구체적으로는 다음과 같다. 우선, 각 구조변수열에 대해 다음과 같이 $\bar{q}_j$를 정의하였다. 이것은 상 · 하한의 간격이 좁을수록 값이 커지는 Penalty function의 의미를 가진다.

$$\bar{q}_j = \begin{cases} l_j & \text{, if } l_j > -\infty \text{ and } u_j = \infty \\ -u_j & \text{, if } l_j = -\infty \text{ and } u_j < \infty \\ l_j - u_j & \text{, if } l_j > -\infty \text{ and } u_j < \infty \end{cases}$$

여기에, 목적함수의 계수를 고려하여 다음과 같이 q_j를 정의하였다.

$$q_j = \bar{q}_j + c_j / c_{max}$$

$$\text{단, } c_{max} = \begin{cases} 1000\gamma & \text{, if } \gamma \neq 0 \\ 1 & \text{, otherwise} \end{cases}$$

$$\gamma = \max\{|c_j| : 1 \leq j \leq n\}$$

각 구조변수에 대해 이와 같이 q_j가 정의되면, 구조변수들을 q_j의 오름차순으로 정렬하여 이 순서로 구조변수를 선택한다. 이는 상·하한 폭이 넓은 구조변수를 우선적으로 사용하되 부수적으로 목적함수의 계수도 고려하는 방법이라 말할 수 있다. Bixby는 최소화 문제에 대해서만 고려하였으므로, 최대화 문제의 경우는 목적함수의 부호를 반대로 하여 최소화 문제로 바꾸어 생각하면 된다.

일차독립성 판정

구조변수를 사용하는 순서가 정해지면, 초기기저 구성 절차의 단계 4에서와 같이 각 구조변수에 대해 이 구조변수를 초기기저에 포함시켰을 때 기저열 사이의 일차독립성을 유지하는지를 판정해야 한다. 그러나 일차독립성의 판정을 위해 매번 선회연산을 행할 경우 초기기저 구성에 걸리는 시간이 너무 늘어나므로, Bixby는 선회연산을 통하지 않고 비영요소의 위치와 값을 이용하여 이미 기저로 선택된 열과 새로 기저에 포함시키려는 구조변수열이 일차독립인지를 확인하는 발견적 기법을 제안하였다. 이 때 가급적 절대값이 큰 비영요소를 가상 선회요소로 선택함으로써 초기기저행렬의 수치 안정성을 고려하였다. 이 방법에서는 문제의 제약식 계수행렬의 각 행과 열에서 최대 절대값이 1로 규모화(Scaling)되어 있을 것이 요구된다.

Bixby가 제안한 발견적 기법을 의사 코드로 나타내면 다음과 같다.

```
임시배열 I, R, V 사용, I, R은 모두 0으로, V는 모두 +∞로 초기화
여유·잉여변수를 기저로 선택, 기저인 행 i에 대해 I[i]=1, R[i]=1.
repeat
  구조변수열 A.j 선택
  α ← Max{|A_ij| : R[i]=0}
  if α > =0.99
    Let l' .∋. α=|A_l'j| and R[l']=0
    A.j를 기저로 선택
    I[l'] ← 1
    V[l'] ← α
    |A_ij|≠0인 모든 i에 대해 R[i] ← R[i]+1
  else if 모든 i에 대해 |A_ij| < =0.01V[i]
    α ← Max{|A_ij| : I[i]=0}
    if α≠0
      Let l' .∋. α=|A_l'j| and I[l']=0
      A.j를 기저로 선택
      I[l'] ← 1
      V[l'] ← α
      |A_ij|≠인 모든 i에 대해 R[i] ← R[i]+1
  endif
until(NROW개의 초기기저를 찾았거나 더이상
    선택할 구조변수가 없는 경우)
if (찾은 초기기저의 갯수 < NROW)
  I[i]=0인 각 행에 대해 Artificial 을 초기기
      저로 선택
endif
```

이 발견적 기법은 일차독립이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. 따라서 일차독립이면서도 초기기저로 선택되지 못하는 구조변수가 발생할 수 있다.

Bixby의 연구에서는 다음과 같은 몇가지 문제점을 발견할 수 있다. 우선, 그는 이렇게 초기기저를 구성한 경우 전통적인 초기기저 구성 방법에 비해 계산 횟수가 줄어든데 비해 전체 수행시간은 기대한 만큼 줄어들지 않았음을 지적했는데, 이는 구성된 초기기저행렬의 밀집도가 높아진 이유로 설명된다. 또, 크고 복잡한 문제일수록 계산 횟수가 줄어드는 정도가 적어서, 상 · 하한 폭이 넓은 변수를 우선적으로 초기기저에 포함시킨 방법이 실제로는 큰 효과를 내지 못함을 알 수 있다. 마지막으로, 구조변수열의 일차독립성을 판별하는 발견적 기법에서 필요 이상으로 강한 조건을 사용하여, 실제로 일차독립인데도 초기기저에 사용되지 않는 열의 갯수가 너무 많다는 문제점이 있다. 이는 결과적으로 필요보다 많은 인공변수를 사용하는 결과를 가져온다.

본 연구에서는 이와 같은 문제점을 개선한 방법을 제시하려 한다. 먼저 상 · 하한 폭에 기반하여 구조변수의 사용 순서를 정하는 대신, 초기기저행렬을 희소하게 만드는 구조변수를 우선적으로 사용하여 수행 속도를 개선하고, 구조변수열의 일차독립성을 판정하는 개선된 방법을 제안하여 인공변수의 사용 갯수를 줄이고자 한다.

3. 구조변수 사용 순서의 개선

초기기저를 구성할 때 가장 우선적으로 대상이 되는 변수는 여유 · 잉여변수와 자유변수이다. 여유. 잉여변수는 해당 열이 Singleton Column이고 그 비영요소값이 1 또는 -1이므로 희소성과 수치 안정성 측면에서 우수하고, 상한이 없으므로 최적기저에 남아있을 가능성도 커서 초기기저의 좋은 고려대상이 된다. 자유변수는 상 · 하한의 제한이 없으므로 한번 진입되면 탈락되지 않아 최적기저에까지 남아있게 되므로 초기기저로 선택하는 것이 유리하다. [1] 그러나 희소도와 수치 안정성 측면의 고려 때문에, Bixby는 자유변수보다는 여유 · 잉여변수를 우선적으로 사용하였다[6]. 본 연구에서도 여유 · 잉여변수와 자유변수는 우선적으로 초기기저로 선택하도록 한다.

그러나, 대부분의 경우 여유 · 잉여변수와 자유변수만으로는 초기기저를 구성하기에 부족하다. 따라서 인공변수를 사용하지 않기 위해서는 구조변수를 사용해야 하며, 구조변수를 초기기저로 선택할 때 일차독립열을 선택하는 방법에 대해서는 2절에서 설명하였다. 그런데, 일반적으로 구조변수는 초기기저를 구성하기 위해 필요한 갯수보다 많으므로, 구조변수의 사용 순서를 정함에 따라 초기기저의 구성이 달라져서, 수행횟수와 수행 시간에 큰 영향을 주게 된다. 따라서, 구조변수의 사용 순서를 정하는 것이 초기기저의 구성에 있어서 중요한 문제이다.

Bixby[6]는 수행 횟수를 줄이기 위하여 구조변수의 자유도를 기준으로 하는 구조변수 사용 순서를 제안한 바 있다. Bixby의 자유도 순서는 주로 최적기저에 남아있을 가능성이 높은 변수를 우선적으로 초기기저로 택하여 수행 횟수를 줄이려는 의도에 촛점을 두고 있다. 그러나, 수행 횟수가 다소간 증가하더라도 초기기저를 희소하게 유지하는 것이 전체 수행 시간의 측면에서는 오히려 유리할 수도 있고, Bixby[6]도 이점에 대해 지적하고 있다. 따라서, 본 연구에서는 구조변수열의 희소도를 기반으로 하여, 희소한 구조변수를 우선적으로 초기기저로 선택하는 순서를 제안한다.

본 연구에서 제안하는 구조변수 사용 순서는

초기기저를 희소하게 유지하여 수행 시간을 줄이기 위해 구조변수를 희소도 순서로 사용하는 방법이다. 즉, 단일요소열(Singleton Column)을 최우선으로 사용하고 이후 비영요소가 2개, 3개. 인 구조변수열을 비영요소 갯수의 오름차순으로 사용한다. Tie가 생기는 경우 상·하한의 폭이 넓은 변수를 우선적으로 사용한다. 여기서도 Tie가 생기면 목적함수의 계수를 참조하여, 최소화 문제의 경우 목적함수 계수의 값이 적은 변수를 우선적으로 사용한다. 최대화 문제이거나 변수의 상하한이 음의 범위에 있는 경우는 반대가 된다. 이 방법은 다음과 같은 Penalty function을 정의함으로써 명료하게 서술할 수 있다. 각 구조변수 x_j에 대해 다음과 같은 Penalty function p를 정의한다.

$$p(x_j)=\tau_j M^2+\frac{1}{u_j-l_j}M+S_z S_b c_j$$

τ_j : j열의 비영요소 갯수

u_j : x_j의 상한

l_j : x_j의 하한

c_j : j열의 목적함수 계수

S_z : 목적함수의 형태에 따라, 최대화 문제이면 -1, 최소화 문제이면 1

S_b : $\mathit{sign}(u_j)$, $|u_j| \geq |l_j|$
$\mathrm{sign}(l_j)$, $|u_j| < |l_j|$

M : 큰 수

여기서 $p(x_j)$를 구하여 이 값의 오름차순으로 구조변수를 정렬한 순서를 구조변수 선택의 순서로 사용한다. $p(x_j)$의 첫번째 항은 희소도에 대한 고려, 두번째 항은 상·하한의 폭에 대한 고려이고, 마지막 항은 목적함수 계수의 값에 대한 고려이다.

4. 일차독립성 판별 방법의 개선

기저열 사이에는 일차독립성이 요구된다. 이를 위해 구조변수의 일차독립성을 판별하기 위한 기존의 방법으로 2절에서 언급한 Bixby가 제안한 발견적 기법이 있다. 그러나, 이 발견적 기법은 일차독립이기 위한 지나치게 엄격한 충분조건으로서 일차독립인데도 초기기저로 선택되지 못하는 변수의 갯수가 많아지는 문제가 있음을 앞에서 언급하였다.

일차독립인 구조변수열이 항상 선택될 수 있게 하기 위해서는 가우스 소거법을 사용하여 수치적인 계산을 행해야 한다. 이 경우 계산량이 많아져서 초기기저 구성에 드는 시간이 증가하는 단점이 있지만, 사용가능한 구조변수는 최대한 사용하게 되므로 인공변수의 수를 최소화할 수 있는 방법이다.

본 연구에서는 가우스 소거법을 효율화하여 수치적 계산을 빠르게 수행할 수 있는 방법과, 수치적 계산을 행하지 않고 일차독립성을 판별하는 발견적 기법으로서 Bixby가 제안한 방법보다 더 많은 구조변수를 사용할 수 있는 방법의 두가지를 제안한다.

가우스 소거법을 개선한 방법

첫번째는 가우스 소거법을 개선한 방법이다. 고전적인 가우스 소거법에서는 초기기저의 구성에 너무 많은 연산시간을 소요하는 문제점이 있음을 말한 바 있다. 그러나, 기저행렬을 상하분해하는 경우, 임의의 구조변수열의 일차독립성을 판별하기 위해 기저역행렬 전체를 곱할 필요가 없고, 단지 하삼각행렬의 역행렬 L^{-1}만을 곱하면 된다. 즉, 현재까지 초기기저로 선택된 열들에 대해 가우스 소거를 적용하여, 선택하려는 구조변수열에

가우스 소거과정을 나타내는 L^{-1} eta-file을 곱하였을때 다음의 선회요소를 선택할 수 있는지의 여부로 일차독립을 판별한다. 이 때, 일차독립성을 판별하려는 각 구조변수열에 대해 필요할 때마다 역행렬 L^{-1}를 곱하여 상삼각행렬의 해당 열을 만들어낼 수 있으므로 상삼각행렬을 유지할 필요도 없어 계산시간을 단축할 수 있다.

이 방법은 최대한 많은 구조변수를 사용할 수 있게 되어 인공변수의 수를 최소화할 수 있는 방법이다. 그러나, 선회연산을 사용하므로 여전히 연산량이 많은 문제는 남아있다.

비중복 비영요소법

가우스 소거를 이용한 방법은 많은 연산량을 필요로 하여 큰 문제의 경우 초기기저의 구성에 많은 시간을 소요한다. 반면 가우스 소거 연산을 사용하지 않는 Bixby의 발견적 기법은 일차독립이면서도 초기기저로 사용하지 못하게 되는 구조변수가 많다. 두 방법의 이러한 이러한 단점을 개선하기 위해 본 연구에서는 선회연산을 통하지 않고 비영요소의 위치로만 일차독립성을 확인하는 발견적 기법인 비중복 비영요소법을 제안한다.

여기서는 다음과 같은 성질을 이용한다.

[성질 1] $A_{rs}=0$, $A_{rt}\neq 0$인 r이 존재하면 $A_{\cdot s}$, $A_{\cdot t}$는 일차독립이다.

이는 $A_{\cdot s}$, $A_{\cdot t}$의 일차결합(Linear Combination)으로 r번째 행에 0을 만들어내기 위해서는 계수가 모두 0일 수 밖에 없다는 사실로부터 자명하다.

이 성질을 k개의 열에 대해 확장하면 다음과 같다.

[성질 2] k>1일 때 k-1개의 열 $A_{\cdot j_1}$, $A_{\cdot j_2}$, …, $A_{\cdot j_{k-1}}$이 일차독립이라고 하자. 여기서 $A_{rj_1}=A_{rj_2}=\cdots A_{rj_{k-1}}=0$이고 $A_{rj_k}\neq 0$인 r이 존재하면 k개의 열 $A_{\cdot j_1}$, $A_{\cdot j_2}$, …, $A_{\cdot j_{k-1}}$, $A_{\cdot j_k}$는 일차독립이다.

[증명] 가정에서 $A_{\cdot j_1}$, $A_{\cdot j_2}$, …, $A_{\cdot j_{k-1}}$이 일차독립이라고 하였으므로, r행에 0을 만들어낼 수 있는 일차결합은 계수가 모두 0인 경우 뿐이다. 그런데, $A_{rj_k}\neq 0$이므로 $A_{\cdot j_1}$, $A_{\cdot j_2}$, …, $A_{\cdot j_{k-1}}$, $A_{\cdot j_k}$의 일차결합으로 r행에 0을 만들어내기 위해서는 계수가 모두 0일 수 밖에 없다.

이러한 성질을 이용하면 비영요소의 값에 대한 고려 없이 비영요소의 위치만으로 일차독립이기 위한 충분조건을 제시할 수 있다. 이 방법은 이전에 초기기저로 선택된 구조변수열과 비교하여 비영요소의 행의 위치가 겹치지 않는 비영요소의 존재 여부로 일차독립성을 판별하므로 비중복 비영요소법으로 일컫기로 한다.

이 방법은 비영요소의 위치로만 일차독립성을 판별하므로, 선회연산이 없어 수행시간이 짧은 장점이 있다. 그러나, 충분조건이므로 성질 1과 2의 역은 성립하지 않아 일차독립이지만 초기기저로 선택되지 못하는 열이 있을 수 있으나, 실험적으로 Bixby가 제안한 발견적 기법보다는 더 많은 구조변수를 초기기저에 포함시킬 수 있음을 이후의 절에서 보이고자 한다. 또, 처음에 선택한 열의 밀집도가 높을수록 조건을 만족하기 어려워지므로, 비중복 비영요소법의 경우 구조변수의 사용순서를 희소도 순서로 하였을 때 인공변수를 더욱 적게 사용하게 된다.

5. 실험을 통한 효율적인 초기기저 선택방법 결정

앞에서 구조변수의 사용 순서와 일차독립성 판별 방법에 대해 Bixby가 제안한 기존의 방법과 본 연구에서 제안한 방법을 언급하였다. 그러면 일차독립열의 선택 방법과 구조변수 사용 순서의

조합에 의해 초기기저를 구성하는 6가지 방법을 고려할 수 있다. 여기에 여유·잉여변수와 인공변수로 초기기저를 구성하는 전통적인 방법을 고려하여 나열하면 다음과 같이 7가지의 초기기저 구성 방법이 있게 된다.

- 여유·잉여변수기저
- Bixby의 일차독립열 선택방법 + 구조변수의 자유도 순서 (Bixby[6]의 제안)
- Bixby의 일차독립열 선택방법 + 구조변수열의 희소도 순서
- 개선된 가우스 소거 방법 + 구조변수의 자유도 순서
- 개선된 가우스 소거 방법 + 구조변수열의 희소도 순서
- 비중복 비영요소법 + 구조변수의 자유도 순서
- 비중복 비영요소법 + 구조변수열의 희소도 순서

여기서 두번째로 나타낸 방법이 Bixby[6]가 제안한 초기기저 구성 방법이다.

NETLIB 문제 73개에 대해 위의 각 방법을 실험하여, 초기기저 구성에 소요된 시간, 인공변수의 갯수, 수행 횟수, 전체 수행시간 등을 나타낸 실험 결과를 요약하여 <표 1>에 나타내었다. <표 1>에서는 여유·잉여변수와 인공변수를 초기기저로 사용한 경우를 기준으로 하여 다른 초기기저 구성방법들의 성능을 비교하였다. <표 1>에 나타난 증가 또는 감소 비율은 각 문제별로 다음과 같이 증감율 r_i를 계산하여 이들을 평균한 결과이다.

$r_i = (b_i - a_i) / a_i$ (여기서 b_i는 비교 대상이 되는 값, a_i는 기준값이다.)

<표 1> 초기기저 구성방법 사이의 비교

	1	2	3	4	5	6	7
수행횟수	0	-18.6%	-22.8%	-31.1%	-34.1%	-23.1%	-31.4%
전체수행 시간	0	-9.8%	-15.3%	-8.1%	-21.0%	-11.0%	-22.2%
초기기저 구성시간	0	+561.9%	+404.0%	+1131.1%	+841.8%	+564.0%	+398.7%
인공변수 갯수	0	-64.1%	-68.5%	-99.2%	-99.2%	-74.9%	-87.1%

1 여유·잉여변수기저
2 Bixby의 일차독립열 선택방법 + 구조변수의 자유도 순서
3 Bixby의 일차독립열 선택방법 + 구조변수열의 희소도 순서
4 개선된 가우스 소거 방법 + 구조변수의 자유도 순서
5 개선된 가우스 소거 방법 + 구조변수열의 희소도 순서
6 비중복 비영요소법 + 구조변수의 자유도 순서
7 비중복 비영요소법 + 구조변수열의 희소도 순서

〈표 1〉에서 보는 바와 같이, 여유 · 잉여변수기저를 이용하는 방법에 비해 구조변수를 사용하는 방법들이 모두 인공변수 갯수와 수행횟수를 크게 줄이는 것으로 나타났다. 개선된 가우스 소거 방법을 이용한 경우는 대부분의 문제에서 인공변수를 하나도 사용하지 않았으며, 따라서 수행 횟수도 많이 줄어든 것을 알 수 있다. 그러나, 개선된 가우스 소거 방법은 다른 방법들에 비해 초기기저 구성 자체에 많은 시간을 소요하는 것을 확인할 수 있다.

일차독립열 선택 방법에 관계없이, 구조변수를 자유도 순서로 사용한 경우보다는 희소도 순서로 사용한 경우에 수행횟수와 수행시간이 줄어든 것으로 나타나, 구조변수의 사용 순서는 본 연구에서 제안한 구조변수열의 희소도 순서가 유리함을 알 수 있다.

수행시간 측면에서는 구조변수열의 희소도순서를 사용하고 비중복 비영요소법으로 일차독립열을 선택하는 경우에 전체 수행시간을 가장 단축하여 여유 · 잉여변수 기저를 사용하는 경우에 비해 약 22%정도의 수행시간 단축 효과가 있는 것으로 나타났다. 구조변수열의 희소도순서를 사용한 경우 개선된 가우스 소거법에서도 21% 정도의 수행시간 단축 효과를 얻은것도 주목할 만하다.

Bixby[6]가 제안한 초기기저 구성방법, 즉 Bixby의 일차독립열 선택방법과 구조변수의 자유도 순서를 사용한 경우와, 본 연구에서 우수한 것으로 판명된 비중복 비영요소법과 구조변수의 희소도 순서를 사용한 경우를 비교해 보면 다음 〈표 2〉와 같다.

〈표 2〉 Bixby가 제안한 초기기저 구성방법과 본 연구에서 제안한 방법의 비교

	Bixby의 제안	본 연구의 제안
수행횟수	0	-12.1%
전체수행시간	0	-12.2%
초기기저 구성시간	0	-8.9%
인공변수의 갯수	0	-52.3%

〈표 2〉에서, 본 연구에서 제안한 방법, 즉 비중복 비영요소법과 구조변수열의 희소도 순서를 사용하는 방법이 Bixby가 제안한 초기기저 구성방법에 비해 수행횟수와 수행시간을 모두 12%정도 단축하는 것으로 나타났다.

7. 결 론

본 연구에서는 효율적인 초기기저 구성방법에 대해 고찰하였다. 일차독립인 구조열을 선택하는 방법으로 Bixby가 제안한 방법 이외에 가우스 소거법을 개선한 방법과 비중복 비영요소법을 설계하였고, 구조변수의 사용 순서로 역시 Bixby가 제안한 변수의 희소도에 기반한 순서 이외에 구조변수열의 희소도에 기반한 순서를 제안하여, 두 항목의 조합으로 이루어지는 초기기저 구성 방법들을 비교 실험하였다.

실험 결과, 전반적으로 구조변수의 희소도 순서를 사용하는 것이 구조변수의 자유도 순서를 사용하는 경우보다 수행횟수와 수행시간면에서 유

리한 것으로 나타났다. 또, 본 연구에서 제안한 비중복 비영요소법과 변수의 희소도 순서를 함께 사용하는 것이 수행 시간면에서 가장 우수한 것으로 나타났으며, Bixby[6]가 제안한 초기기저 구성 방법에 비해서도 인공변수의 갯수와 수행횟수·수행시간을 감소시키는 것으로 나타났다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, 「선형계획법(3정판)」, 민영사, 1992

[2] 박순달, 「OR(경영과학)」, 민영사, 1991

[3] 김우제, "지식기반을 활용한 선형계획법 교육 지원시스템의 개발에 관한 연구", 공학박사학위논문, 서울대학교, 1994

[4] 안재근, "선형계획 프로그램에서의 계산 오차 측정 및 통제에 관한 연구", 공학석사학위논문, 서울대학교, 1994

[5] Bartels. R. H. and G. H. Golub., "The Simplex Method of Linear Programming Using LU Decomposition." Communication of ACM, 12, pp.266-268, 1969

[6] Bixby, R. E., "Implementing the Simplex Method : The Initial Basis", *ORSA J. on Computing*, Vol. 4, No. 2, pp,267-284, 1992

[7] Bixby, R. E., "Progress in Linear Programming", *ORSA J. on Computing*, Vol. 6, No. 1, pp.15-22, 1994

[8] Cormen, T. H., Leiserson C. E. and R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill, New York, 1992

[9] Murtagh, B. A., *Advanced Linear Programming : Computation and Practice*, McGraw-Hill, 1981

[10] Murty, K. G., *Linear Programming*, Wiley, 1983

[11] Reid. J. K., "Fortran Subroutines for Handling Sparse Linear Programming Bases", *Computer Science and Systems Division*, A.E.R.E., Harwell R. 8269 pp. 1-23, 1976

[12] Reid J. K., "A Sparsity-Exploiting Variant of the Bartels-Golub Decomposition for Linear Programming Bases", *Computer Science and Systems Division*, A.E. R.E., Harwell, CSS20 pp.1-23, 1975

[13] Sedgewick, R., *Algorithms*, 2nd ed., Addison Wesley, New york, 1988

[14] Strang, G., *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1988

[15] Tewarson, R. P., "On the Product Form of Inverses of Sparse Matrices", *SIAM Review*, Vol. 8, No. 3, pp.336-342, 1966

[16] Trefethen L. N. and R. S. Schreiber, "Average-case Stability of Gaussian Elimination", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. 11, No. 3, pp.335-360, 1990