

## 무방향 네트워크의 2-터미널 신뢰성 계산을 위한 $K^4$ -chain 축소

홍정식\*

( $K^4$ -chain Reductions for Computing 2-terminal Reliability  
in an Undirected Network)

Jung-Sik Hong\*

### Abstract

For an undirected stochastic network  $G$ , the 2-terminal reliability of  $G$ ,  $R(G)$  is the probability that the specific two nodes (called as terminal nodes) are connected in  $G$ . A typical network reliability problem is to compute  $R(G)$ . It has been shown that the computation problem of  $R(G)$  is NP-hard. So, any algorithm to compute  $R(G)$  has a running time which is exponential in the size of  $G$ . If by some means, the problem size,  $G$ , is reduced, it can result in immense savings. The means to reduce the size of the problem are the reliability preserving reductions and graph decompositions. We introduce a new set of reliability preserving reductions; the  $K^4$  (complete graph of 4-nodes)-chain reductions. The total number of the different  $K^4$  types in  $R(G)$ , is 6. We present the reduction formula for each  $K^4$  type. But in computing  $R(G)$ , it is possible that homeomorphic graphs from  $K^4$  occur. We divide the homeomorphic graphs from  $K^4$  into 3 types. We develop the reliability preserving reductions for 2 types, and show that the remaining one is divided into two subgraphs which can be reduced by  $K^4$ -chain reductions & polygon-to-chain reductions.

---

\* 서울산업대학교

## 1. 서 론

네트워크 신뢰성을 평가하는 가장 일반적인 척도(measure)는  $K$ -터미널 신뢰성 ( $K$ -terminal reliability)이다. 이것은 주어진 네트워크에 있어서 집합  $K$ 에 속하는 특정의 노드들이 서로 교신할(연결될) 확률을 의미한다. 이 척도는 네트워크 시스템의 전반적인 연결도(connectivity)와 생존도(survivability)와 관련된 대표적인 척도로써, 이의 계산 문제는 “NP-hard”임이 입증되었다[3]. 게다가 네트워크 신뢰성의 일반 척도를 계산하는 문제는 최적화 문제(optimization problem)가 아니고 나열 문제(listing problem)이기 때문에 해를 구하는 과정뿐만 아니라 특정하게 주어진 해의 검토 과정도 지수시간(exponential time)을 요구한다.

따라서  $K$ -터미널 신뢰성 계산문제에 대한 연구논문은 크게 두가지로 구분된다. 첫째는 다항 시간에 계산이 가능한 특정 부류의 부분 그래프의 특성화와 이를 위한 각종 기법의 개발이며, 둘째로는 근사적인 해를 찾고자 하는 것이다. 전자로는 다양한 신뢰성 보존축소를 근간으로 하여 연구가 계속되고 있고 [9, 10, 15], 후자는 특수한 그래프에 대한 근사알고리즘 [5, 6] 및 일반 그래프에 대한 근사 알고리즘 [7, 12]이 제시되고 있다. 또한,  $|K|=2$ 이거나  $|K|=|V|$ 인 경우에 한하여, 네트워크 신뢰성을 구하는 연구가 진행되고 있다. 이는  $K$ 가 한정됨으로써 성립되는 다양한 기법에 기인하는 측면도 있으나 [10] 한편으로,  $|K|=2$ 인 경우는, 다양한 네트워크의 임무가 주로 2개의 터미널간의 연결로써 완수되는 경우가 많기 때문이다. 또한 신뢰성 블록도에서 시스템 신뢰성을 구하고자 할 때, 주어진 블록도를 네

트워크로 변환하면 시스템 신뢰성은 변환된 네트워크의 2-터미널 신뢰성에 해당된다[1]. 본 논문은  $|K|=2$ 인 경우의 네트워크 신뢰성을 구하고자 하며, 그 접근방법은 앞서 언급한  $K$ -터미널 신뢰성 연구방법의 두가지 접근방법 중, 전자를 취하고자 한다.

전자에 속하는 논문의 공통된 특징은 2-터미널 신뢰성 계산문제를 다루는데 있어 전체문제의 크기를 부분문제로 쪼개어서 각각을 독립적으로 다루어 부분문제의 해를 구하고 이를 토대로 전체문제의 해를 직접 구해내고자 하는 것이다. 이러한 접근방법에 있어 쪼개는 과정과 부분문제 풀이과정 그리고 결합하는 과정의 특성에 따라 크게 두가지 방식이 연구되고 있는데 이들은

- (1) 신뢰성 보존 축소 (reliability preserving reduction)
- (2) 그래프 분해 (graph decomposition)로 분리운다[2].

본 논문에서 우리는  $K^1$ -chain 축소라는 새로운 신뢰성 보존 축소를 도입하고 각각에 대한 축소 수식을 제시한다. 이는 기존의 wheatstone bridge 축소를 특수한 형태로 포함하고 있으며[8], 이론적으로는 3-연결분해 (tri-connected decomposition) 기법 중 특수한 형태의 3-연결 요소 (tri-connected component)를 명시적으로 축소 수식화했다고 할 수 있다.

2절에서 신뢰성 보존 축소와 그래프 분해를 알고리즘 구현 (algorithm implementation)이라는 관점에서 고찰하여  $K^1$ -chain 축소의 의미를 기술할 것이며 3절에서는  $K^1$ -chain 축소의 기본 6가지 형태와 각각에 대한 축소 수식을 유도하고 4절에서는 3절의 기본적인  $K^1$  형태에 덧붙여서  $K^1$ 와 동형(homeomorphic)인 그래프들의 형태를 기술하고 이를 3가지 타입으로 나

누어, 2가지 경우에 대해서는 축소 수식을 제시하고, 나머지 한 경우는 일반적인 팩토링 (factoring) 알고리즘을 실시하여 3절에서 제시된  $K^1$ -chain 축소가, 적용 가능한 그래프로 나누어지는 과정을 보인다. 5절에서는 3절과 4절에서 제시된 축소 수식을 기존의 팩토링 알고리즘에 추가하여, 2-터미널 신뢰성을 효율적으로 계산하는 알고리즘을 제시한다. 마지막으로 6절에서는 본 논문의 결과를 요약하고 추후 연구방향을 기술한다.

용어 정의

- $V$  : 노드들의 집합  $\{v_1, \dots, v_m\}$
- $E$  : 노드들의 무순서쌍으로 이루어진 에지 (edge)들의 집합  $\{e_1, \dots, e_n\}$
- $G(V, E)$  :  $V$ 와  $E$ 로 이루어진 무방향 그래프
- $\{v_s, v_t\}$  : 연결시키고자 하는 터미널 노드들
- $X_i$  : 에지  $e_i$ 의 상태변수,  $e_i$ 가 작동이면,  $X_i=1$   
 $e_i$ 가 고장이면,  $X_i=0$
- $p_i$  :  $P_i (X_i=1)$
- $q_i$  :  $1-p_i$
- $N=[G(V,E), \{v_s, v_t\}, p_i, i \in E]$  : 그래프  $G$ 와 에지의 작동확률  $p_i$  그리고 연결시키고자 하는 노드들의 집합  $\{v_s, v_t\}$ 로 이루어진 네트워크
- $R_{st}(G)$  : 그래프  $G$ 에서  $v_s$ 와  $v_t$ 가 서로 연결이 이루어질 확률 (간단히,  $R(G)$ 로 표기)
- $G_{*i}$  : 그래프  $G$ 에서 에지  $i$ 를 제거하고  $i$ 의 양인접 노드들을 서로 결합하여 생성된 그래프
- $G-i$  :  $G$ 에서 에지  $i$ 를 제거한 그래프
- $F$  : 에지들의 상태를 나타내는 상태 벡터
- 분리 그래프 (separable graph) : 특정 노드를 제거함으로써 2개 이상의 콤포넌트로 분리되는 그래프

- chain : 서로 인접한 노드와 에지의 집합으로 내부 노드는 차수(degree)가 2이고 경계 노드는 차수가 3이상임.
- polygon : 경계 노드를 공유한 chain으로 이루어진 그래프
- $R^4$  : 4개의 노드와 이들간을 모두 연결한 에지로 이루어진 완전 그래프.

## 2. 신뢰성 보존 축소와 그래프 분해

2-터미널 신뢰성 계산문제를 입·출력 형태로 표현하면 다음과 같다.

[P] 입력 :  $N=[G(V, E), p_i, \{v_s, v_t\}]$   
출력 :  $R(G)$

문제 [P]에서  $R(G)$ 를 구해 나가는데 있어 [P]를 부분문제로 쪼개어 독립적으로 풀 다음 결합하여  $R(G)$ 를 계산해 나가는 과정은, 팩토링 수식으로 알려진 다음 식에 근거하고 있다.

$$R(G) = p_i R(G_{*i}) + q_i R(G-i) \tag{1}$$

식 (1)은 확률론 관점에서 Bayes 정리의 한 형태이다.  $G_{*i}$ 와  $G-i$ 는  $G$ 보다 크기가 작은 분지이므로 이들 각각에 대해 계산을 한 다음 (1)식에 의거하여  $R(G)$ 를 구하는 것이다.

그러나 이러한 과정은 보다 단순해진 부분분지에 대한 효과적인 풀이 과정 없이는  $2^n$ 개의 모든 상태를 전개하므로 의미가 없다고 하겠다. 신뢰성 보존 축소는 그래프  $G$ 의 특정 부분 그래프를 보다 단순한 형태의 부분 그래프로 축소하는 것으로 다음과 같이 일반적으로 표현된다[14,15].

$$R(G) = \Omega_1 + \Omega_2 R(G') \tag{2}$$

여기서  $G'$ 는  $G$ 보다 단순화된 그래프이며  $R(G)$ 를 구하는 관점에서 볼 때  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 는  $G$ 를  $G'$ 로 축소하는 과정에서 생겨나는 인자이다. 자세한 내용은 [15]를 참조하라.

2-터미널 신뢰성의 경우, 현재까지 개발된 신뢰성 보존축소는 series-parallel 축소(이하, s-p 축소로 표기)와 polygon-to-chain 축소(이하, poly-chain 축소로 표기)이다. 이에 관한 자세한 사항은 [14]를 참조하라. 이러한 축소 수식의 개발에 따라 직-병렬 그래프에 대해서는 선형 시간 알고리즘(linear time algorithm)이 개발되었다 [2, 14]. 일반 그래프에 대해  $R(G)$ 를 구하고자 할 때는 이들 축소 수식들이 서브루틴으로 작용하여  $G$ 의 크기를 줄여나가고 더이상 축소가 가능치 않을 때는 식 (1)로 그래프를 분해한 후 다시금 신뢰성 보존 축소를 시행한다. 이러한 과정에 의해  $R(G)$ 를 계산하는 알고리즘들은 팩토링 알고리즘으로 불린다.

그래프 분해는 그래프 이론에서 확립된 2-연결분해(bi-connected decomposition)와 3-연결분해(tri-connected decomposition)에 근거를 두고 있다. 이론적으로는  $n$ -연결분해도 가능하나 부분문제의 쪼갬과 결합문제 자체가  $n$ 의 지수항으로 증가함으로 현재까지는 3-연결분해까지 의미있게 연구되고 있다[14]. 2-연결분해의 경우 결합의 작용이 매우 간단하므로 간단히 알고리즘으로 구현되었다[7]. 그런데 3-연결분해의 경우 쪼갬후에 각 부분문제를 결합시키기 위해, 독립적으로 푸는 과정을 수행할 때 각 부분문제에 대해 최대 6개까지 풀어야 하는 난점과 결합과정의 복잡함으로 아직 알고리즘으로 구현되지 않고 있다. 또한 그래프 분해는 신뢰성 보존 축소처럼 직접적(straightforward)으로 문제의 크기를 줄이는 것이 아니고 단순히 그래프를 부분 그래프로 나누는 작용만을 함으

로  $R(G)$ 를 식 (1)과 같이 풀때 알고리즘의 2원 백트랙 구조(binary backtrack structure)를 유지시키지 못하는 단점이 있다. 그러므로 부분문제로 쪼갬 후에 결합작용을 간단히 수행하고 팩토링 알고리즘과 함께 2원 백트랙구조를 유지하기 위해서는 그래프 분해로 인해 생겨나는 특정 부분 그래프를 바로 단순한 형태의 부분 그래프로 치환하는 신뢰성 보존 축소의 개발이 보다 바람직하다. 현재까지 신뢰성 보존 축소가 더 이상 불가능한 최소 형태의 3-연결 콤포넌트는  $K^4$ 이다[13]. 따라서 2-터미널 신뢰성을 구하고자 할때 등장하게 되는, 가능한  $K^4$ 의 형태를 고찰하고 이의 축소 수식을 개발하는 것은 매우 의미있는 작업이 된다.

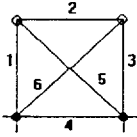
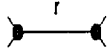
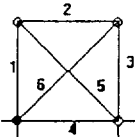
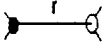
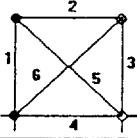
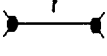
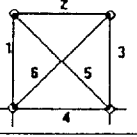
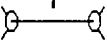
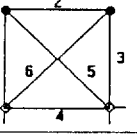
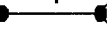
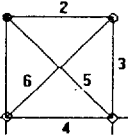

### 3. $K^4$ -chain 축소 형태 및 축소 수식

문제  $[P]$ 를 풀어나가는 데 있어 기존의 축소 수식 중 s-p 축소를 수행한후 그래프를 3-연결분해를 할 경우 이들 3-연결 콤포넌트에서 생겨나는  $K^4$ 의 형태는 다음 성질 3-1과 같다.

성질 3-1 : 문제  $[P]$ 에 있어서  $G$ 는 비분리 그래프이다. 이때 주어진 그래프  $G$ 는 s-p 축소와 poly-chain 축소를 더 이상 허용하지 않는 비분리 그래프이다 그리고  $G$ 의 3-연결 콤포넌트중 하나가  $K^4$ 이다. 그러면  $K^4$ 의 형태는 <표 1>에 나와있는 다음 6가지 중 하나이다.

(증명)  $K^4$ 의 부류는 우선 경계 노드들이  $v^s$ 나  $v^t$ 와 일치하는지 여부에 의해서 나누어진다. <표 1>에서  $v^s$ 와  $v^t$ 는 까만 노드로 표시되어

〈표 1〉 K<sup>4</sup>-chain 축소 수식

K <sup>4</sup> 형태	chain 형태	축소 수식	새로운 에지의 신뢰성과 변환계수
<p>1.</p> 		$\alpha = p_2 p_3 p_5 q_1 q_4 q_6 + p_1 p_2 p_6 q_3 q_4 q_5 + p_1 p_6 q_2 q_3 q_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 q_4 q_5 q_6 + p_1 p_3 q_2 q_4 q_5 q_6 + p_2 p_3 q_1 q_4 q_5 q_6 + p_2 p_5 q_1 q_3 q_4 q_5 + p_3 p_5 q_1 q_2 q_4 q_6 + p_5 p_6 q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 \left( \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \frac{p_5}{q_5} + \frac{p_6}{q_6} \right) + q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6$ $\delta = 1 - \alpha$	$p_r = \frac{\delta}{\alpha + \delta}$ $\Omega = \alpha + \delta$
<p>2.</p> 		<p>1과 동일</p>	<p>1과 동일</p>
<p>3.</p> 		$\alpha = p_2 p_3 p_5 q_1 q_4 q_6 + p_2 p_3 q_1 q_4 q_5 q_6 + p_3 p_5 q_1 q_2 q_4 q_6 + p_2 p_5 q_1 q_3 q_4 q_6 + p_5 p_6 q_1 q_2 q_3 q_4 + p_5 q_1 q_2 q_3 q_4 q_6$ $1 - \alpha - \delta = q_1 q_2 q_5 + p_2 p_4 q_1 q_3 q_5 q_6 + p_2 q_1 q_3 q_4 q_5 q_6$	<p>1과 동일</p>
<p>4.</p> 		<p>1과 동일</p>	<p>1과 동일</p>
<p>5.</p> 		$\alpha = p_1 p_3 q_2 q_4 q_5 q_6 + p_5 p_6 q_1 q_2 q_3 q_4$ $1 - \alpha - \delta = q_1 q_2 q_5 + p_1 q_2 q_3 q_5 q_6 + p_5 q_1 q_2 q_3 q_6 + p_5 q_2 q_3 q_6$	<p>1과 동일</p>
<p>6.</p> 		$\alpha = p_2 p_3 p_5 q_1 q_4 q_6 + q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 \left( \frac{p_2 p_3}{q_2 q_3} + \frac{p_2 p_5}{q_2 q_5} + \frac{p_3 p_5}{q_3 q_5} + \frac{p_5 p_6}{q_5 q_6} \right) + p_5 q_1 q_2 q_3 q_4 q_6$ $\beta = p_1 p_2 p_6 q_3 q_4 q_5 + q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 \times \left( \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} + \frac{p_1 p_3}{q_1 q_3} + \frac{p_3 p_6}{q_3 q_6} + \frac{p_2 p_6}{q_2 q_6} \right)$ $1 - \alpha - \delta = q_1 q_2 q_5 + p_2 p_4 q_1 q_3 q_5 q_6 + p_2 q_1 q_3 q_4 q_5 q_6$	$p_r = \frac{\delta}{\alpha + \delta}$ $p_s = \frac{\delta}{\beta + \delta}$ $\Omega = \frac{(\alpha + \delta)(\beta + \delta)}{\delta}$

있다. <표 1>에서 보듯이, 경계 노드가 둘다 까만 노드인 경우가 첫째 경우이고, 경계 노드들중 하나만이 까만 노드인 경우는, 나머지 내부 2개의 노드중 하나가 까만 노드인 경우와 그렇지 않은 경우(형태 2와 3)로 나뉜다. 그리고 경계 노드들이 둘다 흰 노드인 경우, 나머지 내부 2개의 노드가 둘다 흰 경우와 둘다 까만 경우 그리고 하나만 까만 노드인 경우(형태 4, 5, 6.)3가지가 된다. 따라서 서로 다른  $K^4$  형태의 총 경우는 6가지가 된다.

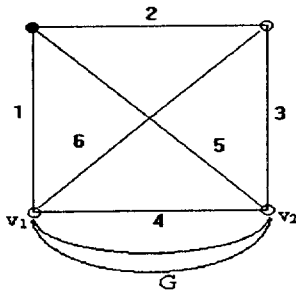
성질 3-1에 따라 각 형태에 대한 축소 수식을 구축한 것이 <표 1>에 나와 있다. 각 축소 수식의 증명은 아래의 정리3-1에 나와 있다.

정리 3-1: 문제 [P]에 있어서 비분리 그래프  $G$ 의 3-연결 컴포넌트가  $K^4$ 중  $j$ 번째 형태이다.  $G'$ 는  $j$ 번째  $K^4$ 를 해당 chain  $j$ 로 대체하고 <표 1>에서 정의된 신뢰성을 chain의 에지 신뢰성으로 대체한 후 얻어진 그래프이다. 이때  $\Omega_j$ 는 해당 변환 요소이다. 그러면  $R(G)=\Omega_j R(G')$

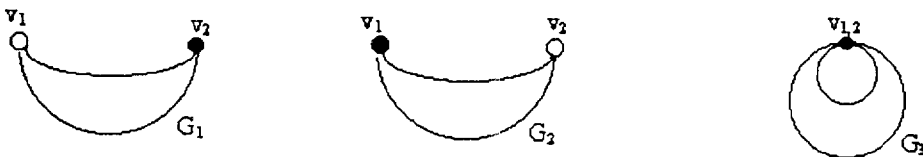
(증명) 변환된 chain의 길이가 2로 가장 일반

적인 형태인 <표 1>의 6번째 경우의 축소 수식을 증명한다. 나머지는 유사한 방식으로 증명 가능하다.

편의상  $i$ 와  $\bar{i}$ 는 각기 에지  $i$ 가 작동과 작동 중지를 나타낸다. 그래프  $G$ 의 3-연결 컴포넌트인  $K^4$ 의 총가능한 상태는  $2^6=64$ 개이다. 이를 동등부류로 묶고 시스템 고장으로 판명되는 상태를 제거하면 [그림 1]의 (b)와 같다. [그림 1]에서 8개의 상태는 시스템 고장이며 나머지 56개 상태가 3개의 동등부류로 나누어졌다. 예로, 에지 2,3,5는 작동이고 에지 1,4,6은 고장인 상태를  $F_1$ 이라 하자. 그리고 에지 2,3은 작동이고 에지 1,4,5,6이 고장인 상태를  $F_2$ 라 하면  $F_1$ 과  $F_2$ 는 시스템 연결의 그래프적인 상태가 동일한 동등부류([그림 1 (b)]의  $G_1$ )로 묶여지며 이러한 경우의 확률을 모두 합한 것이  $\alpha$ 이다. 그리고  $1\ 2\ 3\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{6}$ ,  $1\ 2\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{6}$ ,  $1\ 3\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{6}$ ,  $3\ 6\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{5}$ , 그리고  $2\ 6\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{5}$ 에 해당되는 에지상태는 모두 [그림 1 (b)]의  $G_2$ 에 해당되며 이 경우의 확률을 합해 놓은 것이  $\beta$ 이다.

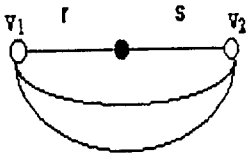


(a) 형태 6인  $K^4$ 를 갖는 그래프

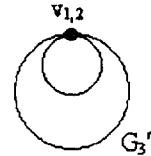


(b) 그래프  $G$ 에서 에지 1,2,3,4,5,6에 피봇을 한 3개 동등부류를 통합해 유도된 그래프

[그림 1] 증명에서 그래프



(a)  $K^4$ 를 Chain으로 대치한 그래프  $G'$



(b)  $G'$ 에서 에지 r,s에 피봇을 한 후 생성된 그래프

[그림 2] 증명에서 그래프

마찬가지 방식으로 [그림 1 (b)]의  $G_3$ 에 해당되는 에지상태의 확률을 합한 것이  $\delta$ 이다.

베이스(Bayes) 정리에 따라

$$R(G) = \alpha R(G_1) + \beta R(G_2) + \delta R(G_3) \quad (3)$$

이와 같은 작업을  $G'$ 에 대해서 행하면 다음과 같다 (그림 2)를 참조하라.

$$R(G') = q_r p_s R(G_1') + p_r q_s R(G_2') + p_r p_s R(G_3') + q_r q_s \cdot O \quad (4)$$

신뢰성 보존 축소가 이루어지기 위해서는 베이스 정리에 따라 전개된 식 (3)과 식 (4)의 각항의 계수가 일치하여야 한다. 4개 수식과 미지수 3개이므로 변환요소  $\Omega$ 를 고려하면,

$$\Omega R(G') = \Omega q_r p_s R(G_1') + \Omega p_r q_s R(G_2') + \Omega p_r p_s R(G_3') \quad (5)$$

(3)과 (5)으로 부터,

$$\begin{aligned} \alpha &= \Omega q_r p_s & \beta &= \Omega p_r q_s \\ \delta &= \Omega p_r p_s \end{aligned} \quad (6)$$

(6)식을 풀면,

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\delta}{\alpha + \delta} \\ p_s &= \frac{\delta}{\beta + \delta} \end{aligned}$$

$$\Omega = (\alpha + \delta)(\beta + \delta) / \delta \quad \text{Q.E.D}$$

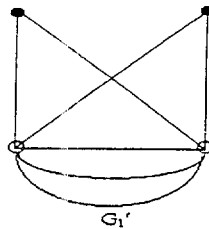
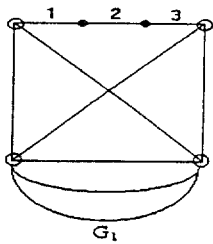
노트 1. <표 1>에서 형태 2인  $K^4$ 를 chain으로 바꾼 경우는 기존의 wheastone bridge 축소에 해당된다.

2.  $K^4$ 에  $v_s$  와  $v_r$ 가 둘다 있는 경우, 이들을 잇는 에지를  $e_1$ 이라 하자. (<표 1>의 3번째의 경우). 그러면  $R(G) = p_1 + q_1 R(G-1)$ 로 축소될 수 있다. 그리고, 기존의 poly-chain 축소를 2번 적용하면 처음의  $K^4$ 가 제거된 상태가 된다. 그러므로 보다 더 실질적인 의미가 있는 경우는 <표 1>의 2, 4, 6 세가지이나, 나머지 세경우도 축소횟수를 줄이는 효과가 있다.

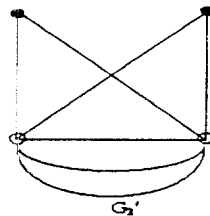
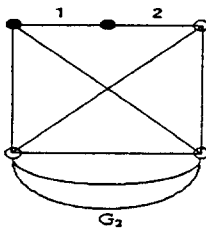
### 4. $K^4$ 와 동형인 그래프의 신뢰성 보존 축소

$K^4$ 와 동형인 그래프들은 정의상 그래프적인 관점에서만 보면  $s$ -대체(replacement)에 의해  $K^4$ 로 되는 그래프들이다[13]. 그런데 확률의 의미가 들어가는 터미널 노드들이 동형 그래프의 차수가 2인 노드들을 이룰때  $s$ - $p$ 축소에 의

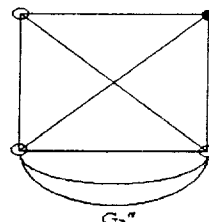
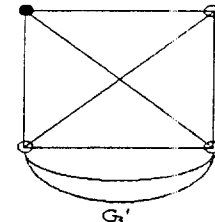
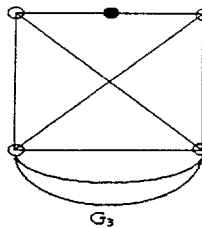
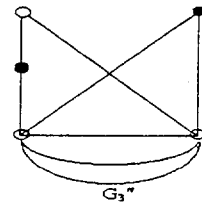
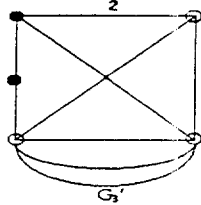
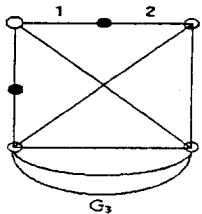
해  $K^4$ 로 축소 불가능한 경우가 생긴다.  $K^4$ 와 동형인 이러한 그래프들은  $v_s$ 와  $v_t$ 가 나타나는 형태에 따라 [그림 3]에서와 같이 3가지 경우로 나누어진다. 이들 중 (a)와 (b) 두가지 경우는 축소가 가능하다. 우선 [그림 3]의 (a) 경우를 보자. 에지 2에 피봇을 가하면,  $R(G) = p_2 \cdot 1 + q_2 p_1 p_3 R(G')$ 가 된다. 즉 신뢰성 보존 축소의 일반 형태인 식(2)에서  $\Omega_1 = p_2$  이고  $\Omega_2 = p_2 p_1 p_3$ 인 경우가 된다. 다음 [그림 3]의



(a)  $v_s$ 와  $v_t$ 가 하나의 chain에 속할 경우



(b)  $v_s$ 와  $v_t$  둘 중 하나만 차수가 2이고 둘다  $K^4$ 에 속한 경우



(c)  $v_s$ 와  $v_t$  둘다 차수가 2이고  $K^4$ 에 속한 경우와 하나만 차수가 2이고  $K^4$ 에 속한 경우

[그림 3]  $K^4$ 와 동형인 그래프의 3가지 형태



(b) 경우를 보자. 에지 1에 피봇을 가하면,  $R(G_2) = p_1 + q_1 p_2 R(G_2')$ 가 된다. 마지막으로, (C)의 경우는 에지 1에 피봇을 가하면,  $R(G_3) = p_2 R(G_3') + q_1 p_2 R(G_3'')$ 가 된다. 여기서,  $v_s$ 와  $v_t$ 를 이루는 나머지 하나의 노드가 마찬가지로  $K^4$  내의 차수가 2인 노드이면  $G_3'$ 는 (b)의 경우가 되고, 그렇지 않은 경우는 기본적인  $K^4$  형태 중 하나가 된다.

따라서,  $K^4$ 와 동형인 그래프들은 그 형태에 따라 바로 축소가능한 경우가 있고, 최악의 경우 최대 2번의 피봇에 의해 축소가능한  $K^4$ 를 갖는 그래프를 생성해 낸다.

### 5. $K^4$ -chain 축소와 팩토링 알고리즘

팩토링 알고리즘은 팩토링 정리 식(1)을 기반으로 한 순환적 (recursive) 알고리즘이다. 전술한 바와 같이 최근의 신뢰성 보존 축소의 새로운 확립에 따라 팩토링 알고리즘은 현재 가장 효율적인 알고리즘으로 알려져 있다.

팩토링 알고리즘의 두 요체는, (a) 사용되는 신뢰성 보존 축소 형태들의 집합인 R과 (b) 피봇되는 에지의 선택 전략 S이다. 최적 에지 선택 전략  $S^*$ 는 R에 따라 정해진다[4, 14]. 이제 3절과 4절에서 6가지 형태의  $K^4$ -chain 축소 수식과 2가지 형태의  $K^4$ 와 동형인 그래프에 대한 축소 수식을 확립 하였으므로 이것이 기존의 R에 더해질 수 있다. 그런데  $K^4$ -chain 축소에 따른 그래프 invariant가 알려져 있지 않으므로 우리는 기존 에지 선택 전략보다 우월한 전략을 찾기보다 축소 수식의 순서 (sequence)를 규정함으로써 팩토링 알고리즘의 효율성을

높이고자 한다. 일반적인 2-터미널 신뢰성을 계산하고자 할 때 2-연결분해를 사용하여 비분리 그래프만을 팩토링 알고리즘의 입력으로 한다 [11]. 핵심이 되는 신뢰성 보존 축소는 s-p 축소와 poly-chain 축소 그리고 3절과 4절에서 확립된  $K^4$ -chain 축소이다. (나머지 형태의 축소는  $|K|=|V|$ 일때 그리고 2-연결분해를 활용하지 않는 경우에 유효한 축소이다[9, 10].)

이러한 4가지 형태의 축소의 순서를 다음과 같이 정하고자 한다.

즉 순서규칙 (Sequence Rule, SQR) 4-1 :

첫째 s-p 축소

둘째  $K^4$ -chain 축소

셋째 poly-chain 축소 순으로 축소 수식의 순서를 정한다.

이와 같은 순서규칙은 알고리즘에 간단히 구현될 수 있다.  $K^4$ -chain 축소를 poly-chain 축소에 앞서 수행하는 이유는 poly-chain 축소를 먼저 수행할 경우 기본적인  $K^4$  형태대신 동형의  $K^4$  그래프가 나올 가능성이 있기 때문이다. 이에 따라 팩토링 알고리즘은 (R,  $S^*$ , SQC)로 이루어진다. 문제 [  $P_1$  ]과 이에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

문제

입력 :  $N = [G, p, \{v_s, v_t\}]$

[  $P_1$  ]       $G$  : 비분리 그래프

출력 :  $R(G)$

알고리즘 :

procedure RELY (G)

while G has s-p edges do s-p reduction ;

return RELY(G)=RELY(G')

while G has  $K^4$  types do  $K^4$ -chain reduction ; return RELY(G) =  $\Omega$ RELY(G')

while G has homeomorphic  $K^4$  types,

then if the type of homeomorphic  $K^4$

```

is (a) or (b) in [ fig 3], ; return
RELY(G) =  $\Omega_1 + \Omega_2$  RELY(G'),
else ; return RELY(G) =  $p_1$ RELY(G')
+  $q_1 p_2$ RELY(G'')
while G has polygons do poly-chain re-
ductions ; return RELY(G) =  $\Omega$  RELY(G')
if G is a tree then return RELY(G) =  $\prod_{i \in G} p_i$ 
else
begin
choose any edge i satisfying S*
return RELY(G) =  $p_i$ RELY(G+i) +
 $q_i$ RELY(G-i)
end

```

이 알고리즘에서 R은 앞서 논한 축소에  $K^4$ -chain 축소를 더한 집합이고 S\*는 Wood [14]의 에지 선택 전략을 따르며 SQC는 순서규칙 4-1을 따른다.

## 6. 결 론

본 논문에서 우리는 기본적인  $K^4$ 의 경우 6가지 형태의  $K^4$ -chain 축소를 도입하고 각각에 대해 축소 수식을 확립하였다. 그리고 3가지 형태의  $K^4$ 와 동형인 그래프에 대해 2가지는 축소 수식을 제시하고 나머지 한 경우는 피봇을 통해  $K^4$ -chain 축소가 가능한 기본적인  $K^4$ 가 도출됨을 입증하였다. 이것은 알고리즘 구현이 어려운 3-연결 분해 기법을 피하여 특정 3-연결 콤포넌트를 chain으로 곧바로 축소하는 방법이며, 기존의 wheatstone bridge 축소를 [8] 6가지  $K^4$  형태중 하나로 포함한다. 그리고 기존 축소 수식과 함께 축소 형태간에 적용 순서규칙을 정하여 팩토링 알고리즘으로 구현하였다.

이에 따라 특정 그래프에 대해서는 기억용량의 일정 증가와 함께 시간상 매우 효율적으로 R(G)를 구해낸다.

본 논문과 관련된 다음 사항은 추후 연구될 필요가 있다.

(1)  $K^4$ -chain 축소와 관련된 그래프 invariant와 최적 피봇에지의 선택

(2) 기존의 s-p 축소, poly-chain 축소와 본 논문에서 제시된  $K^4$ -chain 축소에 따라 단일 에지로 축소가 가능한 그래프의 특성화

## 참 고 문 헌

1. 이창훈, 김명규, 이상천, (1994) "팩토링 기법을 이용한 신뢰성 구조도의 신뢰도 계산 알고리즘", 대한산업공학회지, 9월 pp.3-14
2. Agrawal, A., "Reliability Analysis of Rooted Directed Networks", Ph.D. Dissertation, Department of IEOR, Univ. of California, Berkeley. (1982)
3. Ball, M.O., "Computational Complexity of Network Reliability Analysis. An Overview" IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-35, (1986) pp.230-239.
4. Chang M.K., "A Graph Theoretic Appraisal of the Complexity of Network Reliability Algorithms", Ph.D. Dissertation, Department of IEOR, Univ. of California, Berkeley. (1981)
5. Feo, T.A. and R. Johnson, "Partial Factoring: An Efficient Algorithm for Approximating 2-Terminal Reliability on Complete Graphs", IEEE Trans. on Re-

- liability, Vol. 39, (1990) pp.290-295
6. Feo, T.A. and J.S. Provan, "DELTA-WYE Transformations and the Efficient Reduction of Two-Terminal Planar Graphs", Operations Reserach, Vol. 41, (1993) pp.572-582
  7. Harms, D. and C.J. Colbourn, "Renormalization of Two-Terminal Reliability", Networks Vol. 23, (1993) pp.289-297
  8. Johnson, R., "Some Combinatorial Aspects of Network Reliability", Ph.D. Dissertation, Department of IEOR, Univ. of California, Berkeley (1982)
  9. Lingner, G.T., T. Politof and A. Satyanarayana, "A Forbidden Minor Characterization and Reliability of a Class of Partial 4-Trees", Networks, Vol. 25, (1995) pp.139-146
  10. Politof, T., "A Characterization and Efficient Reliability Computation of  $\Delta$ -Y Reducible Networks," Ph.D. Dissertation, Department of IEOR, Univ. of California, Berkeley. (1983)
  11. Resende, L. I. P., "Extensions to Poly-Chain : Nonseparability Testing and Factoring Algorithm", Tech. Report ORC 85, Univ. of California, Berkeley, Operations Research Center. (1985)
  12. Strayer, H.J. and C.J. Colbourn, "Consecutive Cuts and Paths, and Bounds on K-Terminal Reliability", Networks, Vol. 25, (1995) pp.165-175
  13. Wagner, D. K., "Forbidden Subgraphs and Graph Decompositions", Networks, Vol. 17, (1987) pp.105-110
  14. Wood, R.K., "Polygon-to-chain Reductions and Extentions for Reliability Evaluation on Undirected Networks", Ph.D. Dissertation, Department of IEOR, Univ. of California Berkeley, (1982)
  15. Wood, R.K., "Factoring Algorithms for Computing K-terminal Network Reliability", IEEE Trans. on Reliability, R-35, (1986) pp.269-278.