韓國經營科學會誌
第21卷 第3號
1996年 12月

제조시스템에 있어서 불균형의 효율성*

김성철**

On the Efficiency of Imbalance in a Class of Manufacturing Systems*

Sung Chul Kim**

Abstract

In this paper, the problem of simultaneously allocating servers and loadings of stations in a class of manufacturing systems modelled as network of queues is considered. The throughput function of the closed network of queues is demonstrated as a Schur convex function of server allocation, that is, increasing the server allocation vector under majorization increases the performance in the shop in terms of the throughput. It also reduces the congestion in the open network of queues in terms of reducing the total number of jobs in the sense of likelihood ratio ordering. These are the extentions of the numerical result of Green and Guha(1995) in the service system with independent M/M/c systems to the network of queues. The results can be used to support production planning in certain manufacturing systems.

1. 서 론

기업의 경쟁력 확보를 위하여 제조시스템(manufacturing system)은 그 중요성을 더하여 가고 있다. 다양한 공정과 경로를 요하는 부품(part)들로 구성된 제조시스템의 효율적인 운영을 위하여는 각각의 작업장에 적절한 작업자의 배치, 기능별 기계들의 능력 조정, 또는 다양한 공정을 그들의 기계공구(tools)와 함께 각각의 작업장(station)에 할당하는 등의 효과적인 기술선택, 설비계획, 능력계획, 생산계획 등이 생산 전에 결정되어야 하며 이러한 다양한 전략적 의사결정의 질은 기업의 성패에 지대한 영향을 주게 된다. 본 논문에서는 대기네트워크(queueing network)로 모형화된 제조시

* 본 논문은 1995년도 덕성여자대학교 자체학술연구 조성비의 지원으로 연구되었음.
** 덕성여자대학교 경영학과 교수

스템에 있어서 이러한 생산전 계획(pre- production planning)과 관련되는 의사결정 중에서 서버(server)와 부하(loading)의 동시적 배분에 관한 문제를 다루고자 한다.

제조시스템은 일정한 수의 작업장으로 구성되어 있으며 주어진 일정한 수의 서버는 각 작업장에 배분되어 작업장은 최소한 하나 이상의 서버로 구성된다. 또한 각각의 작업물에 대하여는 제조시스템내에서 수행되어야 할 일의 양이 주어져 있으며 만약 제조되어야 할 제품의 종류와 그들의 상대적인 생산량이 결정되어 있다면 생산품의 공정믹스로 부터 수행을 요하는 각각의 공정의 양이 결정될 수 있고 주어진 공정들은 각각의 작업장에 할당된다. 각 작업장은 공정소요시간이 다른 일련의 공정들을 수행하게 되며 각 작업장에서의 부하는 주어진 작업장에 할당된 각 공정들에 대하여 작업물의 수와 공정소요시간의 곱을 모든 공정에 대하여 더하므로써 산정될 수 있으며, 이는 주어진 작업장에서 요구되는 일의 양으로 해석될 수 있다. 본 논문에서는 주어진 서버의 배분과 부하의 할당에 따른 시스템의 수행도와의 관계를 설정하고 이의 불균등 배분의 효율성을 수치적 결과(numerical results)에 의하여 제시하므로써 제조전략을 수립하는데 필요한 구조를 제시하고자 한다. 여기에서 불균등 배분의 효율성이란 서버의 배분이 불균등한 경우에는 불균등부하가 최적부하가 되며 서버의 배분에 있어서는 좀 더 불균등한 배분이 주어진 서버배분하에서의 최적부하에 대하여 제조시스템의 수행도가 증대됨을 의미한다. 그러므로 가장 불균등한 서버배분하에서의 제조시스템의 수행도가 가장 높다고 할 수 있다.

대기네트워크에 있어서 서버배분과 부하에 관한 문제는 각각 독립적으로 다양한 문헌에서 고려되어 왔다. 먼저 최적부하에 관한 문제는 Shanthikumar (1982), Shanthikumar와 Stecke(1986), Yao와 Kim(1987a,b) 등 다양한 문헌에서 찾아 볼 수 있으며, 각 작업장에서의 서버의 수와 관련되어 각 작업장에서의 서버의 수가 같으면 균등부하 그렇지 않으면 불균등부하가 최적부하가 됨을 제시하고 있다. 서버배분과 관련지어서는 Shanthikumar와 Yao(1988)은 폐쇄대기네트워크(closed queueing network)에 있어서 높은 부하의 작업장에 더 많은 서버가 배분될 때 최적임을 보였으며 최적서버배분을 위한 휴리스틱 방법을 제시하였다. 또한 Calabrese(1991)는 개방대기네트워크(open queueing network)에 있어서 주어진 서버를 적은 그룹에 배분할 때 즉 작업장의 수를 적게 할 때(server pooling) 수행도가 높아짐을 보였다. 서버배분에 관한 다양한 결과는 외에도 Dallery와 Stecke(1990), Shanthikumar와 Yao(1987) 등에서도 찾아 볼 수 있다.

이러한 다양한 서버배분과 부하에 관한 결과에도 불구하고 대기네트워크에 있어서 서버와 부하의 동시적 배분에 관한 문제는 지금까지 다루어지지 않았으며, Green과 Guha(1995)는 극히 최근에 서로 독립적인 일정한 수의 M/M/c 대기시스템들로 구성된 시스템에 있어서 서버배분과 주어진 서버배분에 대한 최적부하를 동시에 고려하여 서버배분이 불균등 배분이 될수록 시스템의 수행도가 향상되며 결과적으로 majorization ordering을 만족시킬 수 있음을 수치적 결과에 의하여 제시하고 있다. 본 논문에서는 Green과 Guha(1995)의 결과의 연장선상에서 독립적인 M/M/c 대기시스템들로 구성된 시스템보다 좀 더 복잡한 대기네트워크에 있어서 서버배분과 부하에 관한 문제를 다루고자 한다.

2. 폐쇄대기네트워크

여기에서는 대기네트워크 내의 작업물의 수가 고정된 즉 작업물의 수가 항상 N인 Gorden과 Newell(1967)의 폐쇄대기네트워크로 모형화된 제조시스템을 다루기로 한다. 이는 하나의 작업물이 모든 필요공정을 수행하고 제조시스템을 떠나면 새로운 작업물이 바로 시스템에 유입됨을 의미하며 고정된 작업물의 수 N은 시스템내의 저장능력이나 이용가능한 파레트(pallet)의 수를 의미한다. 각각의 작업물은 경로변환행렬(routing matrix)에 의하여 하나의 작업장에서 다음 작업장으로 시스템내를 순환하게 되며 각 작업장에서의 공정소요시간은 지수분포를 갖는다. 시스템 내에는 M개의 작업장이 존재하며 주어진 M개의 작업장에 할당될 총 C개의 서버와 총 부하 L이 주어져 있다고 가정한다. 각 작업장에는 최소한 하나의 서버가 할당되며 총 부하 L은 각각의 작업물에 대하여 시스템 내에서 요구되는 평균 총 일의 양을 의미한다. 그러므로 실제적으로 C-M개의 서버가 M개의 작업장에 배분되며 각 서버배분에 있어서는 생산률을 최대화시키는 최적부하가 존재한다. 본 논문에서는 서버배분과 이에 따른 최적부하하에서 폐쇄대기네트워크의 수행도 측정치인 생산률과의 관계를 규명하고자 한다.

그러므로 주어진 폐쇄대기네트워크에서의 서버배분벡터를 $\underline{c}=(c_1, \ldots, c_M)$이라 하고 부하벡터를 $\underline{\rho}=(\rho_1, \ldots, \rho_M)$이라 하면 작업장 i, i=1, ..., M,에 대하여 c_i는 할당된 서버의 수, ρ_i는 할당된 부하 즉 각 작업물이 작업장 i에서 요구되는 평균 일의 양을 의미하고 $\sum_{i=1}^{M} c_i = C$, $\sum_{i=1}^{M} \rho_i = L$이 된다. 또한 주어진 폐쇄대기네트워크의 생산률을 TH(·)라 하고 여기에서 TH(·)의 (·)는 부호의 편의를 위하여 변수에 따른 생산률을 표시함을 의미한다. 그러므로 주어진 2M 벡터 $(\underline{c},\underline{\rho})$에 대하여 폐쇄대기네트워크의 생산률 $TH(N,\underline{c},\underline{\rho})$는 다음과 같이 표시된다.

$$TH(N,\underline{c},\underline{\rho}) = G(N-1,\underline{c},\underline{\rho}) / G(N,\underline{c},\underline{\rho}), \quad (2.1)$$

여기에서 G(·)는 정상화 계수(normalization constant)로써

$$G(k,\underline{c},\underline{\rho}) = \sum_{|\underline{n}|=k} \prod_{j=1}^{M} \rho_j^{n_j} \left[\prod_{l=1}^{n_j} \min(l, c_j)\right]^{-1}, \quad (2.2)$$

로 표시된다. 여기에서 $|\underline{n}|=k$는 $\sum_{j=1}^{M} n_j = k$를 의미한다.

주어진 배분문제는 다음과 같이 정식화될 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Max } TH(N,\underline{c},\underline{\rho}) \\ &\text{s.t. } \sum_{i=1}^{M} c_i = C, \\ &\qquad \sum_{i=1}^{M} \rho_i = L, \\ &\qquad \& \ c_i \geq 1 \ (i=1, \ldots, M). \end{aligned} \quad (2.3)$$

폐쇄대기네트워크에 있어서 서버배분벡터 $\underline{c}$와 부하벡터 $\underline{\rho}$는 다음의 특성을 만족시킨다(Shanthikumar와 Yao, 1988).

특성1 : 만약 $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_M$으로 주어져 있다면 최적 서버배분은 $c_1^* \geq \ldots \geq c_M^*$을 만족시킨다.

특성2 : 생산률 함수 $TH(\cdot,\underline{c},\underline{\rho})$는 arrangement 증가함수(부록 참조)이다. 즉 $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_M$이고 $\underline{c}^1 \geq_a \underline{c}^2$이면 모든 n에 대하여 $TH(n,\underline{c}^1,\underline{\rho}) \geq TH(n,\underline{c}^2,\underline{\rho})$가 성립된다. 여기에서 $\geq_a$는 arrangement ordering을 의미한다.

특성1과 특성2는 서버벡터와 부하벡터의 관계를 설정하여 더 많은 부하를 갖는 작업장에 더 많은 서버가 할당되어야 함을 의미한다. 주어진 결과는 당연한 결과로 보이나 매우 복잡한 증명을 요하는 반면 서버배분에 있어서 고

려되어야 할 해공간(solution space)을 감소시키므로써 주어진 문제의 복잡성을 현저히 감소시킨다.

만약, 각각의 작업장에 하나의 서버가 존재하고 추가로 n개의 서버를 m개의 작업장에 배분하는 경우 서버배분의 전체 해공간은 ${}_{n+m-1}C_n$개의 요소로 구성되나 특성2의 arrangement increasing을 적용하여 절단된(truncated) 해공간을 $\mathcal{L}(n,m)$이라고 하면 $\mathcal{L}(n,m)$은 다음의 반복적 관계에 의하여 유도될 수 있다.

$$\mathcal{L}(n,m+1)=\{(\underline{s}+k\underline{1},k)\,|\,\underline{s}\in\mathcal{L}(n\text{-}(m+1)k,m),\quad k=0,1,\ \dots\ ,[n/(m+1)]\}. \quad (2.4)$$

여기에서 $[x]$는 x의 정수부분을 의미하고, $\mathcal{L}(n,1)=\{n\}$이며 식(2.4)에 의한 실제적인 반복적 관계는 m=1인 경우

$$\mathcal{L}(n,2)=\{(n,0),(n\text{-}1,1),\ \dots.\ ,(n\text{-}[n/2],[n/2])\} \quad (2.5)$$

로 부터 시작된다.

위의 관계는 인급된 특성1에 의하여 다음과 같이 설명 될 수 있다. m+1개의 작업장에 n개의 서버를 배분하는 경우에 만약 m+1번째 작업장에 서버를 추가로 배분하지 않는 경우에는 n개의 서버를 m개의 작업장에 배분하는 경우와 같으며 m+1번째 작업장에 k개의 서버를 배분하는 경우에는 n-(m+1)k개의 서버를 m개의 작업장에 배분하는 경우의 문제가 된다. 그러므로 해공간은 식(2.4)를 만족시킨다. 예를 들어 6개의 서버를 배분할 경우의 해공간을 보기로 한다. 먼저 m=2인 경우

$$\mathcal{L}(6,2)=\{(6,0),(5,1),(4,2),(3,3)\}$$

이 되며 식(2.4)의 반복적 관계에 의하여 m=3,4,....인 경우에 다음과 같이 유도 될 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(6,3)&=\{(\underline{s}+k\underline{1},k)\,|\,\underline{s}\in\mathcal{L}(6\text{-}3k,2),\ k=0,1,2\}\\&=\{(6,0,0),(5,1,0),(4,2,0),(3,3,0),\\&\quad(4,1,1),(3,2,1),(2,2,2)\},\\\mathcal{L}(6,4)&=\{(\underline{s}+k\underline{1},k)\,|\,\underline{s}\in\mathcal{L}(6\text{-}4k,3),\ k=0,1,\}\\&=\{(6,0,0,0),(5,1,0,0),(4,2,0,0),\\&\quad(3,3,0,0),(4,1,1,0),(3,2,1,0),\\&\quad(2,2,2,0),(3,1,1,1),(2,2,1,1)\}.\end{aligned} \quad (2.6)$$

주어진 서버배분하에서 최적부하를 결정하기 위하여는 다음의 양들이 관심의 대상이 된다.

$$\begin{aligned}(\partial/\partial\rho_i)G(N)&=(\partial/\partial\rho_i)\{\textstyle\sum_{n=0}^{N} G_i(N-n)\rho_i/\theta_i(n)\}\\&=\textstyle\sum_{n=0}^{N-1} G_i(N-1-n)(n+1)\rho_i/\\&\quad\theta_i(n+1),\ i=1,\ \dots\ ,M.\end{aligned} \quad (2.7)$$

여기에서 $G_i(N\text{-}n)$은 주어진 대기네트워크에 있어서 총 작업물의 수가 N-n이고 작업장 i가 제거된 경우의 정상화 계수이며

$$\theta_i(n)=\prod_{l=1}^{n}\min(l,c_i)=\begin{cases}n!, & 0\le n\le c_i,\\ c_i!c_i^{n-c_i}, & c_i<n\le N\end{cases} \quad (2.8)$$

을 나타낸다.

$$\begin{aligned}(\partial/\partial\rho_i)TH(N)&=(\partial/\partial\rho_i)\{G(N\text{-}1)/G(N)\}\\&=\{(\partial/\partial\rho_i)G(N\text{-}1)\}G(N)\text{-}\{(\partial/\partial\rho_i)\\&\quad G(N)\}G(N\text{-}1)/G(N)^2\end{aligned} \quad (2.9)$$

이 된다.

특성3 : $TH(\underline{\rho})$는 ρ_i, i=1, ... ,M,에 대하여 감소(decreasing)함수이다(Yao와 Kim 1987a). 여기에서 감소는 엄격하지 않는 의미로 비증가를 의미한다. 즉

$$(\partial/\partial\rho_i)TH(\underline{\rho})\le 0. \quad (2.10)$$

그러므로 특성3과 식(2.9)를 이용하여 주어진 서버배분하에서 최적부하를 결정하는 다음의 반복적 알고리즘을 제시할 수 있다. $\underline{\rho}^k$와 TH^k를 k번째 iteration에서 얻어진 부하벡터와

생산률이라고 하면

단계1 : 초기화 : k=0.

$\sum_{i=1}^{M}\rho_i^0=L$인 초기 부하벡터 $\underline{\rho}^0$를 할당하고 수행도 추정치로서 TH^0를 산정한다. 단계3으로.

단계2 : 만약 $TH^k-TH^{k-1}\leq\varepsilon$이면 알고리즘을 끝내고 그렇지 않으면 단계3으로.

여기에서 ε는 작은 수를 의미한다.

단계3 : 모든 i, i=1, ... ,M,에 대하여 $(\partial/\partial\rho_i)TH(\underline{\rho})$를 산정하고

$$\rho_j^k=\rho_j^{k-1}+\triangle,\ \rho_n^k=\rho_n^{k-1}+\triangle,\ \rho_i^k=\rho_i^{k-1}(i\neq j,n) \tag{2.11}$$

으로 부하를 조정한다. 여기에서 △는 작은 구간(step length)를 의미하며

$$j=\arg\max\{(\partial/\partial\rho_i)TH(\underline{\rho})\mid i=1,\ \dots,\ M\},$$
$$k=\arg\min\{(\partial/\partial\rho_i)TH(\underline{\rho})\mid i=1,\ \dots,\ M\}. \tag{2.12}$$

단계4 : 생산률 TH^k를 산정하고 단계2로.

이제 서버와 부하를 동시에 고려하는 문제를 생각하면 다음과 같은 결과를 추론할 수 있다.

특성4 : 작업물의 총수가 n개인 폐쇄대기네트워크에 있어서 주어진 서버배분, $\underline{c}$,와 최적부하, $\underline{\rho}^*$,에 의한 생산률을 $TH(n,\underline{c},\underline{\rho}^*)$라고 하면 두개의 서버배분벡터 $\underline{c}^1$, $\underline{c}^2$에 있어서 만약 $\underline{c}^1\leq_m\underline{c}^2$이면 생산률 $TH(n,\underline{c}^1,\underline{\rho}^{1*})$과 $TH(n,\underline{c}^2,\underline{\rho}^{2*})$은 모든 n에 대하여 $TH(n,\underline{c}^1,\underline{\rho}^{1*})\leq TH(n,\underline{c}^2,\underline{\rho}^{2*})$를 만족시킨다. 여기에서 $\leq_m$은 majorization ordering(부록 참조)을 의미한다.

그러므로 majorization ordering($\leq_m$) 하에서 더 불균등한 서버배분벡터가 더 큰 벡터가 되며 서버배분벡터가 majorization ordering 하에서 더 클수록 최적부하 하에서 생산률이 더 높아짐을 의미한다. 주어진 결과는 다음으로 연장될 수 있다.

특성5 : 서버배분벡터 $\underline{c}$와 이에 대한 최적 부하벡터 $\underline{\rho}^*$를 고려할 때 $TH(n,\underline{c},\ \underline{\rho}^*)$는 서버배분벡터 $\underline{c}$에 대하여 Schur convex 함수이다.

특성4는 매우 어려운 증명을 요하므로 여기에서는 도표1-도표4에 의한 수치적 결과로써 이를 추론하기로 한다. 고려되는 폐쇄대기네트워크는 작업장이 3, 4, 5, 6개, 총 작업물의 수는 20, 30, 40개, 총 서버의 수는 6, 9, 10개, 그리고 총 부하는 6과 10인 경우들에 있어서 이들의 상호조합에 의한 생산률을 산정하였다. 식(2.4)에 의한 해공간 $\mathcal{L}(C\text{-}M,M)$에서 정의되는 서버배분에 있어서 majorization ordering 하에서 더 큰 서버배분 벡터가 즉 서버의 불균등 배분이 증대될수록 생산률이 증대되었으며 주어진 서버배분하에서의 최적부하는 서버의

도표1. 서버와 부하의 배분에 따른 폐쇄대기네트워크의 생산률

(M=3, C=6, L=6인 경우)

N	서버배분	생산률	부 하		
			1	2	3
40	4,1,1	0.9375362	4.12	0.94	0.94
	3,2,1	0.9316113	3.06	1.99	0.95
	2,2,2	0.927761	2.0	2.0	2.0

도표2. 서버와 부하의 배분에 따른 폐쇄대기네트워크의 생산률

(M=4, C=9, L=6인 경우)

N	서버배분	생산률	부하			
			1	2	3	4
20	6,1,1,1	0.9936742	4.480011	0.5066669	0.5066669	0.5066669
	5,2,1,1	0.9919161	3.713333	1.253334	0.5166669	0.5166669
	4,3,1,1	0.9910216	2.896667	2.06	0.5266668	0.5166669
	4,2,2,1	0.9900112	2.926667	1.273333	1.273333	1.5266668
	3,3,2,1	0.9893794	2.09	2.1	1.283333	0.5266668
	3,2,2,2	0.988191	2.12	1.293333	1.293333	1.293333
40	6,1,1,1	0.9999993	4.05	0.6566667	0.6466667	0.6466667
	5,2,1,1	0.9999847	3.533333	1.293333	0.5866668	0.5866668
	4,3,1,1	0.9999821	2.776667	2.03	0.5966668	0.5966668
	4,2,2,1	0.9999788	2.786667	1.313333	1.313333	0.5866668
	3,3,2,1	0.9999765	2.05	2.05	1.303333	0.5966668
	3,2,2,2	0.9999721	2.06	1.313333	1.313333	1.313333

도표3. 서버와 부하의 배분에 따른 폐쇄대기네트워크의 생산률

(M=5, C=10, L=10인 경우)

N	서버배분	생산률	부하				
			1	2	3	4	5
30	6,1,1,1,1	0.8755146	6.490011	0.88	0.88	0.87	0.88
	5,2,1,1,1	0.8662074	5.39	1.96	0.88	0.89	0.88
	4,3,1,1,1	0.8621131	4.24	3.09	0.89	0.89	0.89
	4,2,2,1,1	0.857952	4.27	1.98	1.97	0.89	0.89
	3,3,2,1,1	0.8554596	3.11	3.11	1.99	0.89	0.9
	3,2,2,2,1	0.8512406	3.13	1.99	1.99	1.99	0.9
	2,2,2,2,2	0.8469362	2	2	2	2	2

도표4. 서버와 부하의 배분에 따른 폐쇄대기네트워크의 생산률

(M=6, C=10, L=6인 경우)

N	서버배분	생산률	부하					
			1	2	3	4	5	6
40	5,1,1,1,1,1	0.9999951	3.31	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54
	4,2,1,1,1,1	0.9999932	2.63	1.21	0.54	0.54	0.54	0.54
	3,3,1,1,1,1	0.9999926	1.92	1.92	0.54	0.54	0.54	0.54
	3,2,2,1,1,1	0.9999912	1.91	1.22	1.22	0.55	0.55	0.55
	2,2,2,2,1,1	0.9999894	1.22	1.23	1.23	1.23	0.54	0.55

수가 많은 작업장에 상대적으로 더 많은 부하가 할당되었으며 이러한 현상은 작업물의 수가 증가할수록 감소하여 균등부하에 수렴하게 된다. 실제적으로 주어진 결과(특성4)는 특성2가 적용된 절단된 서버배분공간에서 뿐만이 아니고 전체배분공간에서 적용이 가능함이 수치적으로 제시가능하나 그 결과는 생략하기로 하며 또한 여러 다른 작업장의 수, 서버의 수, 그리고 부하의 배합에 대하여도 수치적 결과의 제시를 생략하기로 한다. 각 작업장의 서버의 수가 같이 배분된 경우에는 균등부하가 최적부하임은 기존의 결과에서 제시된 바와 같다.

3. 개방대기네트워크

지금까지는 제조시스템내의 작업물의 수가 일정한 경우로써 폐쇄대기네트워크로 모형화되는 제조시스템에 대하여 다루었다. 그러나 상위 제조단계나 또는 외부로 부터 수행될 작업물이 제조시스템에 도착하여 유입되는 경우에는 시스템내의 작업물의 수가 일정하지 않다. 이러한 경우의 제조시스템은 개방시스템이 되어 도착과정이 도착률이 일정한 포아송 분포에 의하며 각 작업장에서의 서비스 시간이 지수분포를 갖고 대기능력이 무한한 경우에는 개방대기네트워크(Jackson 1957)로 모형화 될 수 있다.

개방대기네트워크에 있어서 주어진 문제는 폐쇄대기네트워크와의 잘 알려진 관계(Yao와 Kim, 1987b)를 이용하여 쉽게 해결될 수 있다. 즉 서버와 부하의 배분에 따른 폐쇄대기네트워크의 생산률은 개방대기네트워크에 있어서는 likelihood ordering(부록 참조), $\le^{lr}$,하에서 시스템내의 혼잡도 측정치인 시스템내의 총 작업물의 수와의 관계를 설정하여 시스템의 수행도를 서로 비교가능하게 한다.

$X_i(i=1, \ldots ,M)$를 작업장 i에서의 균형대기길이를 의미하는 확률변수라고 하고 $X_\Sigma=X_1+ \cdots + X_M$이라 하면 X_Σ는 제조시스템내의 작업물의 총수를 의미한다. Jackson 네트워크는 다음의 승법형 해를 갖는다. 즉

$$\begin{aligned} p(\underline{X}=\underline{n}) &= \textstyle\prod_{i=1}^{M} p(X_i=n_i) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{M} \rho_i^{ni} [\prod_{l=1}^{nj} \min(l,c_i)]^{-1} p(X_i=0). \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기에서

$$p(X_i=0)=\{\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \rho_i^{k} [\prod_{l=1}^{k} \min(l,c_i)]^{-1}\}^{-1} \tag{3.2}$$

이 된다.

폐쇄대기네트워크의 생산률 TH(n)은 개방대기네트워크에 있어서 시스템내의 총작업물의 수와 다음의 관계가 성립된다(Whitt, 1984).

$$TH(n)=p(X_\Sigma=n\text{-}1)\,/\,p(X_\Sigma=n). \tag{3.3}$$

$TH(n,\underline{c},\underline{\rho}^*)$는 $\underline{c}$에 대하여 schur convex 함수이므로 $\underline{c}^1 \le_m \underline{c}^2$이면 모든 n에 대하여 $TH(n,\underline{c}^1,\underline{\rho}^{1*}) \le TH(n,\underline{c}^2,\underline{\rho}^{2*})$이며 결과적으로 개방대기네트워크에 있어서 총 작업물의 수 X_Σ는 다음의 관계를 만족시킨다. 즉 모든 n에 대하여

$$\begin{aligned} &\underline{c}^1 \le {}_m\underline{c}^2 \\ &\Rightarrow p(X_\Sigma(\underline{c}^1,\underline{\rho}^{1*})=n\text{-}1)\,/\,p(X_\Sigma(\underline{c}^1,\underline{\rho}^{1*})=n) \\ &\quad \le p(X_\Sigma(\underline{c}^2,\underline{\rho}^{2*})=n\text{-}1)\,/\,p(X_\Sigma(\underline{c}^2,\underline{\rho}^{2*})=n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

그러므로

$$X_\Sigma(\underline{c}^1,\underline{\rho}^{1*}) \ge^{lr} X_\Sigma(\underline{c}^2,\underline{\rho}^{2*}). \tag{3.5}$$

특성6 : 개방대기네트워크에 있어서 2개의 서버배분과 부하벡터 $(\underline{c}^1,\underline{\rho}^{1*})$과 $(\underline{c}^2,\underline{\rho}^{2*})$에 있어서

$\underline{c}^1 \leq_m \underline{c}^2$이면 $X_\Sigma(\underline{c}^1, \rho^{1*}) \geq^{lr} X_\Sigma(\underline{c}^2, \rho^{2*})$이다.

이는 개방대기네트워크에 있어서 더 불균등한 서버배분은 시스템의 혼잡도 측정치로써 시스템 내의 총 작업물의 수를 감소시킴을 의미한다.

4. 제한된 개방대기네트워크

만약 개방대기네트워크에 있어서 시스템내의 작업물의 총 수가 어떠한 상수 N에 도달하면 도착하는 작업물은 시스템내로의 유입이 봉쇄되고 사라지게 된다면 여기에서도 주어진 상수 N은 제조시스템에 있어서 저장능력 또는 파레트 수의 제한에 의한 제조시스템내에 허용된 최대 작업물 수로 해석될 수 있다. 이러한 제한된 개방대기네트워크의 경우에는 하나의 가상의 작업장을 추가한 폐쇄대기네트워크로 모형화될 수 있으며(Buzacott와 Yao 1986) 폐쇄대기네트워크의 결과가 바로 적용될 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 대기네트워크로 모형화될 수 있는 제조시스템에 있어서 생산전 계획으로서 서버와 부하의 동시적 배분에 관한 문제를 다루었으며 Green과 Guha(1995)의 일정한 수의 독립적인 M/M/c 대기시스템으로 구성된 시스템에서 수치적 내용에 의하여 추론된 결과가 대기네트워크로 모형화된 시스템에 있어서도 적용될 수 있음을 보였다. 폐쇄대기네트워크의 생산률이 서버와 부하의 할당벡터에 대하여 arrangement increasing 함수임을 이용하여 서버배분의 해공간이 현저히 감소되었으며 주어진 서버배분에 대하여는 최적부하를 결정하는 제시된 반복적 알고리즘에 의하여 생산률 함수가 서버배분벡터에 대하여 Schur convex 함수임을 수치적 결과에 의하여 추론하였다. 주어진 결과는 더 불균등한 서버배분이 폐쇄대기네트워크의 생산률을 증대시킴을 의미한다. 폐쇄대기네트워크의 생산률에 대한 결과는 likelihood ordering하에서 개방대기네트워크에 있어서 시스템내에 존재하는 총 작업물의 수에 대하여 연장되었으며 제한된 개방대기네트워크에 있어서도 폐쇄대기네트워크의 결과가 적용됨을 보였다.

참 고 문 헌

[1] Buzacott, J. A. and D. D. Yao, "Flexible Manufacturing Systems : A Review of Analytical Models," *Management Sci.*, Vol. 32(1986), pp.890-905.

[2] Calabres, J. M., "Optimal Workload Allocation in Open Networks of Multi-server Queues," *Management Sci.*, Vol. 38(1992), pp.1792-1802.

[3] Dallery, Y. and K. E. Stecke, "On the Optimal Allocation of Servers and Workloads in Closed Queueing Networks," *Operations Res.*, Vol. 38(1990), pp. 694-703.

[4] Gorden, W. J. and G. F. Newell, "Closed Queueing Networks with Exponential Servers," *Operations Res.*, Vol. 15(1967), pp.252-267.

[5] Green, L. V. and D. Guha, "On the Efficiency of Imbalance in Multi-Facility Multi-Server Server Systems," *Management Sci.*, Vol. 41(1995), pp. 179-187.

[6] Jackson, J. R., "Networks of Waiting Lines," *Operations Res.*, Vol. 5(1957), pp.518-521.

[7] Marshall, A. W. and I. Olkin, Inequalities : *Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[8] Shanthikumar, J. G., "On the Superiority of Balanced Load in Flexible Manufacturing System," Department of Industrial Engineering and Operations Research, Syracuse University, New York, 1982.

[9] Shanthikumar, J. G. and K. E. Stecke, "Reducing Work-In-Process Inventory in Certain Class of Flexible Manufacturing Systems," *European J. Operations Res.*, Vol. 26(1986), pp. 266-271.

[10] Shanthikumar, J. G, and D. D. Yao, "Optimal Server Allocation in a System of Multiserver Stations," *Management Sci.*, Vol. 33(1987), pp.1173-1180.

[11] Shanthikumar, J. G. and D. D. Yao, "On Server Allocation in Multiple Center Manufacturing Systems," *Operations Res.*, Vol. 36(1988), pp.333-342.

[12] Whitt, W., "Open and Closed Models for Networks of Queues," *Bell Lab. Technical J.*, Vol. 63(1984), pp.1911-1979.

[13] Yao, D. D. and S. C. Kim, "Some Order Relations in Closed Networks of Queues with Multiserver Stations," *Naval Res. Logistics* Vol. 34(1987a), pp.53-66.

[14] Yao, D. D. and S. C. Kim, "Reducing the Congestion in a Class of Job-shops," *Management Sci.*, Vol. 33 (1987b), pp.1165-1172.

부 록

본 부록에서는 본 논문에서 적용된 arrangement ordering, majorization ordering, 그리고 likelihood ordering에 대한 결과를 요약하여 제시하고자 한다. $\underline{x}$와 $\underline{y}$는 모두 실수의 성분으로 구성된 n차원의 벡터이며 M-O는 Marshall과 Olkin(1979)를 의미한다.

1. 두개의 할당벡터 $(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^1)$과 $(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^2)$에 있어서 arrangement ordering $(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^2)\le_a(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^1)$은 벡터 $\underline{y}^2$의 감소하는 순서의 역으로 배열된 근접한 두개의 성분을 그들이 감소하는 순서로 계속적으로 교환하므로써 벡터 $\underline{y}^1$이 얻어지는 경우로 정의할 수 있다. 여기에서 ↓는 벡터의 성분이 감소하는 순서로 배열됨을 의미한다. (M-O의 6F)

2. 함수 $\mathcal{F}$가 arrangement ordering을 유지시키면 함수 $\mathcal{F}$는 arrangement increasing으로 정의된다. (M-O의 6F)

$$(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^2)\le_a(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^1)\Rightarrow\mathcal{F}(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^1)\ge\mathcal{F}(\underline{x}\downarrow,\underline{y}^2). \quad (부1)$$

3. $x_{[i]}$와 $y_{[i]}$를 각 벡터에 있어서 i번째 큰 성분을 의미한다고 하면 majorization ordering $\underline{x} \leq_m \underline{y}$는 다음과 같이 정의된다. (M-O의 5A)

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \qquad k=1, \ldots, n-1,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}. \qquad (부2)$$

4. 함수 $\mathcal{F}$가 다음을 만족 시키면 Schur convex(concave)함수로 정의된다.(M-O의 3A)

$$\underline{x} \leq_m \underline{y} \Rightarrow \mathcal{F}(\underline{x}) \leq (\geq) \mathcal{F}(\underline{y}). \qquad (부3)$$

5. x와 y를 각각 비음 정수로 정의되는 이산적 확률변수라고 할 때 likelihood ordering $\leq^{lr}$은 다음과 같이 정의된다.

$$x \leq^{lr} y \Rightarrow p(x=n-1)/p(x=n) \geq p(y=n-1)/p(y=n), \ n \geq 1. \qquad (부4)$$