韓國經營科學會誌
第21巻 第2號
1996年 8月

M/M/s/s+c 대기시스템 재방문*

김성철**

M/M/s/s+c Queueing System Revisited

Sung-Chul Kim

Abstract

The generalized Erlang loss function, extensively studied in the literature, is revisited. We study the steady state loss probability in M/M/s/s+c queueing system and prove that it satisfies the first and second order properties in integral number of servers as well as integral queue capacities. Also we study the problem of allocating integral number of servers and queue capacities, and develop an algorithm to obtain an optimal allocation of them individually and jointly with the small number of computations.

1. 서 론

최적화문제는 제조시스템, 서비스시스템, 컴퓨터시스템, 그리고 통신시스템 등 대기현상이 발생하는 다양한 시스템의 설계에 있어서 그 중요성이 증대되고 있다. 이러한 대기시스템(Queueing system)의 최적 설계에 있어서 기본적인 중요한 문제 중의 하나는 주어진 대기시스템의 설계모수에 대한 수행도의 특성으로서 일계모멘트(the first moment) 및 이계모멘트(the second moment)를 증명하는 일이라고 할 수 있다. 이러한 수행도의 특성은 대기시스템의 최적화문제에 있어서 특히 유용한 결과를 제시하며 이와 관련된 연구가 기존의 문헌에 다양하게 제시되고 있다.

이러한 연구와 관련지어 특히 관심의 대상이 되어온 함수 중의 하나로서 Erlang loss함수를 들 수 있으며 Erlang loss함수는 M/M/s/s 대기시스템에 있어서 도착하는 고객이 봉쇄되

* 본 논문은 1995년도 덕성여자대학교 자체학술연구 조성비의 일부 지원으로 연구되었음
** 덕성여자대학교 경영학과 교수

어 사라질 확률을 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$B(a,s)=(a^s/s!)/\sum_{i=0}^{s}(a^i/i!). \tag{1.1}$$

여기에서 $a=\lambda/\mu$로써 고객의 시스템에의 도착률 λ와 하나의 서어버의 서비스율에 해당되는 μ의 함수로서 산정되며 제공된 부하(offered load)를 의미하고 s는 서어버의 수로서 서어버를 제외한 여분의 대기용량이 존재하지 않는다. 주어진 M/M/s/s 대기시스템과 대별하여 서어버를 제외한 여분의 대기용량 c가 주어진 좀 더 일반화된 대기시스템을 M/M/s/s+c 대기시스템이라 정의하고 이러한 대기시스템에 있어서 고객의 봉쇄확률은 다음과 같이 유도되며 일반화된(generalized) Erlang loss함수로 명명된다.

$$B(a,s,c)=\{(a^s/s!)(a/s)^c\}/\{\sum_{k=0}^{s}a^k/k!+(a^s/s!)\sum_{i=1}^{c}(a/s)^i\}. \tag{1.2}$$

그러므로 M/M/s/s+c 대기시스템에 있어서 총 대기용량, b,는 s+c가 되며(b=s+c) B(a,s)는 B(a,s,0)로 정의될 수 있다.

M/M/s/s+c 대기시스템에 있어서 제공된 부하(a), 서어버의 수(s), 그리고 여분의 대기용량(c)에 대한 대기시스템의 생산률을 $\theta(a,s,c)$이라 하면 이는 $B(a,s,c)$와 더불어서 주어진 대기시스템의 수행도를 산정할 수 있는 수행도 측정치의 하나로서 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\theta(a,s,c)=\lambda\{1-B(a,s,c)\}. \tag{1.3}$$

즉 M/M/s/s+c 대기시스템에 있어서 도착률은 상태종속적으로 시스템내의 작업물의 수가 저장용량에 다다르면 도착은 정지되어 확률 $B(a,s,c)$로써 도착률은 0이 되며 그외의 경우에는 도착률이 일정한 λ로서 대기시스템에 진입한 작업물은 서비스를 완료한 후 모두 시스템을 벗어나게 됨을 의미한다.

주어진 대기시스템의 최적화 문제에 있어서 어떠한 변수를 설계모수로 할 것인가 하는 문제는 모형의 성격과 관련되어 결정된다. 본 논문에서는 고객의 도착률 λ와 서비스율 μ가 주어져 있을 때 즉 제공된 부하 a가 주어져 있는 경우의 M/M/s/s+c 대기시스템에 있어서 대기시스템의 수행도와 관련되는 설계모수로서 서어버의 수 s와 대기용량 c를 결정하고자 한다. 특히 생산률의 함수로서 산정되는 이익과 서어버의 수와 대기용량의 함수로서 산정되는 비용이 있을 때 대기시스템의 설계와 관련된 최적화문제에 있어서 목적함수는 이익과 비용의 차로서 표시되어 정식화 될 수 있다. 또한 대기시스템의 수행도와 관련된 설계모수로서 서어버의 수 또는 대기용량의 설계와 관련된 최적화문제에 있어서 만약 설계모수에 대한 일계특성 및 이계특성에 있어서 이익함수가 증가하는 concave함수이고 각각의 설계모수에 대한 비용함수가 증가하는 convex함수인 경우에는 주어진 최적화문제는 순차적 한계배분(marginal allocation)방법을 적용하므로서 쉽게 해결될 수 있다. 그러므로 이러한 최적화문제에 있어서 중요한 핵심은 주어진 함수의 일계특성 및 이계특성을 증명하는 일이라고 할 수 있다.

M/M/s/s+c 대기시스템에 있어서 서어버나 대기용량의 설계에 관한 문제는 비선형의 목적함수를 갖는 정수계획문제가 되며 이러한 비선형 최적화문제에 있어서 서어버와 대기용량에 관한 일계특성과 이계특성은 해공간을 현저히 감소시키므로써 최적해를 구하는 해의 절차를 매우 용이하게 한다. 이러한 특성이 없이는 최적 서어버 및 대기용량은 무한수의 서어버와 대기용량이 조합되어 열거 비교 검토되어

야 하나 주어진 특성하에서는 Fox[3]의 한계배분방법을 적용할 수 있어 복잡성(complexity)이 현저히 감소되며 매우 수월하게 최적해에 도달할 수 있다.

M/M/s/s 대기시스템에 있어서는 Erlang loss함수의 서어버의 수 s에 대한 convexity는 Messerli[8]에 의하여 처음으로 추론된 후 Buchner와 Neal[1], Krupp[7], 그리고 Jagers와 Van Doorm[6] 등에 의하여 증명되었으며 Shanthikumar와 Yao[13]은 추계적 비교에 의하여 M/M/s/s 대기시스템의 생산률이 concavity를 만족시킴을 제시하였다. M/M/s/s+c 대기시스템에 있어서는 일반화된 Erlang loss함수의 서어버의 수에 대한 convexity를 Chang, et al. [2]은 추계적 비교에 의하여 Pacheco[9]는 대수적으로 증명하였다. 또한 Pacheco[10]은 대기용량에 대한 convexity를 증명하였다. 주어진 Pacheco[9,10]의 증명은 일반화된 Erlang loss함수를 연속적인 함수로 보고 이에 따른 결과를 제시하였다. 본 논문에서는 일반화된 Erlang loss함수의 일계특성 및 이계특성을 설계모수가 실제에 있어서 이산적임을 고려하여 이산적함수로서의 증명을 통하여 위의 결과를 연장하고자 한다. 언어진 결과는 언급된 최적화문제의 효율적인 해법의 유도 및 적용을 가능케 한다.

2장에서는 대기용량에 대한 일반화된 Erlang loss 함수의 일계특성과 이계특성을 3장에서는 서어버의 수에 대한 위의 특성을 제시한다. 4장에서는 대기능력과 서어버의 수를 독립적으로 또는 공동으로(jointly) 설계모수로 하는 최적화문제를 정식화하고 2장과 3장에서 도출된 결과를 적용하여 이의 해법이 유도되며 5장은 몇개의 수치 예를 제시하고 6장에서 결어로 마감된다.

2. 대기용량에 대한 일계특성 및 이계특성

이산적 함수 $\phi: R \to R$,은 모든 비음정수 n에 대하여 다음의 정의가 성립된다.

감소성(증가성) : $\phi(n)-\phi(n-1) \le (\ge)\ 0$, (2.1)

convexity(concavity) :

$$\phi(n+1)-\phi(n) \ge (\le)\ \phi(n)-\phi(n\text{-}1), \quad (2.2)$$

sublinearity(superlinearity) :

$$n\phi(n+1) \ge (\le)\ (n+1)\phi(n),$$

$$\text{또는 } \phi(k)-\phi(j) \le (\ge)\ (k/j-1)\phi(j),$$

$$\forall\ j \le k. \quad (2.3)$$

여기에서 convexity나 sublinearity는 엄격하지 않은(nonstrict) 의미로 정의된다.

본 절에서는 일반화된 Erlang loss함수의 이산적 모수 대기용량 c에 대한 일계특성 즉 단조성(monotonicity)과 이계특성 즉 convexity를 보이고자 한다. 일반화된 Erlang loss함수, 식(1.2),는 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$B(a,s,c)=\{(a^s/s!)(a/s)^c\}/\{\textstyle\sum_{k=0}^{s}a^k/k!+a^{s+1} \times (s^c-a^c)/s!s^c(s-a)\}. \quad (2.4)$$

주어진 함수와 관련지어 다음을 정의한다.

$$f(s,c)=(a^s/s!)(a/s)^c, \quad (2.5)$$

$$g(s)=\textstyle\sum_{k=0}^{s}a^k/k!, \quad (2.6)$$

$$h(s,c)=[s!s^c(s-a)]^{-1}. \quad (2.7)$$

그러므로

$$[a^{s+1}/(s+1)!]\textstyle\sum_{i=0}^{c-1}(a/(s+1))^i =a^{s+1}[(s+1)^c-a^c]h(s+1,c-1), \quad (2.8)$$

$$a^{s+1}/(s+1)!+[a^{s+2}/(s+2)!] \times\textstyle\sum_{i=0}^{c-2}(a/(s+2))^i=a^{s+1}[(s+2)^c-a^c]h(s+2, c-2), \quad (2.9)$$

정리1 : B(a,s,c)는 c에 대하여 감소함수이다.

증명 : 위의 증명은 $B(a,s,c+1)-B(a,s,c)\le 0$의 증명과 동일하며 이는 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$f(s,c)[g(s)+a^{s+1}(s^{c+1}-a^{c+1})h(s,c+1)] \\ -f(s,c+1)[g(s)+a^{s+1}(s^{c}-a^{c})h(s,c)]\ge 0 \tag{2.10}$$

식(2.10)은

$$g(s)[f(s,c)-f(s,c+1)] \\ =g(s)f(s,c)(1-a/s)\ge 0, \tag{2.11}$$

$$a^{s+1}[f(s,c)h(s,c+1)(s^{c+1}-a^{c+1}) \\ -f(s,c+1)h(s,c)(s^{c}-a^{c})] \\ =a^{s+1}f(s,c)h(s,c)[s^{c}(1-a/s)]\ge 0. \tag{2.12}$$

로 구분 쉽게 비교 증명될 수 있다.

정리2 : B(a,s,c)는 c에 대하여 convex함수이다.

증명 : B(a,s,c)의 convexity는 다음의 부등식에 의하여 증명될 수 있다.

$$B(a,s,c)-B(a,s,c+1)\ge B(a,s,c+1) \\ -B(a,s,c+2) \tag{2.13}$$

이를 풀어 정리하면

$$[g(s)+a^{s+1}(s^{c+2}-a^{c+2})h(s,c+2)]\{f(s,c)[g(s) \\ +a^{s+1}(s^{c+1}-a^{c+1})h(s,c+1)]-f(s,c+1) \\ \times[g(s)+a^{s+1}(s^{c}-a^{c})h(s,c)]\} \\ -[g(s)+a^{s+1}(s^{c}-a^{c})h(s,c)]\{f(s,c+1) \\ \times[g(s)+a^{s+1}(s^{c+2}-a^{c+2})h(s,c+2)]-f(s,c+2) \\ \times[g(s)+a^{s+1}(s^{c+1}-a^{c+1})h(s,c+1)]\}\ge 0 \tag{2.14}$$

이 되며 약간의 대수적 조작에 의하여

$$f(s,c)[g(s)+a^{s+1}(s^{c+2}-a^{c+2})h(s,c+2)] \\ \times[g(s)(1-a/s)a^{s+1}/s!s] \\ -f(s,c+1)[g(s)+a^{s+1}(s^{c}-a^{c})h(s,c)][g(s) \\ \times(1-a/s)+a^{s+1}/s!s]\ge 0 \tag{2.15}$$

로 유도될 수 있다. 그러므로

$$f(s,c)-f(s,c+1) = f(s,c)(1-a/s)\ge 0, \tag{2.16}$$

$$f(s,c)a^{s+1}(s^{c+2}-a^{c+2})h(s,c+2)-f(s,c+1)a^{s+1} \\ \times(s^{c}-a^{c})h(s,c) \\ =a^{s+1}(s-a)(s^{c+1}+a^{c+1})f(s,c)h(s,c+2)\ge 0 \tag{2.17}$$

에 의하여 식(2.13)은 증명된다. 그러므로 서어버의 수 s가 주어진 경우에 일반화된 Erlang loss함수는 대기용량 c에 대하여 convexity를 만족시키며 결과적으로 정리1과 정리2에 의하여 고객의 봉쇄확률은 주어진 제공된 부하 a와 서어버의 수 s에 있어서 대기용량 c에 대하여 감소하는 convex함수이다. 그러므로 식(1.3)에 의하여 대기시스템의 생산률 θ(a,s,c)는 증가하는 concave함수임을 보일 수 있다.

3. 서어버배분에 대한 일계특성 및 이계특성

전절에서는 서어버의 수가 일정할 때 대기용량에 대한 일반화된 Erlang loss함수의 convexity를 증명하였다. 본절에서는 총 대기용량이 일정할 때 즉 b가 일정할 때 서어버의 수 s에 대한 convexity를 보이고자 한다. 이 경우에 있어서 서어버의 수가 증가하면 서어버의 대기공간을 제외한 순 대기용량은 b-s로서 서어버의 수가 증가하면 c는 감소한다.

정리3 : B(a,s,c)는 s에 대하여 감소함수이다.

증명 : $B(a,s,c)$가 s에 대하여 감소함수임은 다음의 부등식에 의한다.

$$B(a,s,c) \geq B(a,s,+1,c-1). \tag{3.1}$$

식(3.1)은 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$f(s,c)[g(s)+a^{s+1}((s+1)^c-a^c)h(s+1,c-1)] -f(s+1,c-1)[g(s)+a^{s+1}(s^c-a^c)h(s,c)] \geq 0. \tag{3.2}$$

주어진 식은

$$g(s)f(s,c)s^c[(1/s)^c-(1/(s+1))^c] +a^{2s+c+1}h(s,c)h(s+1,c-1)\{(s-a) \times[(s+1)^c-a^c]-(s+1-a)[s^c-a^c]\} \geq 0 \tag{3.3}$$

이 되어 위의 결과를 만족시킨다.

정리4 : $B(a,s,c)$는 s에 대하여 convex함수이다.

증명 : $B(a,s,c)$의 s에 대한 convexity는

$$B(a,s,c)-B(a,s+1,c-1) \geq B(a,s+1,c-1)-B(a,s+2,c-2) \tag{3.4}$$

와 같다. 그러므로 식(2.4), 식(2.8), 그리고 식(2.9)로부터

$$\{[a^{s+c}(s+1-a)h(s+1,c-1)[(s+1)^{c-1}-s^c] /s^c]\textstyle\sum_{k=0}^{s}a^k/k!+[f(s,c)f(s+1,c-1)a^{s+c}] \times\sum_{k=s+1}^{s+c}[(s+1)^{s+c-k}-s^{s+c-k}]a^k\}\{g(s)+a^{s+1} \times[(s+2)^c-a^c]h(s+2,c-2)\} -\{[a^{s+c}(s+2-a)h(s+2,c-2)[(s+2)^{c-1} -(s+1)^{c-1}]/(s+1)^{c-1}]\sum_{k=0}^{s}a^k/k! +[f(s+1,c-1)f(s+2,c-2)/a^{s+c}] \sum_{k=s+1}^{s+c}[(s+2)^{s+c-k}-(s+1)^{s+c-k}]a^k\} \times\{g(s)+a^{s+1}[s^c-a^c]h(s,c)\} \geq 0 \tag{3.5}$$

을 만족시켜야 되며 이는 $0 \leq k \leq s$에 대하여

$$(\textstyle\sum_{k=0}^{s}a^k/k!)\{a^{s+c}(s+1-a)h(s+1,c-1) \times[(s+1)^c-s^c]/s^c\}\{g(s)+a^{s+1}[(s+2)^c-a^c] \times h(s+2,c-2)\}-(\sum_{k=0}^{s}a^k/k!) \times\{a^{s+c}(s+2-a)h(s+2,c-2)[(s+2)^{c-1} -(s+1)^{c-1}/(s+1)^{c-1}\}\{g(s)+a^{s+1} \times[s^c-a^c]h(s,c)\} \geq 0 \tag{3.6}$$

이 만족되어야 하며 이는

$$(g(s)^2f(s+2,c-2)/s^c(s+1)^{c-1}\}\{(s+2)^{c-1} \times[(s+1)^c-s^c]-s^c[(s+2)^{c-1}-(s+1)^{c-1}]\} +\{a^{2s+c+1}/(s+1)^c\}g(s)h(s,c)h(s+2,c-2) \times\{(s-a)[(s+1)^c-s^c][(s+2)^c-a^c] -[(s+1)(s+2-a)((s+2)^{c-1}-(s+1)^{c-1}) \times(s^c-a^c)]\} \geq 0 \tag{3.7}$$

이 된다. 여기에서

$$(s+2)^{c-1}[(s+1)^c-s^c]-s^c[(s+2)^{c-1} -(s+1)^{c-1}] \geq (s+2)^c[(s+1)^c-s^c]-s^c \times[(s+2)^c-(s+1)^c] \geq 0, \tag{3.8}$$

그리고

$$(s-a)[(s+1)^c-s^c][(s+2)^c-a^c]-(s+1) \times(s+2-a)[(s+2)^{c-1}-(s+1)^{c-1}][s^c-a^c] \geq[(s+1)^c-s^c][(s+2)^c-a^c]-[(s+2)^c -(s+1)^c][s^c-a^c] \geq 0 \tag{3.9}$$

에 의하여 식(3.4)는 성립된다. $s+1 \leq k \leq s+c$인 경우에는

$$a^{s+c}(s-a)(s+1-a)h(s,c)h(s+1,c-1) \times\textstyle\sum_{k=s+1}^{s+c}a^k[(s+1)^{s+c-k}-s^{s+c-k}]\{g(s)+a^{s+1} \times h(s+2,c-2)[(s+2)^c-a^c]\}-a^{s+c} \times(s+1-a)(s+2-a)h(s+1,c-1)h(s+2,c-2) \times\sum_{k=s+1}^{s+c}a^k[(s+2)^{s+c-k}-(s+1)^{s+c-k}] \times\{g(s)+a^{s+1}h(s,c)[s^c-a^c]\} =(a^{s+c}/s^c)(s+1-a)(s+2-a)h(s+1,c-1)h$$

$$
\begin{aligned}
&(s+2,c-2)g(s)\textstyle\sum_{k=s+1}^{s+c} a^k\{(s+1)(s+2)^{c-1}\\
&\times[(s+1)^{s+c-k}-s^{s+c-k}]-s^c[(s+2)^{s+c-k}\\
&-(s+1)^{s+c-k}]\}+a^{2s+c+1}(s+1-a)h(s,c)\\
&\times h(s+1,c-1)h(s+2,c-2)\textstyle\sum_{k=s+1}^{s+c} a^k\{(s-a)\\
&\times[(s+1)^{s+c-k}-s^{s+c-k}][(s+2)^c-a^c]\\
&-(s+2-a)[(s+2)^{s+c-k}-(s+1)^{s+c-k}]\\
&\times[s^c-a^c]\} \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

가 되며 이는

$$
\begin{aligned}
&(s+1)(s+2)^{c-1}[(s+1)^{s+c-k}-s^{s+c-k}]\\
&-s^c[(s+2)^{s+c-k}-(s+1)^{s+c-k}]\geq(s+2)^{c-1}\\
&\times[(s+1)^{s+c-k}-s^{s+c-k}]-s^c[(s+2)^{s+c-k-1}\\
&-(s+1)^{s+c-k-1}]\geq 0 \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

그리고

$$
\begin{aligned}
&(s-a)[(s+1)^{s+c-k}-s^{s+c-k}][(s-2)^c-a^c]\\
&-(s+2-a)[(s+2)^{s+c-k}-(s+1)^{s+c-k}]\\
&\times[s^c-a^c]\geq 0 \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

에 의하여 식(3.4)를 만족시킨다.

그러므로 정리3과 정리4에 의하여 총 대기용량 b가 주어져 있을 때 일반화된 Erlang loss 함수는 감소하는 convex함수로서 생산률 θ(a,s,c)는 서어버배분에 대하여 증가하는 concave함수이다.

4. 최적배분에 관한 문제

본 절에서는 전 절에서 다루어진 서어버의 수와 대기용량에 대한 일계특성 및 이계특성을 이용하여 주어진 M/M/s/s+c대기시스템에 있어서 서어버와 대기용량의 배분에 관한 최적화문제를 다루고자 한다. 이는 생산률의 함수로서 산정되는 이익함수가 존재하고 서어버나 대기용량의 배분으로 산정되는 비용함수가 존재하면 고려되는 목적함수는 이익과 비용의 함수로 정의될 수 있으며 이렇게 정의된 목적함수의 최대값을 구하고자 하는 문제를 말한다. 정의된 최적화 문제에 있어서는 전술된 바와 같이 M/M/s/s+c 대기시스템에의 고객의 도착률 λ와 하나의 서어버에 대한 서비스율 μ가 주어지며 결과적으로 제공된 부하 a가 일정하다. 이러한 조건 하에서 최적화와 관련된 의사결정변수로써 서어버의 수 s와 대기용량 b 또는 c에 대하여 다음을 정의한다.

θ(s,c) : 서어버의 수s와 대기용량 c에 대한 주어진 대기시스템의 생산률,

$\Psi(\theta)$: 생산률에 대한 함수로써 이익함수,

γ(s) : 서어버배분 s에 대한 함수로써 비용함수,

ω(b) : 대기용량 b에 대한 비용함수.

여기에서 비용함수는 생산률에 대한 이익함수와 부합되도록 단위기간당 비용으로 치환되어 적용되어야 한다.

주어진 최적화문제에 있어서 먼저 하나의 변수만을 고려하여 서어버의 수 s 또는 대기용량 b, b≥s,만을 의사결정변수로 모형화하는 경우를 고려할 수 있다. 서어버의 수 s를 설계모수로 하는 경우에는 주어진 총 대기용량 b에 대하여

모형1: Max. $\Phi(s)=\Psi(\theta(s,b-s))-\gamma(s)$, $s\leq b$; (4.1)

주어진 서어버의 수 s에 대하여 대기용량 c만을 결정변수로 하는 경우에는

모형2: Max. $\Phi(c)=\Psi(\theta(s,c))-\omega(s+c)$, $c\geq 0$; (4.2)

그리고 서어버의 수 s와 총 대기용량 b를 모두 설계모수로 하는 경우에는

$$\text{모형3:Max.}\ \Phi(s,b)=\Psi(\theta(s,b-s))-\gamma(s)-\omega(b),\quad b\geq s\geq 1, \qquad (4.3)$$

으로 정식화 할 수 있다.

만약 생산률에 대한 이익함수 $\Psi(\theta)$가 생산률 θ에 대하여 증가하는 concave함수이고 생산률함수 $\theta(s,c)$가 서어버의 수 s나 또는 대기용량 c에 대하여 각각 증가하는 concave함수이면 이의 합성함수로써 이익함수 $\Psi(\theta(s,c))$는 서어버의 수 s 또는 대기용량 c에 대하여 각각 증가하는 concave함수임을 쉽게 증명할 수 있다. 또한 서어버의 수 s에 대한 비용함수 $\gamma(s)$나 총 대기용량 b에 대한 비용함수 $\omega(b)$가 각각 s나 b에 대하여 증가하는 convex함수라고 가정한다.

먼저 단일변수에 대한 최적화문제로서 모형1과 모형2를 고려하면 $\theta(s,c)=\lambda\times[1-B(a,s,c)]$에 의하여 모형1의 경우는

$$\text{Max.}\ \Phi(s)=\Psi\{\lambda[1-B(a,s,b-s)]\}-\gamma(s),\quad s\leq b; \qquad (4.4)$$

그리고 모형2의 경우는

$$\text{Max.}\ \Phi(c)=\Psi\{\lambda[1-B(a,s,c)]\}-\omega(s+c),\quad c\geq 0; \qquad (4.5)$$

가 된다. 여기에서 $B(a,s,c)$는 서어버의 수 s 또는 대기용량 c에 대하여 각각 감소하는 convex함수이므로 $\lambda[1-B(a,s,c)]$는 증가하는 concave함수가 되며 결과적으로 $\Phi(s)$나 $\Phi(c)$는 concave함수가 된다. 그러므로 서어버의 수 s나 대기용량 c에 대한 단일변수함수의 최적화문제는 서어버나 대기용량의 수를 하나씩 순차적으로 증가시키며 최대점을 도출하는 한계배분의 방법을 적용하므로써 쉽게 해결될 수 있다. 즉

$$\triangle\Phi(s)=\Phi(s+1)-\Phi(s),\qquad s\geq 0, \qquad (4.6)$$

로 정의하고 처음으로 $\triangle\Phi(s)\leq 0$이 되는 s가 모형1의 최적해가 된다. 이는 s를 한번에 한 단위씩 증가시키며 목적함수 $\Phi(s)$가 처음으로 감소되는 s에서 알고리즘은 완료됨을 의미한다. 대기용량의 설계에 관한 모형2의 경우에도 위의 알고리즘이 동일하게 적용되어 최적해가 산정된다.

주어진 최적화문제는 생산률의 상한이나 하한을 설정하는 제약조건 등에 대하여도 쉽게 연장 적용될 수 있으며 그러한 경우에는 고려되는 변수의 범위가 제한되며 결과적으로 복잡성이 감소된다.

다음으로 서버의 수와 대기능력을 동시에 배분하는 식(4.3)은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\text{Max.}\ \Phi(s,b)=\Psi[\lambda(1-B(a,s,b-s))]-\gamma(s)-\omega(b). \qquad (4.7)$$

주어진 문제의 해를 구하기 위하여 총 대기용량 b가 주어져 있다고 가정하고 다음을 정의한다.

$$\Phi(s_b,b-s_b)=\text{Max.}_{1\leq s\leq b}\{\Psi[\lambda(1-B(a,s,b-s))]-\gamma(s)\}. \qquad (4.8)$$

식(4.8)은 실제적으로 총 대기용량 b가 주어져 있을 때의 최적 서어버의 수를 구하는 모형1에 해당되는 최적화문제로써 s_b는 주어진 문제에 있어서의 최적 서어버의 수를 의미하며 모형1의 한계배분방법에 의하여 쉽게 산정될 수 있다. 식(4.7)의 서어버와 대기용량의 동시 배분에 관한 본래의 문제는 식(4.8)를 이용 다음과 같이 모형화될 수 있다.

$$\text{Max.}\ \Phi(s,b)=\text{Max.}_{b\geq 1}\ \{\Phi(s_b,b-s_b)-\omega(b)\}. \qquad (4.9)$$

만약, $\Psi[\lambda(1-B(a,s,c))]$가 s와 b에 대하여 공동으로(jointly) 증가하는 concave이면 주어진 문제는 b를 한 단위씩 증가 시키면서 주어진 b에 대한 s_b를 식(4.4)와 같은 방법을 적용하여 산정하며

$$\triangle\Phi(s_b,b)=\Phi(s_{b+1},b+1)-\Phi(s_b,b),\ b\geq 1, \quad (4.10)$$

에 의하여 최초로 $\triangle\Phi(s_b,b)\leq 0$이 되는 b에서 주어진 알고리즘은 끝나며 최적해(s_b,b)를 구할 수 있다. 그러나 정리1에서 정리4로 제시된 결과는 생산률에 대한 이익함수 $\Psi[\lambda(1-B(a,s,c))]$가 서어버의 수 s나 대기용량 c의 각각에 대하여는 일계특성과 이계특성을 만족되나 공동으로(jointly) 이계특성이 만족시킴을 제시하지 못하고 있으며 결과적으로 전술된 방법을 적용하여 최적배분을 산정할 수 있다고 할 수가 없다. 그럼에도 불구하고 주어진 문제는 다음과 같이 효율적으로 해결될 수 있다.

정리5 : 식(4.9)로 정의되는 서어버와 대기용량의 배분에 관한 최적화문제에 있어서 최적 총 대기용량 b^*를 산정할 수 있는 절차는 다음과 같이 요약될 수 있다.

$$\{\phi(s_{b^*},b^*-s_{b^*})-\omega(b^*)\}=\mathrm{Max.}_{1\leq b\leq b0}\{\phi(s_b,b-s_b)-\omega(b)\}. \quad (4.11)$$

여기에서 b_0는 다음의 관계식을 만족시키는 가장 작은 정수 b이다. 즉

$$\{\phi(s_{b0},b^*-s_{b0})-\omega(b_0)\}/b_0<\omega(b_0)-\omega(b_0-1). \quad (4.12)$$

증명 : Shanthikumar와 Yao[12]의 Theorem2의 증명과 동일한 방법에 의한다. 또한 목적함수에 포함되는 생산률이 두 설계모수에 대하여 공동으로 concavity를 만족시킴은 증명되지 못하였으나 정리5의 증명과정을 통하여 함수 $\phi(s_b,b-s_b)$는 b에 대하여 sublinearity를 만족시킴을 알 수 있다.

정리5로 기술되는 최적화의 절차는 공동으로 concavity를 만족시키는 경우와 비교하여 얼마간의 복잡성이 추가됨에도 불구하고 sublinearity의 특성을 고려할 때 주어진 알고리즘은 Fox[3]의 한계배분 알고리즘과 큰 차이가 없음을 알 수 있으며 식(4.8)과 식(4.11)에 의한 계산의 수의 상한이 $b_0(b_0+1)/2$로 제한되므로써 매우 쉽게 주어진 문제의 최적해에 도달할 수 있음을 실제적으로 보일 수 있다.

5. 수치 예

본 절에서는 고객의 시스템에의 도착률, 서어버의 서비스율, 단위 고객당 이익, 단위 기간당 단위 서어버 비용과 단위 대기용량 비용이 주어졌을 때 이에 대한 최적 배분결과를 보이고자 한다. 생산률에 대한 이익함수, 서어버나 대기용량에 관한 비용함수는 모두 선형으로 가정하였다.

〈표 1〉 최적배분의 예

고객도착률	서어버의 서비스율	고객당 단위 이익	단위 서어버 비용	단위 대기용량 비용	최적 서어버의 수	최적 대기용량	봉쇄확률	생산률	최대 이익
10	3	3	0.5	0.3	5	9	0.0225	9.775	24.126
10	2.4	3	1	0.5	5	9	0.0664	9.336	18.508
15	4	4	2	1	5	8	0.057	14.144	38. 578
20	3	4	2	1	8	12	0.0545	18.91	47.642
20	3	3	1	0.1	8	21	0.0087	19. 827	49.381
20	4	42	7	4	7	13	0.0127	19.746	728.34
30	7	33	9	6	7	11	0.0099	29.703	851.818

6. 결 론

M/M/s/s+c 대기시스템의 수행도로서 생산률은 서어버의 수와 대기용량의 함수로 결정되며 더불어서 이에 따른 비용을 수반한다. 본 논문에서는 생산률의 변화에 따른 이익함수가 존재하고 서어버나 대기공간의 설치에 따른 비용함수가 존재할 때 이의 결합으로 표시되는 수익함수의 최적화문제를 다루었다. 주어진 최적화문제의 해결을 위하여 먼저 일반화된 Erlang loss함수의 일계특성과 이계특성을 도출하였다. 여기에서는 일반화된 Erlang loss함수를 연속적인 함수로 고려하거나 추계적으로 접근한 기존의 접근방법과 구별하여 서어버의 수와 대기용량이 이산적임을 고려하여 일반화된 Erlang loss함수의 특성을 이산적 변수에 대한 함수로써의 특성에 충실하여 이를 증명하였다. M/M/s/s+c 대기시스템의 수행도로서 makespan이나 생산률의 서어버의 수나 대기용량에 대한 일계특성이나 이계특성은 추계적 방법[11] 또는 논리적 모형으로서의 Generalized Semi-Markov process[4,5]로 모형화 하므로써 해결될 수도 있으나 여기에서는 생략하기로 한다. 또한 이러한 일계특성과 이계특성에 의하여 주어진 최적화문제에 쉽게 접근할 수 있는 해법이 제시되었으며 두 변수의 대한 특성으로서 sublinearity가 동시에 보여질 수 있었다. 끝으로 본 논문은 Shanthikumar와 Yao[12]의 폐쇄대기네트워크에 있어서의 최적화문제의 특수한 형태로 고려될 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Buchner, M. M. and S. R. Neal, "Monotonicity of the Load on the Last Server," unpublished paper(1972).

[2] Chang, C., X. Cao, M. Pinedo and J. G. Shanthikumar, "Stochastic Convexity for Multidimensional Processes and Its Applications," *IEEE Trans. Auto. Control* 36(1991), 1347-1355.

[3] Fox, B., "Discrete Optimization via Marginal Analysis," *Mgt. Sci.*, 13(1966), 210-216.

[4] Glasserman, P. and D. D. Yao, "Monotonicity in Generalized Semi-Markov Processes," *Math. Oper. Res.* 17 (1992a), 1-121.

[5] Glasserman, P. and D. D. Yao, "Generalized Semi-Markov Process : Antimatroid Structure and Second -Order Properties," *Math. Oper. Res.* 17 (1992b), 444-469.

[6] Jagers, A. A. and E. A. Van Doorm, "On the Continued Erlang Loss Function," *Oper. Res. Lett.* 5(1986), 43-47.

[7] Krupp, R. S., "Convexity of Erlang B and C," unpublished paper(1972).

[8] Messerli, E. J., "Proof of a Convexity Property of the Erlang B Formula," *Bell Syst. Tech. J.* 51(1972), 951-953.

[9] Pacheco, A., "Second Order Properties of the Loss Probability in M/M/s/s+c Systems," Technical Report No. 1011, School of OR&IE, Cornell Uni., New

York(1992).

[10] Pacheco, A., "Second-Order Properties of the Loss Probability in M/M/s/s+c Systems," *Queueing Systems* 15(1994), 289-308.

[11] Ross, S. M., *Stochastic Process*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1983).

[12] Shanthikumar, J. G. and D. D. Yao, "Optimal Server Allocation in a System of Multi-Server Stations," *Mgt. Sci.* 33(1987), 1173-1180.

[13] Shanthikumar, J. G. and D. D. Yao, "Second-Order Properties of the Throughput of a Closed Queueing Networks," *Math. Oper. Res.* 13(1988), 524-534.