

광선 교차점 평균과 최적초점*

심상현 · 박성종 · 정창섭

전남대학교 물리학과

(1996년 8월 26일 받음)

수차를 포함하고 apodized된 광학계의 출사동에서의 파면의 형태로부터 광선의 진행방향을 결정하고, 이들의 평균 교차 위치를 결정하였다. 이 위치는 비교적 간단한 계산으로 구할 수 있으며, 수차가 약 2λ보다 클 때는 Safa의 회절초점보다 최대 강도점에 근접하였다.

I. 서 론

결상 광학계에서 최상의 상질을 얻을 수 있는 상면의 위치를 결정하는 것은 매우 중요하다. 일반적으로 회절 초점은 강도가 최대인 상점으로 정의된다. 회절초점은 무수차 광학계에서는 기하광학적 초점에 있으며, 수차가 주어지면 이동되어진다. 그 이동은 수차의 종류와 크기에 따라 다르며, 동의 형태에 의해서도 영향을 받는다. 회절초점은 displacement theorem을 이용하여 찾을 수 있으며^[1], 강도분포의 미분이 영인 점으로 결정하기도 한다^[2]. Helen Safa는 파면수차의 표준편차를 최소화 하는 표준구면의 중심으로 회절초점을 정하는 방법을 소개하였다. Safa의 방법은 매우 작은 수차를 포함하는 경우에 유용하며, 수차의 크기가 커지면 오차가 급속히 증가한다.^[3]

출사동상에서의 파면의 형태로부터 광선의 방향을 계산하고, 광선의 교차점을 결정하였다. 이 좌표의 평균을 최대 강도점 및 Safa의 회절초점과 비교하였다. 비교에 사용된 최대 강도점의 위치는 PSF계산을 통하여 구하였다. 고려한 수차는 비대칭 수차인 왜곡수차와 코마수차, 대칭 수차인 상면만곡수차, 구면수차와 비점수차이고, apodized된 광학계로는 동의 중심에서 가장자리로 감에 따라 진폭투과가 감소하는 T_A 와 동의 중심에서 가장자리로 감에 따라 진폭투과가 증가하는 T_B 의 두 가지 shaded aperture이다.

II. 수차함수와 평균 광선 교차점

광학계의 파면수차는 출사동상에서 실제파면과 표준구면과의 광학적 거리 차로 정의된다. 대칭광학계의 파면수차함수 $W(x, y)$ 는

$$W(x, y) = \sum_{m,p} W_{mp} (x^2 + y^2)^{\frac{m-p}{2}} y^p \quad (1)$$

와 같이 주어지며, 수차계수 W_{mp} 는 광선추적으로부터 얻을 수 있다. 그리고 여기에서 모든 항들은 자오면에 대하여 대칭이므로^[4] x 에 대한 우함수이다.

기하광학적 초점거리가 f_0 이고, $W(x, y)$ 의 파면수차를 포함하는 광학계에서, 표준구면의 중심(gaussian focus)을 원점으로 하고, 광축을 z 축으로 하는 좌표계를 사용하면, 실제파면의 방정식은

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + [z(x, y) - W(x, y)]^2 - f_0^2 = 0 \quad (2)$$

과 같이 표현되며, $z(x, y) - W(x, y)$ 는 부호가 음(-)이므로,

$$z(x, y) = W(x, y) - \sqrt{f_0^2 - (x^2 + y^2)} \quad (3)$$

이 된다.

한편 광선의 방향은 파면에 수직인 방향으로 정의되고, 이 파면상의 점 (x, y, z) 를 지나는 광선의 방정식은

$$\frac{X-x}{dF/dx} = \frac{Y-y}{dF/dy} = \frac{Z-z}{dF/dz} \quad (4)$$

와 같이 표현되며, 여기에서 좌표점 (X, Y, Z) 는 상측에서

*이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의해 연구되었음

광선이 진행해 가는 점들의 좌표를 나타내게 된다.

이로부터 Y 가 일정한 임의의 평면과 광선이 교차하는 점의 X 좌표, X_Y 와 기하광학적 초점에서 Z 만큼 이동한 상평면과 광선이 교차하는 점의 X 좌표 X_Z 를 구해 보면 다음과 같다.

$$X_Y = x + \frac{x + \sqrt{f_0^2 - (x^2 + y^2)} \frac{\partial W}{\partial x}}{y + \sqrt{f_0^2 - (x^2 + y^2)} \frac{\partial W}{\partial y}} (Y - y)$$

$$X_Z = x - \frac{x + \sqrt{f_0^2 - (x^2 + y^2)} \frac{\partial W}{\partial x}}{\sqrt{f_0^2 - (x^2 + y^2)}} \cdot [Z - W(x, y) + \sqrt{f_0^2 - (x^2 + y^2)}] \quad (5)$$

한편, apodized 광학계에서 어떤 양 Q 의 평균은

$$\bar{Q} = \frac{\iint_{pupil} \rho(x, y) Q(x, y) dx dy}{\iint_{pupil} \rho(x, y)} \quad (6)$$

와 같이 적분의 형태로 계산되며, 여기서 $\rho(x, y)$ 는 apodized function이다. 따라서 회전대칭인 광학계에서는 피적분 함수가 x 또는 y 에 대해 기함수이면 그 평균은 영(0)이 된다.

회전대칭인 광학계에서는 $\rho(x, y)$ 가 x 와 y 에 대해 우함수이며, $W(x, y)$ 가 x 의 우함수임을 이용하면

$$\bar{X} = \bar{X}_Y = \bar{X}_Z = 0 \quad (7)$$

과 같이 되어 X 의 평균은 항상 영(0)임을 알 수 있다.

이제 $\bar{X} = 0$ 인 자오평면과 광선이 교차하는 점의 Y 좌표를 구하면

$$\bar{Y} = \bar{Y}_Y = -f_0 \left[\frac{x \frac{\partial W}{\partial y} - y \frac{\partial W}{\partial x}}{x + f_0 \frac{\partial W}{\partial x}} \right] \quad (8)$$

와 같다.

한편, $X = \bar{X} = 0$ 인 자오평면에서와 $Y = \bar{Y}$ 인 평면에서 광선의 Z 좌표 $Z_{\bar{X}}$ 와 $Z_{\bar{Y}}$ 를 각각 구하여, 일반적인 광학계에서 $(x^2 + y^2) \ll f_0^2$ 이고, 수차가 작은 광학계에서의 $W(x, y) \ll f_0$, $Z \ll f_0$ 인 조건에서 근사하면

$$\bar{Z}_{\bar{X}} = -f_0^2 \left[\frac{\frac{\partial W}{\partial x}}{x + f_0 \frac{\partial W}{\partial x}} \right]$$

$$\bar{Z}_{\bar{Y}} = -f_0^2 \left[\frac{\frac{\partial W}{\partial y} + \bar{Y}/f_0}{y + f_0 \frac{\partial W}{\partial y}} \right] \quad (9)$$

이 된다. $\bar{Z}_{\bar{X}}$ 와 $\bar{Z}_{\bar{Y}}$ 의 평균을 \bar{Z} 로 하면

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_{\bar{X}} + \bar{Z}_{\bar{Y}}}{2}$$

$$= -\frac{f_0^2}{2} \left\{ \left[\frac{\frac{\partial W}{\partial x}}{x + f_0 \frac{\partial W}{\partial x}} \right] + \left[\frac{\frac{\partial W}{\partial y} + \bar{Y}/f_0}{y + f_0 \frac{\partial W}{\partial y}} \right] \right\} \quad (10)$$

와 같이 구할 수 있다.

한편, Helen Saha^[3]에 의해 구해진 대칭광학계의 회절초점의 좌표,

$$\bar{X} = 0$$

$$\bar{Y} = -\frac{f_0 y \overline{W(x, y)}}{\bar{y}^2}$$

$$\bar{Z} = -\frac{2f_0^2 [(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)] W(x, y)}{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2} \quad (11)$$

와 비교해 보면, \bar{X} 는 두 방법의 결과가 동일하며, \bar{Y} 와 \bar{Z} 는 그 형태가 서로 다르게 나타난다.

III. 수차포함 광학계의 평균 광선 교차점

광학계가 왜곡수차, 코마수차, 상면만곡수차, 구면수차

표 1. 대칭수차에 의한 회절초점의 축방향 이동

수 차	\bar{Z}	
	본 연구의 결과	Safe의 결과
상면만곡 $W_{20}(x^2 + y^2)$	$-2f_0^2 W_{20}$	$-2f_0^2 W_{20}$
구면수차 $W_{40}(x^2 + y^2)^2$	$-4f_0^2 W_{40} \overline{(x^2 + y^2)}$	$-2f_0^2 W_{40} \frac{[(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)](x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2}$
비점수차 $W_{22}y^2$	$-f_0^2 W_{22}$	$-2f_0^2 W_{22} \frac{\overline{(x^2 + y^2)y^2} - \overline{(x^2 + y^2)(y^2)}}{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2}$

표 2. 대칭수차에 의한 최적초점의 축방향 이동

수 차	\bar{Y}	
	본 연구의 결과	Safa의 결과
왜곡수차 $W_{11}y$	$-f_0 W_{11}$	$-f_0 W_{11}$
코마수차 $W_{31}(x^2+y^2)y$	$-f_0 W_{31} \overline{(x^2+y^2)}$	$-f_0 W_{31} \frac{(x^2+y^2)y^2}{\bar{y}^2}$

또는 비점수차를 포함하고 있을 때의 평균 광선 교차점의 좌표 (\bar{X} , \bar{Z})를 (8)식, (10)식을 이용하여 구해보자.

왜곡수차의 수차함수는 $W(x, y) = W_{11}y$ 이고, 그 편미분은 $\partial W/\partial x = 0$, $\partial W/\partial y = W_{11}$ 이므로 왜곡수차를 갖는 광학계에서는

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{11} &= -f_0 W_{11} \\ \bar{Z}_{11} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

과 같이 구해진다. 또 상면만곡의 수차함수는 $W(x, y) = W_{20}(x^2+y^2)$ 과 같으므로

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{20} &= 0 \\ \bar{Z}_{20} &= -2f_0^2 W_{20} \left(\frac{1}{1+2f_0 W_{20}} \right) \\ &\approx -2f_0^2 W_{20} \end{aligned} \tag{13}$$

와 같이 된다. 이와 같이 코마수차, 구면수차, 또는 비점수차를 갖는 광학계에서 대해서도 이를 구하여 (11) 식으로 구한 Safa의 결과와 비교해 보면 대칭 수차인 상면만곡, 구면수차, 비점수차의 경우에는 $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ 이고, \bar{Z} 는 표 1과 같으며, 비대칭수차인 왜곡수차와 코마수차의 경우에는 $\bar{X} = \bar{Z} = 0$ 이고, \bar{Y} 는 표 2와 같다. 여기에서 왜곡수차와 상면만곡의 경우에는 두 가지 방법의 결과가 일치하였다. 나머지 다른 수차의 경우에는 서로 다른 결과를 보였으며, 본 연구에 의한 결과가 더 간단하게 표현되어 계산이 간편함을 알 수 있다.

IV. Apodized 광학계의 최적초점

본 연구에서 구한, 그리고 Safa의 방법으로 구한 최적초점의 위치와 PSF 계산으로 구한 최대 강도점의 위치를 비교해 보기 위하여 다음과 같은 두 가지 형태의 shaded aperture T_A , T_B 와 clear aperture T_C 를 도입하였다.

$$\begin{aligned} T_A &= 1 - (x^2 + y^2) & (x^2 + y^2) \leq 1 \\ &= 0 & (x^2 + y^2) > 1 \end{aligned}$$

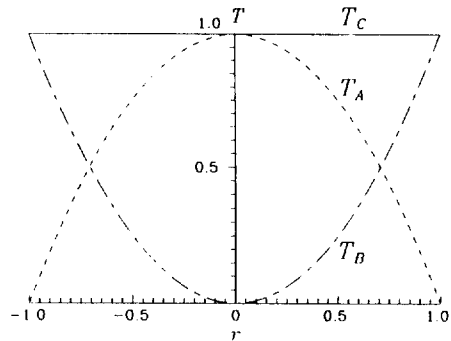


그림 1. 진폭변화.

$$\begin{aligned} T_B &= x^2 + y^2 & (x^2 + y^2) \leq 1 \\ &= 0 & (x^2 + y^2) > 1 \\ T_C &= 1 & (x^2 + y^2) \leq 1 \\ &= 0 & (x^2 + y^2) > 1 \end{aligned} \tag{14}$$

T_A 와 T_B 는 shaded aperture이며, T_A 는 동의 중앙에서 가장자리로 감에 따라 진폭이 서서히 감소하는 형태이고, T_B 는 동의 중앙에서 가장자리로 감에 따라 진폭이 서서히 증가하는 형태이다. T_C 는 동의 내부의 모든 영역에서 진폭이 일정한 clear aperture이다. T_A 와 T_B 의 진폭분포를 T_C 와 함께 그림 1에 보였다.

이와 같은 세 가지 형태의 진폭을 갖는 광학계가 상면만곡, 구면수차, 비점수차를 포함하는 경우의 축방향 초점 이동량과 왜곡수차와 구면수차를 포함하는 경우의 자오방향 이동량을 계산하여 Safa의 결과와 비교하면 표 3과 같다. 이들 중 상면만곡, 비점수차, 왜곡수차를 포함할 경우에는 본 연구의 결과와 Safa의 결과가 동일하나, 구면수차를 포함할 경우에는 clear aperture에서만 서로 일치하였고, 코마를 포함하는 경우에는 모두 서로 다른 결과를 보였다.

V. 계산결과 및 토의

광학계가 구면수차를 포함하는 경우에 최대 강도점의 위치를 PSF 계산⁵⁾에 의해 구하여, 위의 두 가지 방법으로 계산된 초점 이동량과 함께 그림 2에 나타내었다. 그림 2(a)는 두 가지 shaded aperture의 경우인데, 구면수차에 의한 최대 강도점의 위치이동과 상면만곡에 의한 이동의 비가 곡선의 형태인 반면, 본 연구의 결과와 Safa의 결과는 1차 근사인 관계로 직선으로 나타났다. 그림에서 보이는 바와 같이 Safa의 직선은 최대 강도점 곡선의 무수차 점에서 접하는 형태이며, 본 연구의 결과는 구면수차가 약 2.5λ 인 점에서 곡선과 교차하였다. 따라서

표 3. 수차에 따른 초점 이동량

진폭	$\frac{Z_{20}}{f_0^2 W_{20}}$		$\frac{Z_{40}}{f_0^2 W_{40}}$		$\frac{Z_{22}}{f_0^2 W_{22}}$		$\frac{Y_{11}}{f_0^2 W_{11}}$		$\frac{Y_{31}}{f_0^2 W_{31}}$	
	본 연구	Safa	본 연구	Safa	본 연구	Safa	본 연구	Safa	본 연구	Safa
T_A	2	2	1.333	1.600	1	1	1	1	0.333	0.500
T_B	2	2	2.667	2.400	1	1	1	1	0.667	0.750
T_C	2	2	2	2	1	1	1	1	0.500	0.667

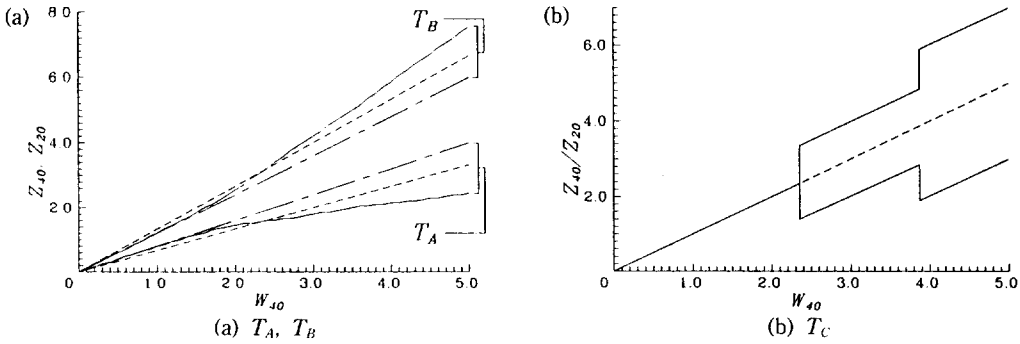


그림 2. 구면수차를 갖는 광학계의 최치초점 (—: PSF계산에 의한 최대 강도점, ----: 본 연구의 결과,: Safa의 결과)

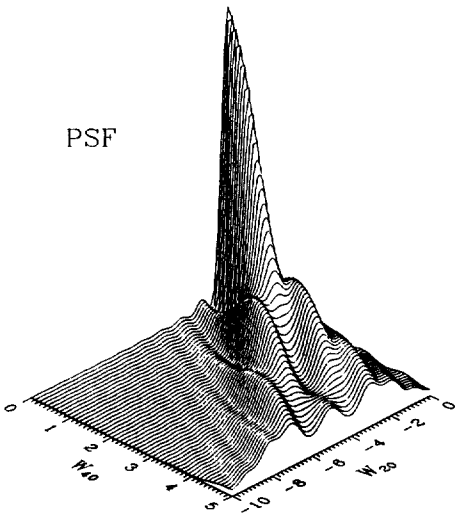


그림 3. 구면수차를 갖는 광학계의 축상 PSF.

Safa의 결과는 수차가 지극히 작은 경우에 최대 강도점에 근접하고 수차가 커짐에 따라 오차가 증가함을 볼 수 있다. 반면에 본 연구의 결과는 비교적 큰 수차의 범위까지 작은 오차를 보이고 있다. 그림 2(b)는 clear aperture에 대한 그림이다. 최대 강도점의 위치가 약 2.4λ 까

지는 하나의 직선으로 나타나고 있으나, 그 이후로는 앞의 곡선과 불연속이며, 앞의 곡선에 대칭인 두 직선으로 나타나며, 약 4.3λ 에서 다시 불연속인 새로운 두 직선이 된다. 이는 그림 3의 축상 PSF에 나타난 것처럼 구면수차가 증가함에 따라 최대 강도점의 앞, 뒤 대칭적 위치에 있던 주극대가 새로운 최대 강도점으로 발달함으로써 발생하는 현상이다. 본 연구의 결과와 Safa의 결과는 동일하게 최초의 직선과 일치하고 있음을 알 수 있다.

그림 4(a), 그림 4(b)와 그림 4(c)는 각각 비점수차를 포함하며, 진폭분포가 T_A , T_B , T_C 인 광학계에 대한 그림이다. 최대 강도점의 위치가 처음에는 하나의 직선형태로 변화하지만, 수차가 어느 정도 커지게 되면 두 곡선의 형태를 보이게 된다. 이는 그림 5에 나타난 바와 같이 비점수차가 커짐에 따라 최대 강도점이 앞, 뒤 두 위치로 분화해 감으로써 발생하는 현상이다. 본 연구의 결과와 Safa의 결과는 동일하며, 처음의 직선과 일치하고 있다.

광학계가 왜곡수차나 코마수차를 포함하면 초점이 횡으로 이동한다. 그림 6은 코마에 의한 이동량과 왜곡수차에 의한 이동량의 비를 보이고 있다. 모든 aperture에 있어서 본 연구의 결과와 Safa의 결과가 서로 달랐으며,

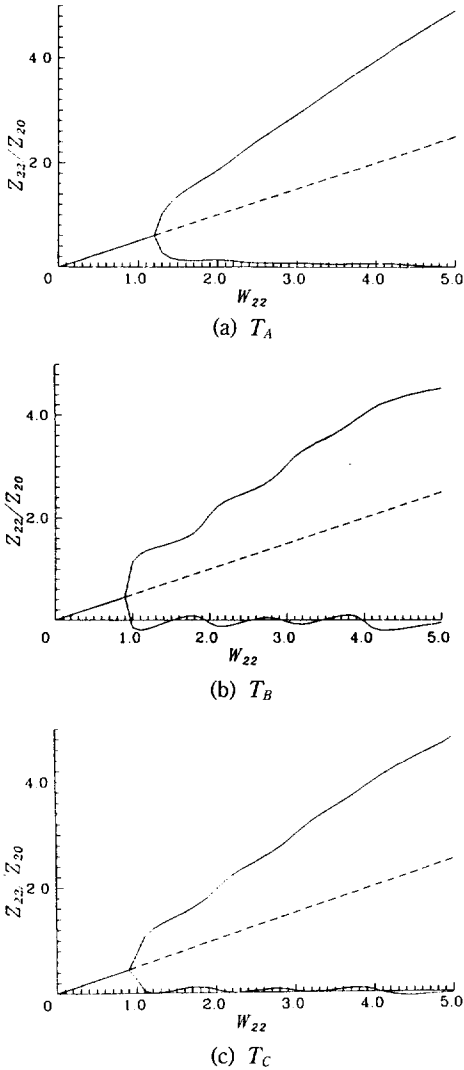


그림 4. 비점수차를 갖는 광학계의 최적초점 (—: PSF계산에 의한 최대 강도점, ----: 본 연구의 결과 및 Safe의 결과).

PSF계산에 의한 최대 강도점의 위치는 곡선의 형태로 변화하였다. 코마를 포함하는 광학계에서도 구면수차를 포함하는 shaded aperture의 경우와 비슷한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

VI. 결 론

수차를 포함하는 광학계의 근사적 최적초점을 광선의 평균 교차점으로 계산하였다. 구해진 최적초점은 수차가 극히 작을 때는 Safe의 결과보다 최대 강도점에서 멀었

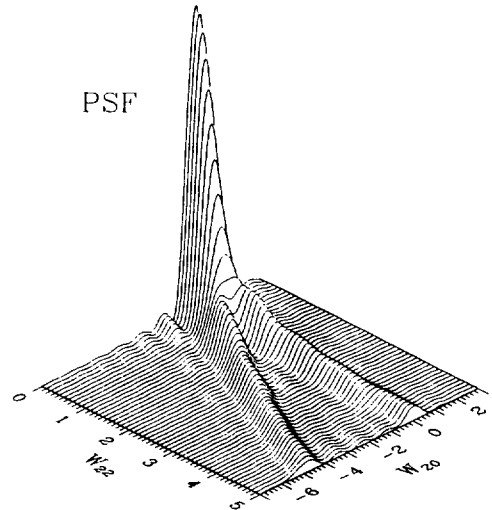


그림 5. 비점수차를 갖는 광학계의 축상 PSF.

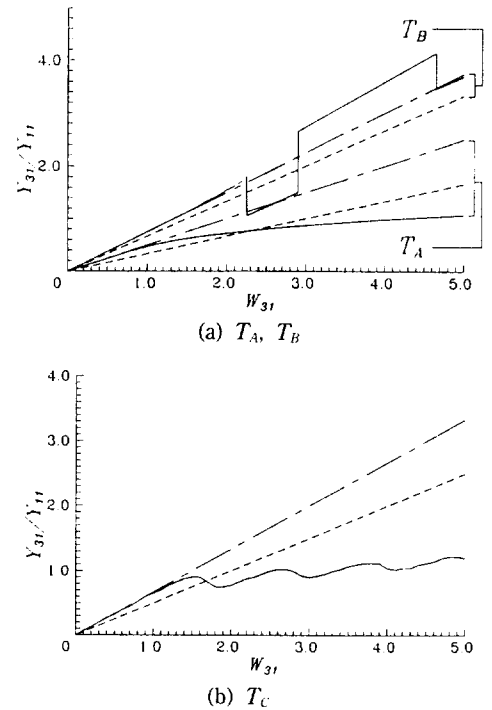


그림 6. 코마수차를 갖는 광학계의 최적초점 (—: PSF계산에 의한 최대 강도점, ----: 본 연구의 결과, ----: Safe의 결과).

지만 그 오차는 별로 크지 않았으며, 수차가 증가함에 따라 Safe의 결과보다 최대 강도점에 접근함을 알 수 있었다. 이와 같은 결과는 두 가지 형태의 shaded aper-

ture와 clear aperture 모두에서 확인되었다. 따라서 본 연구에서 구해진 광선 교차점의 평균은 비교적 작은 수차를 포함하며 apodized된 광학계의 최적초점을 근사적으로 구하고자 할 때 사용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] Max Born and Emil Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon Press, New York, 1983),

Chap. 9.
[2] Claudio Rivolta, *Appl. Opt.*, **29**(22), 3249 (1990).
[3] Helene Safa, *Appl. Opt.*, **31**(13), 2229 (1992).
[4] R. R. Shannon and J. C. Wyant ed., *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. VIII (Academic Press, New York, 1980), Chap. 6.
[5] C. S. Chung, H. H. Hopkins, *J. Mod. Opt.*, **35**(9), 1485 (1988).

The Average Ray Crossing Position and the Best Focus

Sang Hyun Sim, Seong Jong Park and Chang Sub Chung
Department of Physics, Chonnam National University, Kwangju 500-757, Korea

(Received: August 26, 1996)

We numerically determined the direction of ray and the average ray-crossing position from the shape of the wavefront on the exit pupil of optical system which had aberrations and apodized aperture. This position was calculated easier and closer to the position of the maximum intensity than that calculated by Safa's method when the aberration is greater than about 2λ .