

부분구조 합성법을 이용한 공작기계 구조물의 동적설계

이원평*, 김광래*, 이동명**

Dynamic Design of Machine Tool Structure by Substructure Synthesis Method

Won-Pyung Lee, Kwang-Lae Kim, Dong-Myung Lee

Abstract

In this study, to choose the drilling m/c with analysis model for dynamic design of machine tool structures, are used substructure synthesis method for reduction to degrees of freedom of dynamic model and analysis evaluation of substructures. The dynamic factors of substructures are examined by substructure synthesis method. And that dynamic design of structures for energy balancing are performed.

The computer program for calculated of the dynamic and energy distribution analysis was developed. Result of numerical analysis by developed program obtained to conclusion as following. The design of machine tool structures by dynamic avoid the resonances, and are known to considered based on the energy balancing.

These methods can be used effectively for the performance evaluation, design modification and improvement of dynamic performance of machine tools.

Keywords : Mode synthesis(모드합성), Substructure(부분구조), Finite element(유한요소), Natural frequency(고유진동수), Energy distribution(에너지 분포)

* 인덕전문대학
** 한국과학기술연구원

1. 서 론

산업의 자동화와 더불어 기계부품의 가공정도가 높아지고 고속화됨에 따라 공작기계의 고정밀도가 요구되고 있다. 부품 가공 시 공작기계 구조물에 미치는 영향은 정특성과 동특성⁽¹⁾ 두 가지로 대별할 수 있다. 이들 요인중 특히 동특성은 공작기계의 정밀도를 저하시키고 심지어는 구조물을 파괴시키는 원인이 되기도 한다. 동특성으로는 공구-가공물간의 상대진동(자려진동)을 유발시키는 chattering⁽²⁾, 그리고 회전 부의 불균형 등에 의해 생기는 강제진동 등이 있다. 이들 동특성은 가공정도 뿐만 아니라 공작기계 구조물 자체에도 영향을 미치므로, 이들 인자를 정확히 규명한 후 구조물의 설계가 이루어져야 한다.

공작기계와 같이 복잡한 구조물의 동적해석은 통상 유한요소로 모델링하여 해석을 수행한다. 유한요소 모델은 요소의 수에 따라 방대한 자유도를 가지므로 해석 시 컴퓨터의 능력을 넘어서거나 많은 계산시간을 요하게 된다. 따라서 크고 복잡한 구조는 여러 개의 부분구조로 설계되어 제작되는 경우가 많다. 그러므로 동적모델의 자유도 수를 줄이고, 부분구조의 동적해석과 설계가 가능하도록 독립성을 줄 수 있는 방법이 필요하다. 이러한 관점에서 Nagamatsu 등^(3,4)은 구분 모드합성법을 이용한 고유진동수와 진동모드의 계산방법과 부분구조의 분할방법에 대하여 연구를 하였으며, 이들은 여러 가지 형태의 구조물을 모델로 선택하여 부분구조 합성법에 대한 유용성과 응용성에 대해 연구를 하였다⁽⁵⁾.

본 연구에서는 공작기계 구조물의 해석·평가 및 예측을 위해 구조물을 몇 개의 부분구조로 나누어 유한요소법^(6,7) 등의 수치해석 방법을 적용한 후 다시 합성하는 부분구조 합성법을 이용하여 구조물의 동적모델의 자유도를 줄임으로서 기존의 유한요소법의 단점을 보완하고, 해석모델로는 공작기계 구조물 중 drilling m/c를 선택하여 구조물을 단순한 보^(8,9)로 고려한 기존 방법이 아닌 실제 형상에 가까운 사각형 요소의 박판 구조물로 모델링하여 동특성이 구조물에 미치는 영향과 동적인자에 의한 각 부분구조의 에너지 분포(Energy distribution)를 고찰하였으며, 에너지 균형(Energy balancing)^(10,11)에 의한 구조물의 동적설계를 실시하고자 한다. 이러한 동적설계로부터 설계 초기 단계에서 동적인자와 에너지

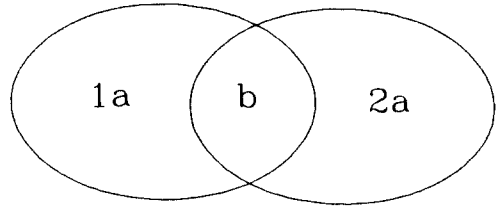


Fig. 1 Structure System Composed of 2 Substructures

분포를 규명함으로써, 사전에 공작기계 구조물의 진동억제 및 진동제어를 할 수 있도록 하였다.

2. 해석이론

2-1 부분구조 모드합성

복잡한 기계 구조물을 기존의 유한요소법을 이용하여 정식화가 가능한 정도로 몇 개의 부분구조(Substructure)로 나누거나, 아니면 각 부분구조를 좀더 세분화하여 재분할을 할 필요가 있을 경우에는 다중구분 모드합성법을 적용할 수가 있다. Fig. 1에서와 같이 구조물의 전체(Total structure)를 2개의 부분구조로 분할 할 경우, 각 부분구조의 내부영역은 각각 1a와 2a로 표시하고, 부분구조 1a와 2a의 결합영역을 b로 표시한다⁽⁵⁾.

부분구조 1과 부분구조 2에 관한 자유진동의 운동방정식을 내부영역의 변위와 결합영역으로 나누어 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{aa}^{(1)} & M_{ab}^{(1)} \\ M_{ba}^{(1)} & M_{bb}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1a}'' \\ \delta_{1b}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa}^{(1)} & K_{ab}^{(1)} \\ K_{ba}^{(1)} & K_{bb}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_{1b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} M_{aa}^{(2)} & M_{ab}^{(2)} \\ M_{ba}^{(2)} & M_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{2a}'' \\ \delta_{2b}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa}^{(2)} & K_{ab}^{(2)} \\ K_{ba}^{(2)} & K_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{2a} \\ \delta_{2b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서 [M]과 [K]는 결합영역과 부분구조에서의 질량과 강성행렬, {δ}는 변위 그리고 {F}는 인접영역에서 작용하는 힘(내력)이다.

전 계의 자유도를 결합영역의 변위만의 자유도로 축소하기 위하여 Guyan^[12]의 정축소를 적용한다. 상기 운동방정식은 관성항을 포함하고 있어 축소가 곤란하지만, 여기서 관성항이 강성항에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다고 한다면 관성항을 무시하고 정축소를 실시한다.

먼저 부분구조 1의 경우, 식(1)의 상반부에서 관성항을 생략하고 정리하면

$$[K_{aa}^{(1)}]\{\delta_{1a}\} + [K_{ab}^{(1)}]\{\delta_{1b}\} = 0 \quad (3)$$

을 얻을 수 있다. 식(3)을 $\{\delta_{1a}\}$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\{\delta_{1a}\} = -[K_{ab}^{(1)}]^{-1}[K_{aa}^{(1)}]\{\delta_{1b}\} = [T_1]\{\delta_{1b}\} \quad (4)$$

여기서 $[T_1]$ 은 정축소 행렬을 의미하고, 식(4)를 이용하면 전 계의 변위를 결합영역의 변위로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_{1b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ I \end{bmatrix} \{\delta_{1b}\} \quad (5)$$

결합영역의 변위는 각 부분구조의 변위와 같으므로 즉, $\{\delta_b\} = \{\delta_{1b}\} = \{\delta_{2b}\}$ 가 된다. 식(5)를 식(1)에 대입하고 $[T_1^T \ I]$ 를 곱하면 질량과 강성행렬을 축소할 수 있다. 축소된 질량과 강성행렬을 각각 $[\overline{M}_1], [\overline{K}_1]$ 라고 하면 다음과 같다.

$$[\overline{M}_1] = [T_1^T] \begin{bmatrix} M_{aa}^{(1)} & M_{ab}^{(1)} \\ M_{ba}^{(1)} & M_{bb}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ I \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\overline{K}_1] = [T_1^T] \begin{bmatrix} K_{aa}^{(1)} & K_{ab}^{(1)} \\ K_{ba}^{(1)} & K_{bb}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ I \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 $[I]$ 는 단위행렬이다.

같은 방법으로 부분구조 2에 대해서 정리하면 정축소 행렬 $[T_2]$ 와 축소된 질량행렬 $[\overline{M}_2]$ 과 강성행렬 $[\overline{K}_2]$ 를 구할 수 있다.

그리고 각 부분구조에 대한 운동방정식은 식(8)과 같이 결합영역의 자유도만으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [\overline{M}_1]\{\delta_{1b}^{\ddot{}}\} + [\overline{K}_1]\{\delta_{1b}\} &= \{F\} \\ [\overline{M}_2]\{\delta_{2b}^{\ddot{}}\} + [\overline{K}_2]\{\delta_{2b}\} &= \{-F\} \end{aligned} \quad (8)$$

따라서 식(8)의 두식을 합하면 다음과 같은 고유치 문제로 나타낼 수 있다.

$$[\overline{M}_1 + \overline{M}_2]\{\delta_b^{\ddot{}}\} + [\overline{K}_1 + \overline{K}_2]\{\delta_b\} = \{0\} \quad (9)$$

결합영역의 변위는 $\{\delta_b\} = \{\delta_{b0}\} \exp(j\omega t)$ 로, 각 진동수 ω 에 대한 조화함수로 나타낼 수 있고, 식(9)는 경계영역의 고유치 문제로서

$$([\overline{K}_1 + \overline{K}_2] - \omega^2 [\overline{M}_1 + \overline{M}_2])\{\delta_{b0}\} = \{0\} \quad (10)$$

와 같이 되고, 식(10)에 의해 저차에서 1차 까지의 고유모드를 구하고, 이들 고유모드로부터 모드행렬 $[\Phi_b]$ 를 구성하면 결합영역의 변위는 다음과 같다.

$$\{\delta_b\} = [\Phi_b]\{\xi_b\} \quad (11)$$

여기서 $\{\xi_b\}$ 는 $[\Phi_b]$ 중의 각 열 벡터에 의한 결합영역에서의 변위에 대한 기여율을 나타낸다.

다음 부분구조 1에 대해서도 결합영역 b를 고정하여 내부영역 1a만으로 관계된 질량과 강성행렬에 대한 고유치 문제로 나타내면 식(12)와 같다.

$$([K_{aa}^{(1)}] - \omega^2 [M_{aa}^{(1)}])\{\delta_{1a0}\} = \{0\} \quad (12)$$

식(12)에 의해 m차까지의 고유모드를 구하고, 이들 고유모드로부터 모드행렬 $[\Phi_{1a}]$ 를 구성하면, 결합영역의 변위에 대한 내부영역의 변위는 식(4)과 같이 표현되기 때문에 부분구조 1의 내부영역의 변위는 결합영역의 변위에 대한 내부영역의 변위와 경계를 고정했을 때의 내부영역 변위의 합으로서 나타낼 수 있다.

$$\{\delta_{1a}\} = [T_1]\{\delta_b\} + [\phi_{1a}]\{\xi_1\} \quad (13)$$

여기서 $\{\xi_1\}$ 은 (ϕ_{1a}) 중의 각 열 벡터에 의한 부분구조 1의 내부영역에서의 변위에 대한 기여율을 나타내고, 식(13)에 식(11)을 대입하면 식(14)을 얻을 수 있다.

$$\{\delta_{1a}\} = [T_1][\phi_b]\{\delta_b\} + [\phi_{1a}]\{\xi_1\} \quad (14)$$

부분구조 2에 대해서도 부분구조 1에서와 같이 내부영역 2_a 만으로 관계된 고유치 문제의 식을 구하고, 부분구조 2의 내부영역의 변위 $\{\delta_{2a}\}$ 도 각 진동수 ω 에 대한 조화함수로 나타내어 n 차까지의 고유모드를 구하고 그리고 이들 고유모드로부터 모드행렬 $[\phi_{2a}]$ 를 구성한다. 그러면 부분구조 2의 내부영역의 변위는 부분구조 1의 경우와 마찬가지로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{\delta_{2a}\} = [T_2][\phi_b]\{\delta_b\} + [\phi_{2a}]\{\xi_1\} \quad (15)$$

Fig. 1의 전 계의 운동방정식은 식(16)과 같고, 식(16)의 자유도의 크기는 결합영역의 고유모드와 부분구조 1,2의 고유모드의 합($l+m+n$)과 같다.

$$[\hat{M}]\{\dot{\xi}\} + [\hat{K}]\{\xi\} = \{0\} \quad (16)$$

식(11), (14) 및 (15)을 이용하여 그림 1의 전 계의 운동방정식의 좌표를 $\{\delta_{1a} \delta_{2a} \delta_b\}^T$ 에서 $\{\xi_1 \xi_2 \xi_b\}$ 로 변환시켜 자유도를 대폭 축소시킨 후에 식(16)의 고유치해를 구하면 전 계에 대한 고유진동수를 얻을 수 있고, 이때 얻어진 고유모드 $\{\xi_i\}$ 를 식(15)에 대입하면 전 계의 물리좌표에 대한 진동특성을 구할 수 있다. 그리고 부분구조의 수가 3개 이상일 경우에도 상기와 같은 방법을 이용하면 쉽게 구할 수가 있다.

2-2 박판요소의 강성과 질량행렬

본 연구의 해석모델에 이용된 박판요소의 형상은 Fig. 2와 같고 3차원 사각형 박판요소의 각 절점에는 직선과 회전변위 6개의 자유도를 갖고 요소 하나에는 24개의 자유도를 갖는다. Fig. 2에서 u, v, w 는 직선 변위, θ 는 각 축의 회전변위, t 는 판재의 두께, a 는

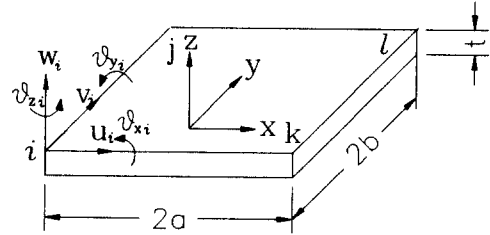


Fig. 2 Rectangular Plate Element Showing Displacement at the Nodal Points

판재의 길이 그리고 b 는 판재의 폭을 나타낸다. 박판요소의 변위는 면내와 면외변위로 구분할 수 있는데, 면내 변위는 u, v, θ_z , 면외변위는 w, θ_x, θ_y 가 된다. 요소의 강성과 질량행렬은 다음과 같고, 행렬 $[K_1] \sim [K_i], [L], [M_g]$ 는 문헌6과 7에 잘 나타나 있다.

$$[K]^{(e)} = \frac{Et^3}{720ab(1-\nu^2)} [L]([K_1] + [K_2] \quad (17)$$

$$+ \nu[K_3] + \frac{(1-\nu)[K_4]}{2}) [L]$$

$$[M]^{(e)} = [L][M_g][L] \quad (18)$$

여기서 E 는 탄성계수, ν 는 포아송 비 그리고 ρ 는 판재의 밀도이다.

각 부분구조에 대한 강성과 질량행렬은 각각 식(19)과 (20)와 같다.

$$[K] = \sum_{e=1}^n [K]^{(e)} \quad (19)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^n [M]^{(e)} \quad (20)$$

여기서 n 은 부분구조의 요소 수이고, e 는 요소번호이다.

2-3 에너지 분포

공작기계 구조물은 무한개의 자유도를 갖고 있으므로

무한개의 고유진동수를 가질 수 있다. 어떤 임의의 고유진동수에서 공진상태에 있는 구조물은 다음 두 가지 관계가 있다. 첫째, 구조물 전 계의 최대 운동에너지 T_m 은 전 계의 위치에너지 P_m 과 같다. 둘째, 정상공진 상태에서 한 사이클마다 계에 가해지는 에너지 E_m 은 전 계에서 소산되는 에너지의 합과 같다. 이러한 관계에 의해 구조물의 동특성을 고려한 공작기계의 동적설계는 에너지 균형에 근거를 두고 있다. m 차의 고유진동수에서 전 계의 운동에너지와 위치에너지는 각 부분구조의 운동에너지와 위치에너지의 합과 같으므로,

$$T_m = \sum T_{im}$$

$$P_m = \sum P_{im} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

으로 되고, n 은 부분구조의 수이다. 그리고 m 차에 대한 부분구조내의 절점변위 진폭을 $\{X_m\}$ 이라고 하면 각 부분구조가 갖는 최대 운동에너지와 위치에너지는 식(21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{im} = \frac{1}{2} (2\pi\omega)^2 \{X_{im}\}^T [M_i] \{X_{im}\} \tag{21}$$

$$P_{im} = \frac{1}{2} \{X_{im}\}^T [K_i] \{X_{im}\}$$

2-4 해석 프로그램의 흐름도

앞서 서술된 이론에 대한 해석 프로그램의 흐름도는 Fig. 3과 같고, 프로그램은 F77을 이용하여 작성하였다.

3. 해석결과 및 고찰

공작기계 구조물 중 drilling m/c를 해석모델로 선택하고 Fig. 4와 같이 단순화하여 모델링 하였다. Fig. 4에서 ①~④는 각 부분구조의 번호이며, ①은 head, ②는 column, ③은 bed, ④는 bottom 부분을 나타낸다. 해석모델은 158개의 절점과 159개의 사각형 박판요소로 구성하여 실제에 가깝게 하였고, 재질은 일반구조용 압연강재(SB 41)로 하여 고찰하였다. 해석모델의 기계적 성질은 탄성계수 $E=207$ GPa, 전단계수 $G=79.9$ GPa, 포아송비 $\nu=0.3$, 밀도 $\rho=7,850$ Kg/m³이다.

구조물의 동특성 해석에서 공작기계와 같은 대형 구조물은 몇 개의 저차 고유진동수만이 큰 의미가 있다. 저차인 몇 개의 해를 구하여 그 해에 의한 구조물 각 절점에서의 고유벡터에 의한 mode shape을 구하면 각 고유진동수에 해당하는 mode shape으로부터 동적운동을 알 수 있다.

Fig. 4에서 부분구조 ④ 밑면(절점번호 1-28)을 고정시켜 경계조건에서 면내와 면외변위가 없다고 가정하

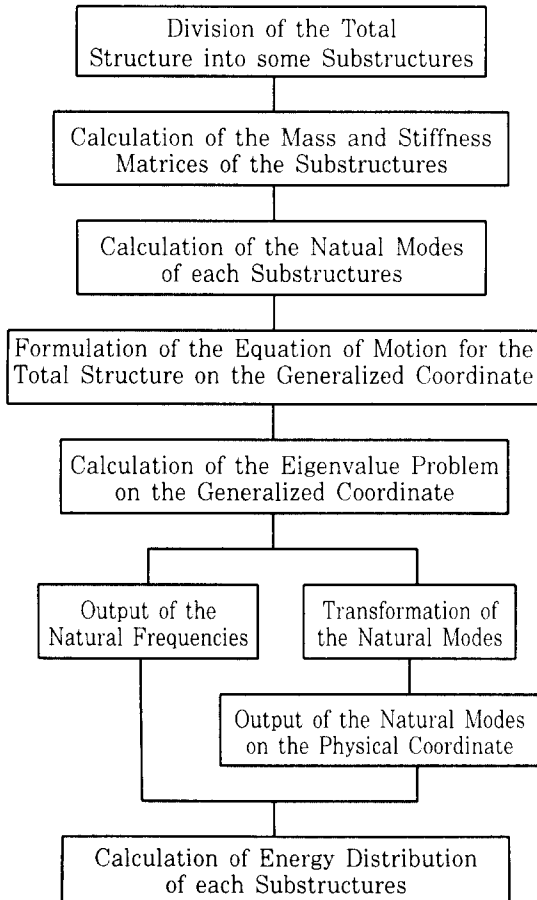


Fig. 3 Flow Chart of Analysis Program

고 계산하였다. 해석모델의 고유진동수는 4차까지만 구하여 MS/C NASTRAN과 비교하였고, Table 1에 제시한 바와 같이 잘 일치함을 보여주고 있다. 구해진 구조물의 mode shape는 Fig. 5~8과 같다.

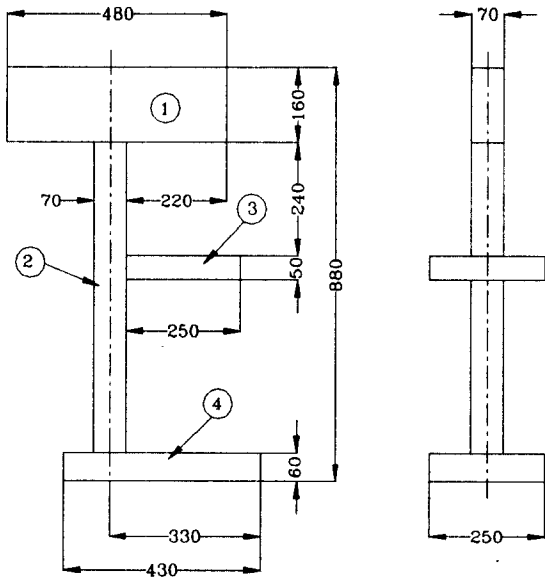


Fig. 4 Mathematical Model of the Drilling M/C

Table 1 Comparison of Natural Frequencies

Mode No.	Presented Frequency (Hz)	NASTRAN Frequency (Hz)
1	26.87	26.80
2	29.03	29.03
3	96.76	96.70
4	200.75	200.24

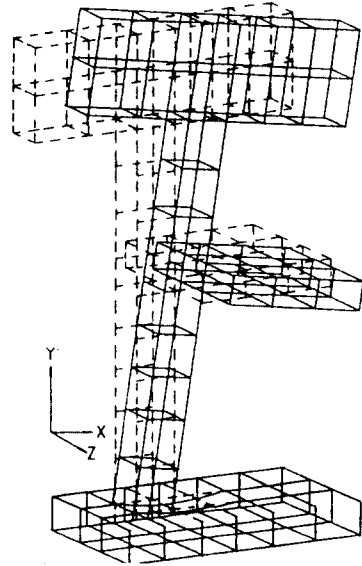


Fig. 5 Mode Shape of Mathematical Model at 1st Mode

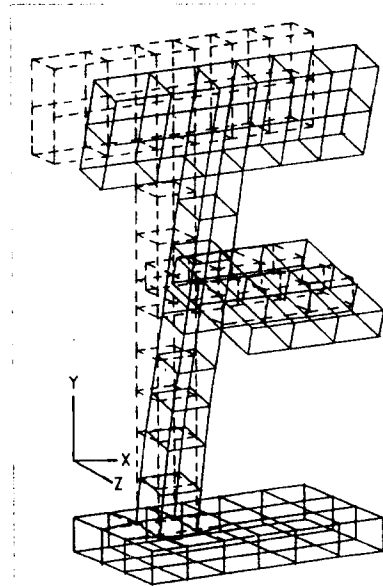


Fig. 6 Mode Shape of Mathematical Model at 2nd Mode

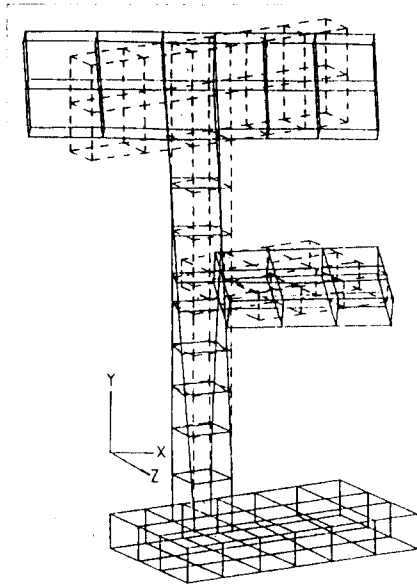


Fig. 7 Mode Shape of Mathematical Model at 3rd Mode

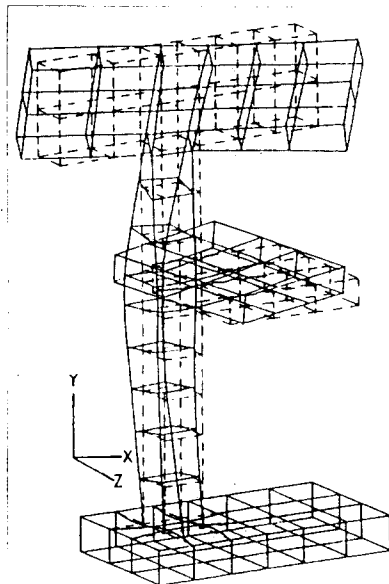


Fig. 8 Mode Shape of Mathematical Model at 4th Mode

에너지 분포 값은 공작기계의 성능개선과 동적설계를 실시하고자 할 때 선행되어야 하는 값으로, 구조물에서 문제가 될 수 있는 공진 mode의 값을 추정하여 그 추정된 mode에 의해 계산된 에너지 분포가 큰 각 부분구조의 부재를 설계·변경할 수 있다. 에너지 분포 값을 해석모델을 각 부분구조(①~④)로 나누어 앞서 구해진 고유진동수에 의해 구조물의 전 에너지 값을 구하고, 그리고 구해진 전 에너지 값에 대한 각 부분구조의 에너지 분포 비를 계산하였다. 그 결과는 Table 2와 같다.

Table 2의 결과에 나타난 바와 같이 각 mode에 대한 부분구조들의 에너지 분포가 균등하게 되려면,

- 1) 1st mode의 경우 : 부분구조 1번은 위치에너지, 부분구조 3번은 운동에너지
- 2) 2nd mode의 경우 : 부분구조 2번은 위치, 운동에너지
- 3) 3rd mode의 경우 : 부분구조 1번은 위치에너지, 부분구조 3번은 운동에너지

Table 2 Energy Distribution Ratios of Substructure

Mode No.	Sub No.	Potential Energy	Kinetic Energy
1	1	.60063E+00	.24984E+00
	2	.18987E+00	.17675E+00
	3	.27381E+00	.63124E+00
	4	.90668E-05	.88567E-03
2	1	.27547E+00	.25971E+00
	2	.54968E+00	.61009E+00
	3	.16895E+00	.25004E+00
	4	.66176E-02	.10237E-02
3	1	.39788E+00	.29675E+00
	2	.33476E+00	.33011E+00
	3	.27858E+00	.38137E+00
	4	.30893E-06	.28963E-04
4	1	.19967E+00	.46871E+00
	2	.23448E+00	.24893E+00
	3	.54873E+00	.25771E+00
	4	.12368E-01	.21432E-01

4) 4th mode의 경우 : 부분구조 3번은 위치에너지, 부분구조 1번은 운동에너지를 각각 조절하여 에너지 분포가 균등하게 구조물을 설계해야 한다. 위치에너지는 강성행렬, 운동에너지는 질량행렬을 각각 조절하여야 한다. 따라서 공작기계 구조물 설계 시에는 각 부분구조 별로 편중되어 있는 에너지를 잘 조절해야만 한다. 강성행렬은 재료의 기계적 성질과 관련되어 거의 일정한 값이므로, 질량행렬과 관계되는 요소의 판재 두께를 조절하여 에너지 분포 값을 균등하게 해야 한다.

4. 결 론

공작기계 구조물 중 drilling m/c을 해석모델로 선택하고 동적모델의 자유도를 줄이기 위해 부분구조 합성법을 이용하였으며, 부분구조 합성법에 의한 동특성 규명과 에너지 분포를 고찰하고 동적설계를 실시한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 구조물의 동특성은 주어진 길이, 단면형상, 질량에 의존되며, 최저 고유진동수는 구조물의 에너지 분포에 큰 영향을 준다.
2. 공진이 문제가 되는 구조물의 고유진동수가 어떤 범위를 피하고자 할 경우에도 에너지 분포를 고려하여 질량과 강성행렬을 변화시켜 효율적으로 구조물을 설계·변경할 수 있다.
3. Drilling m/c의 경우 동특성과 에너지 분포가 bed에 작용되어 주로 column을 변형시켰으므로, 강성효과 보다는 질량효과를 고려하여 설계를 하는 것이 바람직하다.
4. 본 연구의 결과로부터 동역학적 타당성을 제시하므로서 공작기계의 성능평가, 설계변경, 성능향상 및 모델 예측의 강력한 수단으로서 이용할 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 인덕전문대학 연구 지원비에 의하여 연구되었습.

참 고 문 헌

1. F. Kosenigsberger, J. Tlustý, Machine Tool Structures, Pergamon Press, pp. 451~456, 1970
2. S. A. Tobias, Machine Tool Vibration, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 143~179, 1965
3. 大熊政明, 長松昭男, "區分モード 合成法による 振動解析", 日本機械學會論文集, C49-443, pp.1120~1127, 1983
4. 大熊政明, 長松昭男, "多重モード 合成法による 振動解析", 日本機械學會論文集, C49-446, pp.1876~1882, 1983
5. 長松昭男, 大熊政明, 部分構造合成法, 培風館, pp. 103~154, 1991
6. S. S. Rao, The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, pp. 362~378, 1982
7. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw Hill, London, pp. 226~267, 1975
8. M. Yoshimura, "Analysis of Structure Dynamic by Digital Computer. JSPE, Vol. 36, No. 3, pp. 212~218, 1970
9. T. Hoshi & M. Yoshimura, "Initial Application of Dynamic Structure Analysis to Computer-Aided Design of Machine Tools", 14th MTDR Conf., pp. 559 ~566, 1973
10. M. Yoshimura, "Study on Optimum Design of Machine Structures with respect to Dynamic Characteristics", Bulletin of JSME, Vol. 20, No. 145, July, pp. 811~818, 1977
11. M. Yoshimura & T. Hoshi, "Computer Approach to Dynamically Optimum Design of Machine Tool Structures", 12th MTDR Conf., pp.339~477, 1972
12. R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA J., Vol.3, No.2, p.380, 1965