

# 기어의 백래쉬를 고려한 승용차 조향계의 동특성 연구

김종관\*, 김경석\*\*, 송상기\*\*\*, 정진형\*\*\*\*

## Dynamic Analysis of Vehicle Steering System Including Gear Backlash

Kim Jong-kwan, Kim Kyoung-Suk, Song Sang-Kee, Jung Jin-Hyoung

### Abstract

The problem related to the rotational vibration at steering wheel end of passenger cars during high speed driving is investigated. To analyze vibration of steering wheel, a steering system of passenger car is modelled in twelve degrees of freedom including backlash effect of rack and pinion gear system.

The one degree of freedom system with backlash is investigated by the analytical method. Consequently the skeleton curve and the frequency response curves are computed.

The steering system is analyzed by the numerical simulation using the 4th order Runge-Kutta method, the obtained results are compared with the experimental data. Also the effects of the change of rack gear tooth stiffness and backlash on the acceleration level of steering wheel are investigated.

As a result, it can be found that the acceleration level of steering wheel becomes lower as the rack gear tooth stiffness becomes higher, and that acceleration level becomes high as the magnitude of backlash between rack and pinion gear increase.

keywords : 백래쉬(backlash), 자력진동(self-excited vibration), 조향계(steering system)  
회전진동(rotational vibration), 랙과 피니언 기어(rack & pinion gear).

### 1. 서 론

최근 승용차의 설계는 일반적으로 고속화, 경량화 추세

에 있다. 이에 따라 심각하게 대두되고 있는 것이 진동·소음 문제로서, 그 중에서도 조향계의 진동은 보다 쾌적한 승차감 내지는 조종성능을 저해하는 요인으로 작용하

\* 조선대학교 기계공학과      \* 조선대학교 기계설계공학과  
\*\* 순천공업전문대학 자동차과      \*\*\*대우자동차 기술연구소

므로 이에대한 개선책이 요구되어 왔다. 일반적으로 조향계의 발생하는 진동현상은 타이어의 불균형 질량으로 인한 주기적 가진에 의해 일정하게 유지되는 정상진동, 불규칙한 노면을 지날때 타이어에 가해지는 외력에 의해 생기는 과도진동, 랙과 피니언 기어 사이의 간극인 백래쉬에 의하여 가진되는 진동, 또한 자리진동으로 인한 타이어의 변형, 횡방향 미끄러짐등 타이어의 동적특성에 의해 발생하는 진동 등이 있다<sup>(1-5)</sup>.

본 연구 대상 차량의 경우 110(km/h) 주행시 조향휠의 진동응답이 최대로 발생하는 문제가 발생되어 실험결과<sup>(6)</sup>를 통해 고찰해 본 바에 의하면 조향계의 고유진동수가 17(Hz)로서 조향휠에서 가진 주파수가 시스템의 고유진동수와 가까와질때 발생하는 공진현상으로 판단된다.

본 연구는 조향계의 진동에 영향을 미치는 랙과 피니언 기어의 이의 강성도 영향과 백래쉬에 의한 비선형특성을 해석함으로써, 차후 신차종 개발시 이러한 변수들의 영향을 고려할 수 있도록 하였다.

## 2. 백래쉬에 대한 해석

지금까지의 백래쉬에 대한 해석은 백래쉬를 갖는 구조물의 동적거동을 해석하기 위하여 많은 이론적 실험적 해석이 이루어져왔다<sup>(7-8)</sup>. 그러나 대부분의 백래쉬를 포함하는 계의 운동에 대한 이론적 해석은 선형이론에 근거를 두고 있기 때문에 백래쉬를 포함하는 계의 운동을 해석하는데는 그 한계가 있을 수 밖에 없었다. 그럼에도 불구하고 이를 해석하기 위한 이론적 해법조차도 개발이 미비한 실정으로, 대부분의 연구가 모델을 선형화시켜 해석을 하던가, 아니면 실험적인 방법 및 컴퓨터를 이용한 수치적분을 이용하여 해석하고 있는 실정으로 이를 이론적인 방법으로 해석하기 위한 이론적 해법의 개발이 시급한 실정이다.

본 연구에서는 승용차 조향계의 백래쉬를 갖는 1자유도계의 운동을 해석적 방법을 통하여 해석하고, 그 운동의 특성을 살펴보았다. 이를 기초로 하여 자동차의 조향계와 같은 다 자유도계에서 백래쉬의 영향으로 인하여 발생하는 복잡한 양상을 해석할 수 있는 기초해석을 하였다. 일반적으로 백래쉬를 포함하는 1자유도계의 특성을 살펴보면 Fig. 1 에 표현한 바와 같이 piecewise

선형인 스프링 특성을 갖는다.

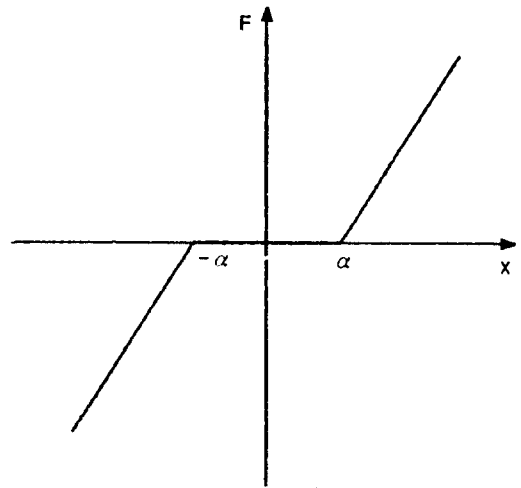


Fig. 1 Spring characteristics of piecewise linear system

Piecewise 선형계는 스프링력에 불연속한 점이 존재하기 때문에 선형 이론만으로는 그 해석이 불가능한 경우가 존재하며 이를 위해 Fig. 1 에 나타낸 것과 같은 스프링 특성을 갖는 1자유도 계를 고려하였다. 즉, 초기에는 떨어져있다가 시간이  $t=t_0$  일때  $x=a$  에서 두 물체의 접촉이 발생하고 두 물체 사이의 변위가 크게 발행하면 스프링력( $F(x)$ )이 발생하는 계로써 이 계의 스프링력과 위치에너지( $V(x)$ ), 운동에너지( $T$ )는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F(x) &= k \{ 1/2(|x-a| - |x+a| + x) \} \\ V(x) &= 1/2 k \{ x 1/2(|x-a| - |x+a|) \}^2 \\ T &= 1/2 m \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

또한, 계에 감쇠력이 존재할때 그 감쇠력을

$$Q(x) = C |x| \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2)$$

라고 하고 외력  $P(t)$ 를 받고 있다면 이 계의 운동방정식은 라그랑지식<sup>(9)</sup>

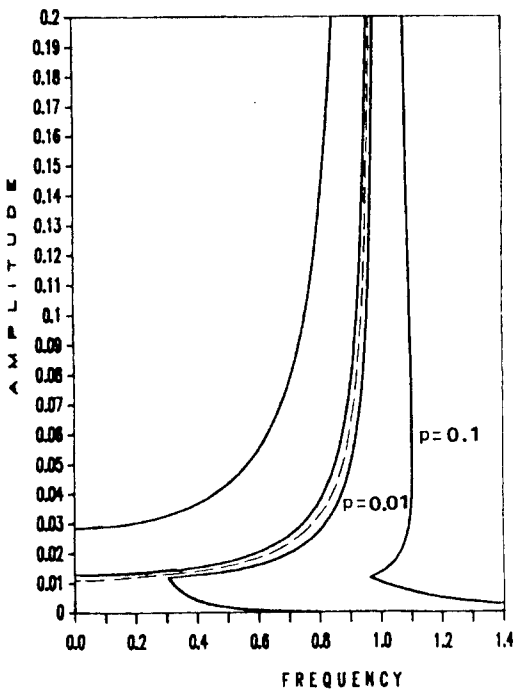
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}) - (\frac{\partial T}{\partial x}) + (\frac{\partial V}{\partial x}) + \\ Q(x) = P(t) \end{aligned} \quad (3)$$

로부터

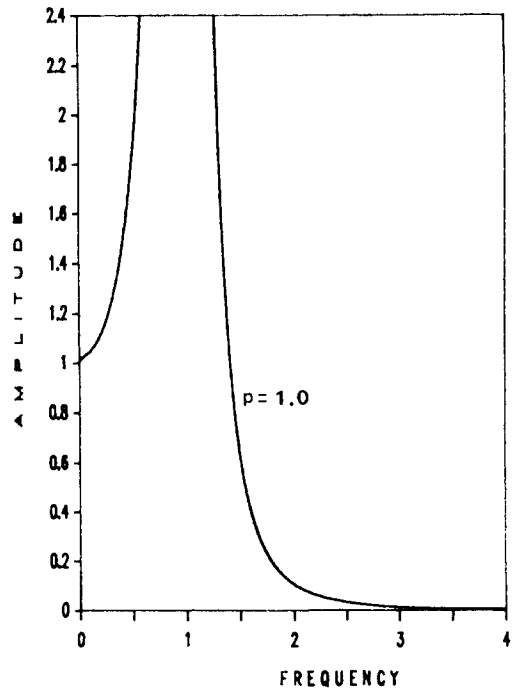
$$m\ddot{x} + c|\dot{x}|\text{sgn}(\dot{x}) + kx + 1/2(|x - a| - |x + a|) = P\sin\Omega t \quad (4)$$

가 된다. 식(4)가 백래쉬를 갖는 1자유도계의 운동방정식을 나타내고 있다. 식(4)와 같은 형태의 운동방정식의 해는 후리에 급수를 이용하는 방법<sup>(9)</sup> 등 여러 가지 방법이 있으나 본 연구에서는 slowly changing phase and

amplitude 방법을 이용한 해석을 수행하였으며<sup>(10)</sup>, 이 메타가 각각 고유진동수( $\omega_n=1$ ), 감쇠비( $\zeta=0.01$ ), 백래쉬의 크기( $a=0.01$ ) 일 때 외력이 각각 0.01, 0.1, 1에서의 주파수 응답곡선을 나타내면 Fig. 2 와 같다. 그림에서 점선은 자유진동시의 진폭과 계의 진동수 관계를 나타낸다.



(a)  $p = 0.01, p = 0.1$  일 때



(b)  $p = 1.0$  일 때

Fig. 2 Frequency response curve at  $\zeta = 0.01, a = 0.01$

백래쉬에 대한 설계이론은 한 기어의 이 나비에서 상대기어의 이 두께를 뺀 간격을 피치원상에서 측정한 양을 백래쉬라 하며 이론적으로는 기어의 양면에 틈새없이 접촉하여도 좋으나 실제로는 윤활유의 유막 두께, 기어의 치수 오차, 중심거리 공차, 열팽창, 부하에 의한 이의 변형 또는 이의 강제물림을 방지하기 위하여 적당한 백래쉬를 허용하지 않으면 회전이 불가능하다. 백래쉬를 주는 방법은 중심거리를 크게 하는 방법, 기어의 이 두께를 작게 하는 방법등이 있다. 원주 방향의 백래쉬의 방법을 백래쉬를 갖는 문제에 적용시킨 결과 계의 파라

값은 공차(w)를 기준으로 하여 등급별로 표 1에 나타내었다<sup>(11)</sup>.

Table 1. 백래쉬 계산표

등 급	최대값 $\mu$	최소값 $\mu$	등 급	최대값 $\mu$	최소값 $\mu$
0	25 w	10 w	5	45 w	10 w
1	28 w	10 w	6	50 w	10 w
2	31.5 w	10 w	7	63 w	10 w
3	36.5 w	10 w	8	90 w	10 w
4	40 w	10 w			

$$w = \sqrt[3]{d + 0.65m(\mu)}, \quad d: \text{기준피치원의 지름(mm)}, \quad m: \text{module}$$

### 3. 시스템 모델링 및 운동방정식

#### 3-1. 시스템 모델링

승용차의 조향계는 크게 조향휠, 타이어 그리고 이들이 적절한 운동을 전달할 수 있도록 컬럼과 링크지 그리고 시스템을 지지하기 위해 차체와 연결되는 스트럿과 부쉬류로 이루어져 있다. 각각의 요소는 질량, 스프링과

댐핑 특성을 가지고, 각 요소의 댐핑은 재질에 관계되는 구조감쇠로 고려하여 모델링 하였고 조향계의 동특성과 타이어가 언발란스 되었을 경우에 백래쉬의 가진력에 대한 계의 응답을 살펴보았다. 조향계의 모델은 Fig. 3과 같이 모델링하였고, 백래쉬를 고려한 랙과 피니언 기어의 모델을 Fig. 4에 나타내었다.

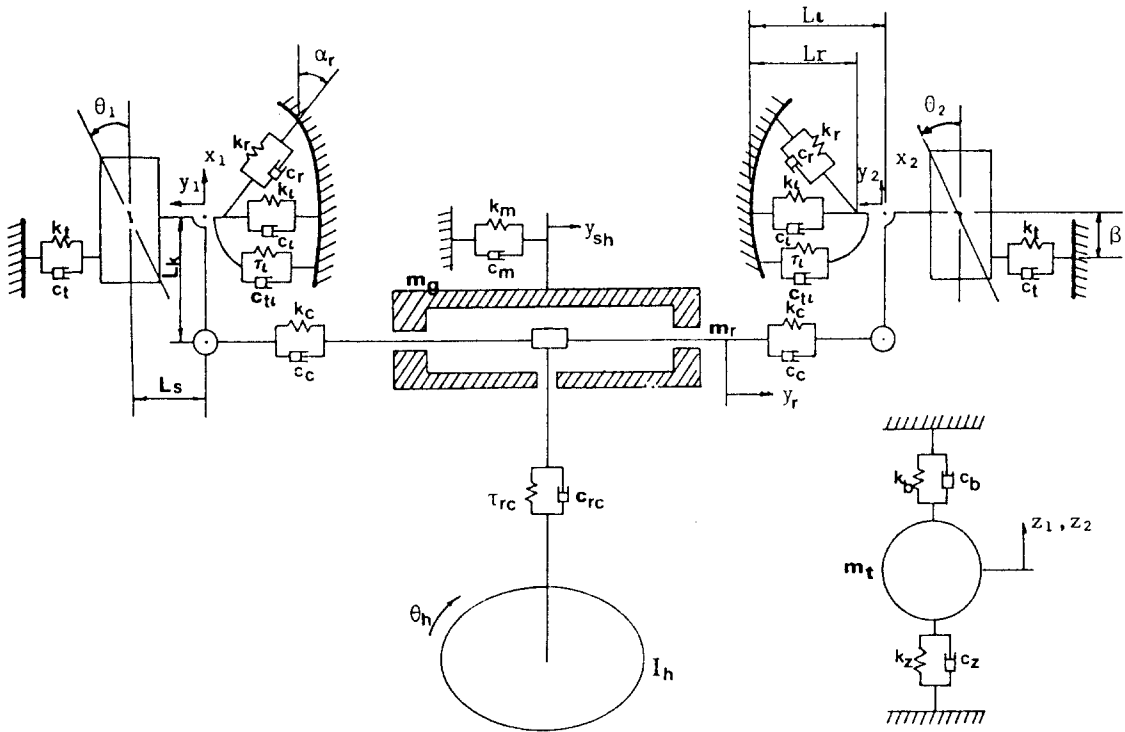


Fig. 3 Steering system model

모델링 과정에 따르는 가정은 차체는 강체로 랙과 피니언 기어는 piecewise 선형계로 가정하였고 스프링과 댐핑 효과를 고려하지 않는 조향 링크지는 강체로 각 시스템의 스프링은 선형스프링으로 가정하였다.

#### 3-2. 운동 방정식

운동방정식을 구하기 위해 먼저, 백래쉬 특성을 고려한 랙과 피니언 기어 시스템의 운동에너지( $T_B$ )와 위치에너지( $V_B$ )를 구하면 다음과 같다.

$$T_B = 1/2M_r Y_r^2 + 1/2M_g Y_{sh}^2 + 1/2I_h \theta_h^2 + 1/2I_p \theta_p^2 \quad (5)$$

$$V_B = K_c Y_r^2 + 1/2K_m Y_{sh}^2 + 1/2\tau_{rc} (\theta_h + \theta_p)^2 + 1/2K_g X_R + 1/2(|X_{R-d} - |X_{R+d}|)^2$$

여기서,  $a$ 는 백래쉬의 크기이며,  $X_R$ 은 상대변위  $Y_r - Y_{sh} - r_p \theta_p$ 로 나타내었다.

위의 식(5)로 부터 라그랑지 식을 이용하여 운동방정

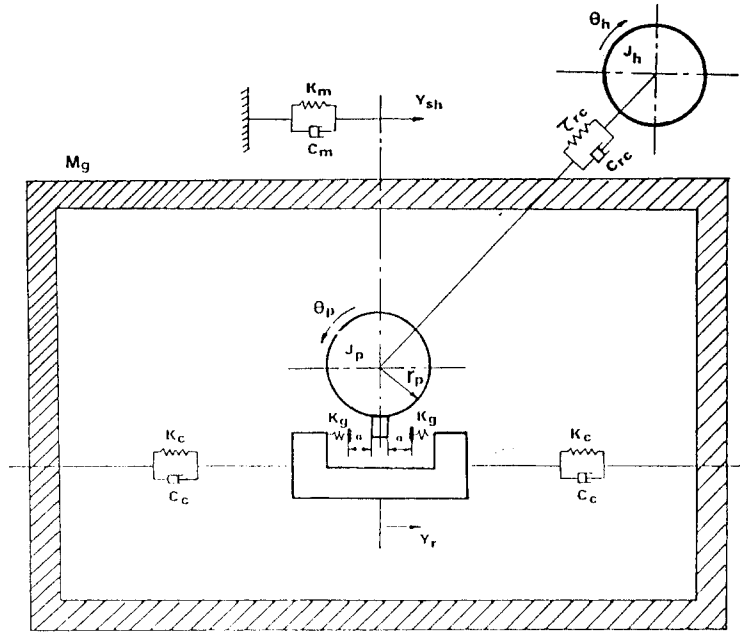


Fig. 4 Modelling of rack and pinion gear system

식을 구하고, 이를 행렬형태로 표현하면

$$\begin{bmatrix} Mr \\ Mg \\ Ih \\ Ip \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Yr \\ Ysh \\ \theta h \\ \theta p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2Kc + Kg & -Kg & 0 & -r_p Kg \\ -Kg & Km + Kg & 0 & r_p Kg \\ 0 & 0 & \tau_{rc} & \tau_{rc} \\ -r_p Kg & r_p Kg & \tau_{rc} & \tau_{rc} + r_p^2 Kg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Yr \\ Ysh \\ \theta h \\ \theta p \end{bmatrix} = Sgn(X_R) \begin{bmatrix} Kga \\ -Kga \\ 0 \\ -r_p Kga \end{bmatrix} \quad (6)$$

로 표현되며, 여기서 백래쉬에 의한 가진력 형태가 우변에 표현되었다.

다음으로, 타이어를 강체로 가정하여 Fig. 5 와 같이 좌표계를 설정하였다.

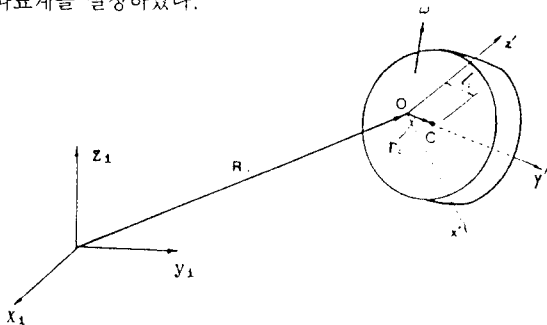


Fig. 5 Schematic diagram of road wheel

Fig. 5 에서  $x' - y' - z'$  좌표계는 킹핀 축에 고정된 좌표,  $R_0$ 은 절대 좌표계에 대한 상대좌표( $x' - y' - z'$ ) 원점의 위치벡터이고  $r_c$ 는 타이어 중심의 위치이며 그때 타이어의 운동에너지( $T_R$ )를 다음과 같이 구하였다.

$$T_R = \sum_i [1/2 M_i \dot{R}_{0i} \dot{R}_{0i} + M_i R_{0i} (\Omega_i + r_{ci}) \cdot 1/2 \Omega_i \cdot \Omega_i] \quad (7)$$

또한, Fig. 5 와 같은 타이어의 림에 불균형 질량을 부착하였다고 가정할때 같은 방법으로 불균형 질량의 운동에너지( $T_u$ )도 구하였다.

시스템의 위치에너지를 시스템이 구성하고 있는 각 스프링의 영향을 기하학적 관계를 따져서 구한 다음 선형화하여 위치에너지를 구하였다. 또한 감쇠력에 의한 가상일은 가상일 원리를 사용하여 구하였으며 댐핑은 구조 감쇠를 적용하였다<sup>(12)</sup>.

운동 방정식을 구하기 위해 해밀톤 방정식

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_{tot} + \delta T_u - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (8)$$

에 백래쉬 특성을 고려한 조향휠과 랙과 피니언 시스템의 운동에너지 식( $T_{tot} = T_B + T_R$ ) 그리고 불균형질량으로 인한 운동에너지( $T_u$ ), 각 스프링의 역할을 고려한 위치에너지( $V$ ), 그리고 가상일 법칙에 의한 가상일( $\delta W$ )을 대입하고 선형화하여 행렬형태의 운동방정식으로

표현하면

$$[M]\{\ddot{x}\} + [G]\{\dot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (9)$$

로 표현되고, 여기서  $[M]$ 은 대칭 질량 행렬,  $[G]$ 는 비대칭 자이로스코픽 행렬,  $[C]$ 는 대칭 구조 감쇠 행렬 그리고  $[K]$ 는 대칭 강성도 행렬이며,  $\{F\}$ 는 가진력 벡터이다. 위에 표현된 각 행렬은  $12 \times 12$  행렬이며 각 성분은 부록에 기술하였다. 기술하지 않은 요소들은 모두 0이다.

#### 4. 동특성 해석 및 고찰

타이어에 불균형 질량이 부착되어 회전할때 이 질량에 의해 타이어는 가진 되어 조향링키지를 통하여 조향휠에 전달된다. 이 때 불균형 질량이 60(g)일 때에 나타나는 조향휠의 응답실험 결과를 Fig. 6 에 도시하였다. 백래쉬가 조향휠의 진동 응답에 미치는 영향을 수치 실험을 통하여 고찰하기 위하여 불균형 질량을 60(g)으로 하였을 경우에 차체 실험결과로부터 몇개의 속도에 대해 조향휠 진동의 가속도에 대해서 크기 및 그 형태를 살펴보았다. Fig. 7 에 실험대상 차량에 맞는 권장치의 백래쉬 값 중 최대치를 고려한 수치해석 결과를 도시하였다. 이것은 실험결과 해석시 비트(beat) 현상이 항상 발생하여 최대값을 취하였기 때문이다. Fig. 6 과 Fig. 7 에 나타난 결과를 보면 고속주행시 비교적 최대 가속도가 일어나는 속도대와 가속도 크기가 일치하는 경향을 보이고 있다.

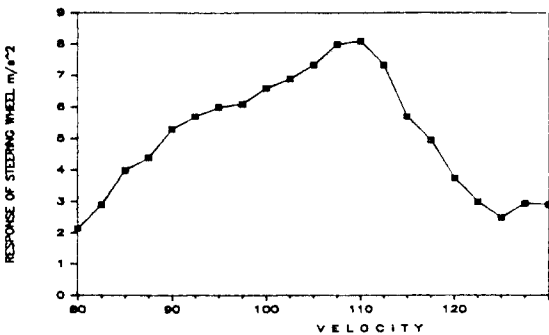


Fig. 6 Experimental result

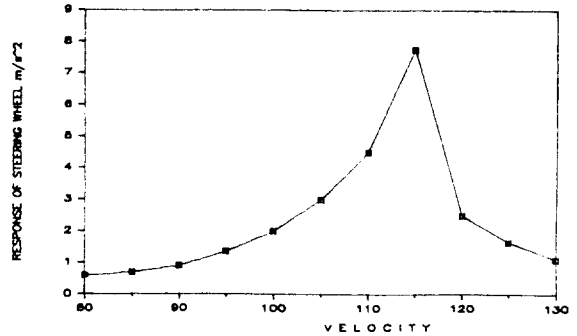


Fig. 7 Numerical results at backlash 5.0E-6m

##### 4-1. 이의 강성도 변화에 따른 조향휠의 진동

랙과 피니언 기어의 이의 강성도에 의한 영향을 살펴 보고자 백래쉬의 크기를 0으로 하고 불균형 질량을 60(g), 속도는 110(km/h)로 하여 기어 이의 강성도 크기를 변화 시키면서, 조향휠의 가속도의 양상을 고찰 하여 Fig. 8 에 도시하였다. 랙 기어의 강성도 값의 크기에 따라 조향휠의 가속도의 크기가 현격한 변화를 보였다. 즉, 이의 강성도가 커지면 조향휠의 가속도가 줄어든다는 것을 알 수 있다. 그러나 이의 강성도의 크기가 크다는 것은 랙 기어가 강체의 성질을 가지게 되기 때문에 강성도의 크기를 결정하는데는 한계가 있음을 알 수 있다.

##### 4-2. 백래쉬 크기의 변화에 따른 조향휠의 진동

백래쉬의 영향에 의한 조향휠의 응답을 살펴 보기 위하여 실험 결과로부터 몇개의 속도점을 선택하여 각 속도별로 백래쉬 크기의 변화에 따른 조향휠의 가속도를 Runge-Kutta method를 이용한 수치해석 결과를 각각 Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11 에 도시하였다. 백래쉬의 크기가 증가하면 조향휠의 가속도의 진폭은 커지며, 랙과 피니언 사이의 접촉이 일어나는 순간의 가속도는 백래쉬가 클수록 심하게 증가하는 경향을 알 수 있으며 백래쉬로 인하여 접촉하는 순간의 진동은 랜덤진동의 형태가 나타남을 알 수 있다. Fig. 11 에서 볼 수 있듯이 백래쉬의 값을 크게 하였을 경우 가속도가 급격히 저하하는 현상을 볼 수 있으며 이것은 해당 가진력으로 인해 발생하는 진폭보다 백래쉬의 값이 크기 때문에 접촉이

쉽게 일어나지 않게 되므로 가진력이 조향휠에 잘 전달되지 않는 것으로 보인다. 따라서 불균형 질량을 크게 함으로써 가진력을 충분히 크게 하여 나타나는 양상을 살펴 본다면 백래쉬가 작은 경우와 같은 양상이 나타나게 되리라 생각된다.

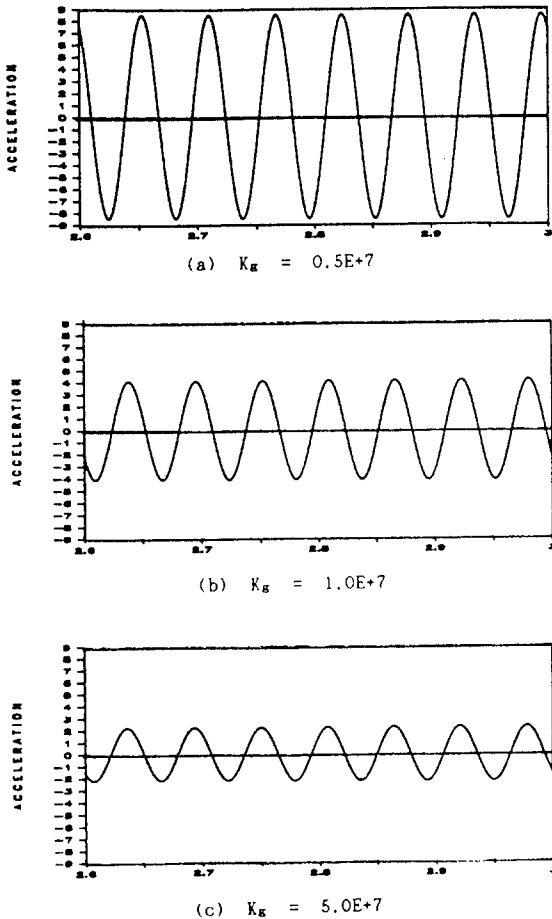
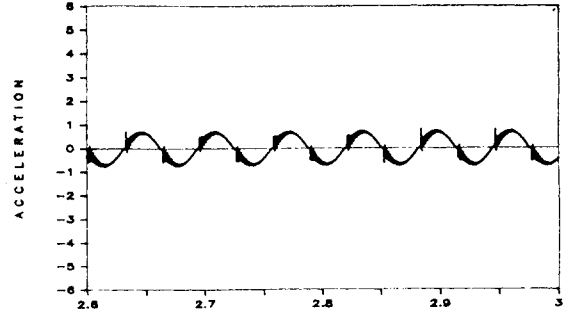
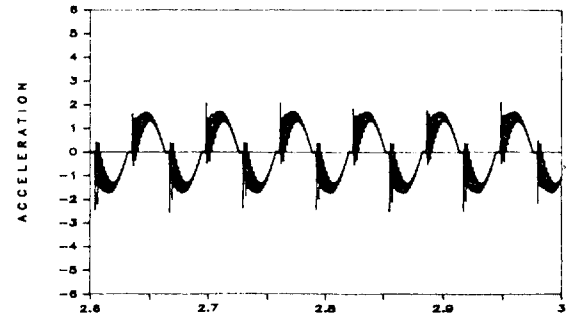


Fig. 8 Response of steering wheel relative to various gear tooth stiffness( $V=110\text{km/h}$ )



(a) Backlash =  $1.0E-6$  m



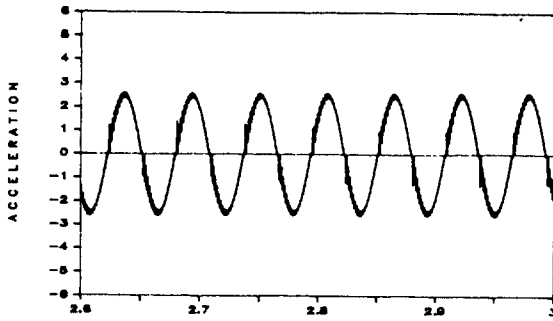
(b) Backlash =  $1.0E-5$  m

Fig. 9 Response of steering wheel at  $V=100\text{km/h}$

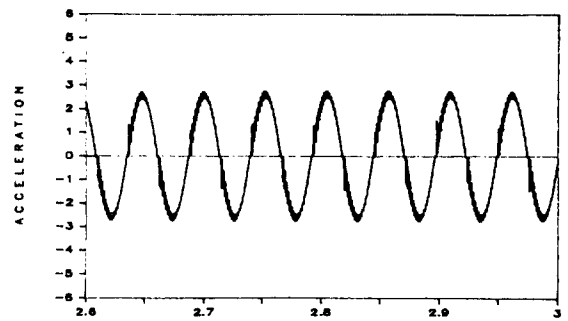
## 5. 결론

승용차 조향계에 존재하는 백래쉬가 조향휠의 진동에 미치는 영향을 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

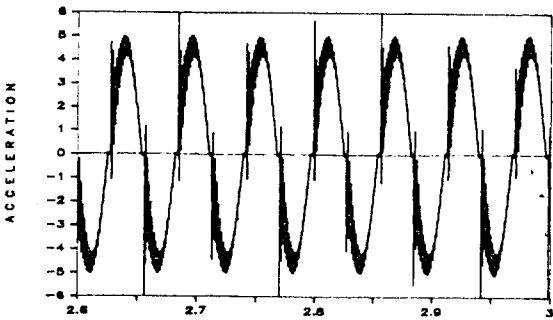
- 1) 1자유도에 대한 백래쉬 모델을 해석적인 방법으로 해석하였고, 주파수 응답곡선을 통하여 진동수 변화에 따라 응답특성이 비선형적으로 변화하는 것을 알 수 있었다.
- 2) 조향 컬럼과 타이 로드 사이를 연결하는 랙과 피니언의 기어 이의 강성도 값이 증가함에 따라서 가속도의 진폭이 감소하는 경향을 보였다. 그러나 강성도의 크기가 크다는 것은 강체의 성질을 가지게 되기 때문에 강성도의 크기를 결정하는데는 한계가 있음을 알 수 있었다.



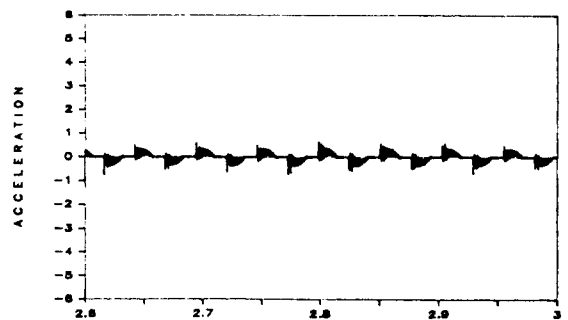
(a) Backlash = 1.0E-6 m



(a) Backlash = 1.0E-6 m



(b) Backlash = 1.0E-5 m



(b) Backlash = 1.0E-5 m

Fig. 10 Response of steering wheel at  
V=110km/h

Fig. 11 Response of steering wheel at  
V=120km/h

- 3) 백래쉬가 계에 존재할 경우 순간적인 접촉으로 인하여 급격한 가속도의 증가를 발견할 수 있었으며, 그 양이 점차로 증가해 감에 따라 가속도 역시 증가하는 경향을 알 수 있었다.
- 4) 시스템의 공진영역을 지난 속도대에 따라 백래쉬가 클 경우 가속도가 급격히 떨어지는 경우를 볼 수 있었으나, 불균형 질량을 크게 하므로써 가진력이 커지면 백래쉬 양이 증가함에 따라 가속도 역시 증가하는 양상이 나타난다. 승용차의 조정에 영향을 주지 않는 한도내에서 백래쉬 값의 크기와 불균형 질량, 가진력의 주파수 사이의 상관관계를 고려하여 설계하면 조향휠의 응답을 감소시키는 결과가 나올 수 있다고 생각된다.

후기 : 본 논문은 조선대학교 수송기계부품공장자동화연구센터의 지원에 의해 연구되었음.

### 참고문헌

- 1) W.A.Podgorski & A.I.Krauter, "Wheel Shimmy Problem:Its Relationship to Wheel and Road Irregularities", Vehicle System Dynamics, Vol.4, pp 9-41, 1975.
- 2) R.S.Sharp & C.J.Jones, "A Comparison of Tyre Representations in a Simple Wheel Shimmy Problem", Vehicle System Dynamics, Vol.9, pp 45-47, 1980.
- 3) J. J. Kaulzarich & Ted. Bruning,



"Wheelchair Caster Shimmy and Turing Resistance", Journal of Rehabilitation Research & Development, Vol.21, pp 15-29, 1984.

4) Yasuhico Fujiwara & Miki Nakayasu, "Analysis of Vibration Mode of Vehicle Steering Mechanism, "SAE 710627, pp 1-16, 1971.

5) Akinoby Inaba & Masanoei Miyajima, "Design Concept of Front Suspension Compliance Application to The Blue-Bird 910 with Examination of Steering Shimmy" JSAE Review, pp 43-49, 1981.

6) 현대자동차 승용새시 구동설계부, "P/EXCEL Steering Wheel Shimmy 현상 Test(1)", 1986.

7) DUDDLEY's Gear Handbook, McGraw-Hill Inc., 1970.

8) H. B. Pacejka, "Non-Linearities in Road Vehicle Dynamics", Vehicle System Dynamics, Vol. 15, pp 237-254, 1986.

9) Yoichi Kanemitsu, "Torsional Vibration of Rotor Coupled by Gear Coupling(Analysis of Steady Response), Bulletin of JSME, Vol. 28, pp 3002-3009, 1985

10) 박철희, "가중치 함수를 활용한 비선형진동의 개략 해법 연구", 인하대학교, 1986.

11) 이원복역, 기계설계편람, 제 3 판, 대광서림

12) Meirovitch, "Method of Analytical Dynamics", McGraw-Hill Inc., 1970.

### Appendix

#### 1) 대칭 질량 행렬

$$M(1,1) = M_t + M_{u1}, \quad M(1,7) = -M_t * L_s - M_{u1} * L_e,$$

$$M(2,2) = M_t + M_{u2}, \quad M(2,8) = M_t * L_s + M_{u2} * L_e$$

$$M(3,3) = M_t + M_{u1}, \quad M(4,4) = M_t + M_{u2},$$

$$M(5,5) = M_t - 2 * M_t * L_s * C_a + I_x * C_a **2 + M_{u1} * (1 - L_e * C_a) **2$$

$$M(6,6) = M_t - 2 * M_t * L_s * C_a + I_x * C_a **2 + M_{u2} * (1 - L_e * C_a) **2, \quad M(7,7) = I_z + M_{u1} * L_e **2,$$

$$M(8,8) = I_z + M_{u2} * L_e **2,$$

$$M(9,9) = M_r, \quad M(10,10) = M_g, \quad M(11,11) = I_b,$$

$$M(12,12) = I_p$$

#### 2) 비대칭 자이로스콕픽 행렬

$$G(5,7) = I_y * C_a * \psi_1, \quad G(7,5) = -G(5,7),$$

$$G(6,8) = -I_y * C_a * \psi_2, \quad G(8,6) = -G(6,8)$$

#### 3) 대칭 구조감쇠 행렬

$$C(1,1) = C_t l / L_i **2 + C_r * (L_r / L_i * \cos(\alpha_r)) **2,$$

$$C(1,3) = -C_r * L_r / L_i * \cos(\alpha_r) * \sin(\alpha_r),$$

$$C(2,2) = C_t l / L_i **2 + C_r * (L_r / L_i * \cos(\alpha_r)) **2,$$

$$C(2,4) = C_r * L_r / L_i * \cos(\alpha_r) * \sin(\alpha_r),$$

$$C(3,3) = C_c + C_l + C_t + C_r * \sin(\alpha_r) **2,$$

$$C(3,5) = C_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}) - C_t * r_t * C_a,$$

$$C(3,7) = -C_c * L_k - C_t * \beta, \quad C(3,9) = C_c,$$

$$C(4,4) = C_c + C_l + C_t + C_r * \sin(\alpha_r) **2,$$

$$C(4,6) = -L_k * TOE / (4 * r_{to}) * C_c + C_t * r_t * C_a,$$

$$C(4,8) = -C_c * L_k - \beta * C_t, \quad C(4,9) = C_c,$$

$$C(5,5) = C_c * (L_k * TOE / (4 * r_{to})) **2 + C_b + C_{tz} + C_t * (r_t * C_a) **2,$$

$$C(5,7) = -C_c * L_k * L_k * TOE / (4 * r_{to}) + \beta * C_t * r_t * C_a,$$

$$C(5,9) = C_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}),$$

$$C(6,6) = C_c * (L_k * TOE / (4 * r_{to})) **2 + C_b + C_{tz} + C_t * (r_t * C_a) **2,$$

$$C(6,8) = C_c * L_k * L_k * TOE / (4 * r_{to})$$

$$C(6,9) = -C_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}),$$

$$C(7,7) = C_c * L_k **2 + C_t * \beta **2,$$

$$C(7,9) = -C_c * L_k,$$

$$C(8,9) = -C_c * L_k, \quad C(9,9) = 2 * C_c + C_g,$$

$$C(9,10) = -C_g, \quad C(9,12) = -r_p * C_g,$$

$$C(11,11) = C_{rc}, \quad C(11,12) = C_{rc},$$

$$C(12,12) = C_{rc} + r_p **2 * C_g$$

#### 4) 대칭 강성도 행렬

$$K(1,1) = (L_r / L_i) **2 * K_r * \cos(\alpha_r) **2 + \tau_l / L_i **2,$$

$$K(1,3) = -(L_r / L_i) * K_r * \cos(\alpha_r) * \sin(\alpha_r),$$

$$K(2,2) = (L_r / L_i) **2 * K_r * \cos(\alpha_r) **2 + \tau_l / L_i **2,$$

$$K(2,4) = L_r / L_i * K_r * \cos(\alpha_r) * \sin(\alpha_r),$$

$$K(3,3) = K_c + K_l + K_t + K_r * \sin(\alpha_r) **2,$$

$$\begin{aligned}
 K(3,5) &= K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}) - K_t * r_t * C_a, \\
 K(3,7) &= -K_c * L_k - K_t * \beta, \quad K(3,9) = K_c, \\
 K(4,4) &= K_c + K_l + K_t + K_r * \sin(\alpha_r) ** 2, \\
 K(4,6) &= -K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}) + K_t * r_t * C_a, \\
 K(4,8) &= -K_c * L_k - K_t * \beta, \quad K(4,9) = K_c, \\
 K(5,5) &= K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}) ** 2 + K_t * r_t ** 2 * C_a ** \\
 &\quad 2 + K_b + K_z, \\
 K(5,7) &= -K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}) * L_k + K_t * r_t * C_a * \beta, \\
 K(5,9) &= K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}), \\
 K(6,6) &= K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}) ** 2 + K_t * r_t ** 2 * C_a ** \\
 &\quad 2 + K_b + K_z, \\
 K(6,8) &= K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}) * L_k - K_t * r_t * C_a * \beta, \\
 K(6,9) &= -K_c * L_k * TOE / (4 * r_{to}), \\
 K(7,7) &= K_c * L_k ** 2 + K_t * \beta ** 2, \quad K(7,9) = -K_c * L_k, \\
 K(8,8) &= K_c * L_k ** 2 + K_t * \beta ** 2, \\
 K(8,9) &= -K_c * L_k, \quad K(9,9) = 2 * K_c + K_g, \\
 K(9,10) &= -K_g, \quad K(9,12) = -r_p * K_g, \\
 K(10,10) &= K_m * K_g, \quad K(10,12) = r_p * K_g, \\
 K(11,11) &= \tau_{rc}, \quad K(11,12) = \tau_{rc}, \\
 K(12,12) &= \tau_{rc} + r_p ** 2 * K_g
 \end{aligned}$$

5) 가진력 벡터

$$\begin{aligned}
 F(1) &= M_{v1} * d * \psi_1 ** 2 * \sin \psi_1, \\
 F(2) &= M_{v2} * d * \psi_2 ** 2 * \sin \psi_2, \\
 F(5) &= M_{v1} * d * \psi_1 ** 2 * (1 - L_e * C_a) * \cos \psi_1, \\
 F(6) &= M_{v2} * d * \psi_2 ** 2 * (1 - L_e * C_a) * \cos \psi_2, \\
 F(9) &= \text{Sgn}(X_r) * K_g * \alpha, \\
 F(10) &= \text{Sgn}(X_r) * (-K_g * \alpha), \\
 F(12) &= \text{Sgn}(X_r) * (-r_p * K_g * \alpha)
 \end{aligned}$$