섭동을 가지는 이산 시간지연 시스템의 강인 안정성

Robust Stability for Discrete Time-Delay Systems with Perturbations

박 주 현, 원 상 철
(Ju-Hyun Park and Sangchul Won)

Abstract : In this paper, we consider the problem of robust stability of discretd time-delay systems subjected to perturbations. Two classes of perturbations are treated. The first one is the nonlinear norm-bounded perturbation, and the second is the structured time-varying parametric perturbation. Based on the discrete-time Lyapunov stability theory, several new sufficient conditions for robust stability of the system are presented. From these conditions, we can estimate the maximum allowable bounds of the perturbations which guarantee the stability. Finally, numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the results.

Keywords: discrete-time system, time-delay, perturbations, robust stability, Lyapunov function, allowable bounds

I. 서론

불확실성(uncertainty)을 갖는 시스템의 안정성이나 안정화 문제가 많은 연구가들에 의해서 오랫동안 깊은 관심을 끌어왔다. 시스템에 존재하는 불확실성은 대개 모델링의 오차, 파라미터의 변화, 온도의 영향 등으로 인해서 생기게 된다. 이러한 불확실성은 시스템의 안정성을 해치는 주요 요인이 된다. 이러한 이유로 선형시스템이 섭동을 가지는 경우에 대해서 많은 연구결과가 제시되었다[1] [6].

한편, 실제 제어 시스템에서 고려되어야 할 또 하나의 중요한 요소로는 시간지연(time-delay)이 있다. 이 시간지연은 화학 공정, 제철 공정, 긴 수송라인을 갖는 공정 등에서 흔히 접하게 되는데 이것의 존재가 전체시스템의 안정성에 큰 영향을 미치게 된다. 시간지연을 갖는 연속시간(continuous time) 시스템의 안정성 문제에 대해서 1980년 초반부터 활발한 연구가 진행되어 여러 종류의 시스템 해석 방식이 제시되었다 [7]-[13]. 대표적으로는 Lyapunov 안정성 방식, 미분 부등식(differential inequality) 방식, matrix measure 방식 등이 있다. 이와 같이 연속시간 영역에서의 시간지연을 갖는 시스템에 관한 연구가 많이 진행된 반면에 이산시간 영역에서의 연구는 미흡한 편이다. 이 시간지연으로 인해서 연속시간 영역에서는 전체 시스템의 차원이 무한대가 되지만, 이산시간 영역에서는 유한한 차원이 되는 차이점이 있다.

1982년에 처음으로 Mori[13]에 의해서 시간지연을 갖는 이산시간 시스템에 대한 연구가 이루어졌다. 그는 행렬의 노옴(norm)을 이용하여 시스템의 안정성을 보장하는 충분조건을 제시하였다. 하지만 이것은 시스템에 존재하는 불확실성이 전혀 고려되지 않았고 시스템의 차원이 커지면 적용하기 힘들다. 최근에는 Mori의 연구결과에 대한 제한성을 극복하기 위해서 섭동을 가지는 이산시간 시스템의 안정성 문제에 대한 연구가 Lee[14, 17], Su[15], Trinh과 Aldeen [16]에 의해서 이루어졌다. [15]-[16]에서는 복소수 영역에서 특성 방정식을 이용한 안정성 문제가 다루어졌다. 그러나 여기에서 다루어진 불확실성은 선형 시불변 섭동이기 때문에 실제 시스템에 적용되기에는 한계가 있다. Lee[17]는 시변 비선형 비구조적 섭동과 시변 선형 구조적 섭동에 대해서 Lyapunov 방식을 이용하여 여러 충분조건을 제시하였다.

이 논문에서는 불확실성이 존재하는 이산 시간지연 시스템의 강인 안정성 문제를 다루고자 한다. 이 연구는 시스템의 해석에 일반적으로 널리 이용되는 Lyapunov 안정성 방법을 이용하여 시스템의 안정성 문제를 고찰하고자 한다. 먼저, 크기가 노옴(norm)으로 제한되어 있는 비선형 섭동을 가지는 시스템의 안정성을 살펴보고, 다음으로 시변 선형 구조적인 형태의 섭동을 가지는 경우를 고려하였다. 이 연구에서 제안된 방식이 기존의 연구결과에서 가지는 적용의 제한성을 극복할 수 있고, 섭동이 존재할 수 있는 한계치의 향상을 도모하고자 한다. 제시된 결과의 유용성을 보이기 위하여 간단한 예제를 제시하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 이 논문에서 얻어진 결과를 제시한다. 먼저 2.1절에서 Lyapunov 방식을 이용하여 비구조적 섭동을 가지는 이산시간지연 시스템의 강인 안정성에 대한 충분조건을 제시하고 이를 기존의 결과와 비교하며 예제를 통하여 이의 우수성을 제시한다. 2.2절에서는 두 가지 형태의 구조적 섭동을 가지는 경우에 대해서 앞 절에서 제시한 방법에 준하여 다룬다. 마지막으로 결론을 III장에서 기술하였다.

*기호 표시: 이 논문에서 사용될 수학 기호를 나타내면 다음과 같다.

R^n	n차원의 벡터 공간
$\|A\|$	행렬 A의 모듈러스(modulus)
$\|\|A\|\|$	행렬 A의 노옴(norm)
$\lambda(A)$	행렬 A의 고유치(eigenvalues)
$\lambda_m(A)$	행렬 A의 최소 고유치
$\lambda_M(A)$	행렬 A의 최대 고유치
$\sigma_M(A)$	행렬 A의 최대 특이치(singular value)
$\rho(A)$	행렬 A의 스펙트럴 반경(spectral radius)
A^T	행렬 A의 전치(transpose)
$A > B$	행렬 $A-B$가 양한정행렬(positive definte)

II. 안정성의 해석

다음과 같이 주어지는 섭동을 갖는 이산 시간지연 시스템을 고려하자.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-h) + \Delta A(x) + \Delta B(x(k-h)) \quad (1)$$

접수일자 : 1996. 2. 22., 수정완료 : 1996. 8. 23.
박주현, 원상철 : 포항공과대학교 전자전기공학과

여기서, $x(k)\in R^n$는 상태변수이고, 행렬 A, B는 모두 실수 값을 갖는 상수 행렬이고 적절한 차원을 가지며, A는 안정한 시스템 행렬이라고 가정하며, 상수 $h\geq 1$는 시간지연을 나타내고, $\Delta A(x)$와 $\Delta B(x(k-h))$는 각각 상태변수 $x(k)$와 $x(k-h)$의 비선형 섭동(perturbation) 행렬이다. 수식 사용의 편의상 $x(k-h)$를 x_h로 정의한다.

양의 정수 η에 대하여 주어진 안정한 시스템 행렬 A는 반경 $(1+\eta)^{-1/2}$안의 원에 모든 고유치(eigenvalues)를 가지게 된다. 상수 η는 다양한 섭동 하에 있는 공칭시스템(nominal system)의 강인성(robustness)에 대한 양적인 척도가 되는 안정성의 여유도를 의미한다. 이때, 임의의 적절한 차원을 갖는 양한정(positive definite)행렬 Q에 대하여 다음과 같은 Lyapunov 방정식을 만족하는 양한정 행렬 P가 항상 존재함이 알려져 있다.

$$(1+\eta)A^TPA-P=-Q \tag{2}$$

시스템 (1)의 안정성 문제를 다루기에 앞서서 증명에 사용될 다음과 같은 기존의 결과를 알아본다.

보조정리 1[3] : 적절한 차원을 가지고 실수 값을 갖는 행렬 X와 Y에 대하여 다음의 부등식이 만족한다.

$$X^TY+Y^TX\leq aX^TX+\frac{1}{a}Y^TY, \tag{3}$$

여기서, a는 양의 상수이다.

보조정리 2[18] : 임의의 hermitian 행렬들 A_i와 상수 k_i에 대하여

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{m}k_iA_i\right)\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_M(k_iA_i) \tag{4}$$

이 성립한다.

이 논문에서는 주어진 시스템 (1)이 다양한 섭동 하에서도 안정성(stability)이 보장되도록 하는 충분조건을 구하고자 한다. 일반적으로 시스템에 존재하는 섭동은 구조적(structured) 섭동과 비구조적(unstructured) 섭동으로 나눌 수 있다. 이 연구는 이러한 두 종류의 섭동에 대해서 살펴보겠다.

1. 비구조적 섭동에 대한 강인 안정성

먼저, 이 절에서는 비구조적 섭동을 가지는 이산 시간지연 시스템의 안정성을 고려하고자 한다.

시스템 섭동 ΔA와 ΔB는 비선형이며, 다음과 같이 제한되어 있다고 가정하자.

$$\|\Delta A(x)\|\leq\alpha\|x\| \text{ 그리고 } \|\Delta B(x_h)\|\leq\beta\|x_h\| \tag{5}$$

여기서, α와 β는 양의 상수이다.

제한조건 (5)를 갖는 섭동 시스템 (1)의 안정성을 보장하는 충분조건은 다음과 같다.

정리 1 : 시스템 (1)은 다음의 조건이 만족되면 점근적으로 안정하다.

$$\lambda_m(Q)-\varepsilon[\lambda_M(P)(\alpha^2+\beta^2)+\lambda_M(B^TPB)]>0. \tag{6}$$

여기서 $\varepsilon=(3+\frac{3}{\eta})$이고, P는 (2)에 의해 주어지는 Lyapunov 방정식의 해이다.

증명 : 먼저 Lyapunov 함수 $V(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$V(x)=x^TPx+\gamma\sum_{i=k-h}^{k-1}x(i)^Tx(i), \tag{7}$$

여기서 $\gamma=\varepsilon[\lambda_M(B^TPB)+\lambda_M(P)\beta^2]$ 이다.

이때, 함수 $V(x)$의 변위 $\Delta V(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta V(x)&=x^T(k+1)Px(k+1)-x^TPx+\gamma(x^Tx-x_h^Tx_h)\\&=x^T(A^TPA-P+\gamma I)x-\gamma x_h^Tx_h+2x^TA^TP(\Delta A(x)\\&\quad+Bx_h+\Delta B(x_h))+2\Delta A^T(x)P(Bx_h+\Delta B(x_h))\\&\quad+\Delta A^T(x)P\Delta A(x)+2x_h^TB^TP\Delta B(x_h)\\&\quad+\Delta B^T(x_h)P\Delta B(x_h)+x_h^TB^TPBx_h\end{aligned} \tag{8}$$

위의 식을 정리하기 위해서 보조정리 1을 이용하면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&2x^TA^TP\Delta A(x)\leq\frac{\eta}{3}x^TA^TPAx+\frac{3}{\eta}\Delta A^T(x)P\Delta A(x),\\&2x^TA^TP\Delta B(x_h)\leq\frac{\eta}{3}x^TA^TPAx+\frac{3}{\eta}\Delta B^T(x_h)P\Delta B(x_h),\\&2x^TA^TPBx_h\leq\frac{\eta}{3}x^TA^TPAx+\frac{3}{\eta}x_h^TB^TPBx_h,\\&2\Delta A^T(x)PBx_h\leq\Delta A^T(x)P\Delta A(x)+x_h^TB^TPBx_h,\\&2x_h^TB^TP\Delta B(x_h)\leq x_h^TB^TPBx_h+\Delta B^T(x_h)P\Delta B(x_h),\\&2\Delta A^T(x)P\Delta B(x_h)\leq\Delta A^T(x)P\Delta A+\Delta B^T(x_h)P\Delta B(x_h).\end{aligned} \tag{9}$$

위의 부등식을 (8)에 대치하면 $\Delta V(x)$의 한계는

$$\begin{aligned}\Delta V(x)\leq\ &x^T[(1+\eta)A^TPA-P+\gamma I]x\\&+\varepsilon\Delta A^T(x)P\Delta A(x)+\varepsilon\Delta B^T(x_h)P\Delta B(x_h)\\&+\varepsilon x_h^TB^TPBx_h-\gamma x_h^Tx_h\end{aligned} \tag{10}$$

로 나타난다. 여기서 Lyapunov 방정식 (2)를 사용하고 양변에 노옴을 취하면 (10)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\Delta V(x)\leq\ &x^T[-Q+\gamma I]x+\varepsilon\lambda_M(P)\|\Delta A(x)\|^2-\gamma\|x_h\|^2\\&+\varepsilon\lambda_M(P)\|\Delta B(x_h)\|^2+\varepsilon\lambda_M(B^TPB)\|x_h\|^2\end{aligned} \tag{11}$$

섭동에 대한 한정치 (5)를 (11)에 대치하고, Rayleigh principle[19]을 이용하면

$$\begin{aligned}\Delta V(x)\leq\ &-\lambda_m(Q)\|x\|^2+\gamma\|x\|^2+\varepsilon\lambda_M(P)\alpha^2\|x\|^2\\&+\varepsilon\lambda_M(P)\|x_h\|^2+\varepsilon\lambda_M(B^TPB)\|x_h\|^2-\gamma\|x_h\|^2\end{aligned} \tag{12}$$

를 얻는다. 여기서 (7)에 정의된 상수 γ를 식(12)에 대치하면 $\Delta V(x)$의 새로운 한계는

$$\Delta V(x)\leq-[\lambda_m(Q)-\gamma-\varepsilon\lambda_M(P)\alpha^2]\|x\|^2 \tag{13}$$

가 된다. 주어진 시스템 (1)의 안정성은 $\Delta V(x)$가 항상 음임을 보여주면 되므로 위의 (13)은 (6)이 만족되면 항상 음임이 보장된다. 이로써 증명은 완료된다. ■

정리 1은 이산 시간지연 시스템의 안정성을 판별하는 하나의 충분조건이다. 이러한 이산 시간 지연 시스템의 안정성에 대한 연구는 Mori 등[13]에 의해서 처음으로 이루어졌다. 그러나, 그들의 연구는 공칭시스템에만 국한되어서 실제 시스템으로의 적용이 제한적이다. 1992년에 Lee 등[14]에 의해서 불확실성을 갖는 이산 시간지연 시스템에 관해서 본격적으로 연구되었으나, 이 또한 지연시간을 단위시간($h=1$)으로 국한하여서 일반성이 결여되었다. 그후 Su 등[15]과 Trinh 등[16]에 의해서 지연시간 h의 불확실성을 갖는 시스템에 대해 연구가 이루어졌다. 이 두 결과는 시불변 선형 섭동에만 적용되었으므로 시변 섭동에는 적용이 불가능하다. 시변 비선형 비구조적 섭동을 가지는 시스템에 대한 연구는 Lee 등[17]에 의해서 처음으로 다루어졌다. Lee 등[17]에 의해서 구해진 안정성 판정식은 다음과 같다.

$$\alpha^2+\beta^2<\frac{\eta-(1+\eta)(\eta\|A\|^2+3\|B\|^2)}{3(1+\eta)}\equiv\mu_l. \tag{14}$$

(14)처럼 정리 1의 충분조건도 시스템에 허용 가능한 섭

동 $\Delta A(x)$와 $\Delta B(x(k-h))$의 한정치 α와 β의 항으로 나타내면 다음과 같다.

$$\alpha^2+\beta^2 < \frac{\eta\lambda_m(Q)-3(\eta+1)\lambda_M(B^TPB)}{3(\eta+1)\lambda_M(P)} \equiv \mu. \qquad (15)$$

(14)의 조건식은 η와 시스템 행렬 A,B의 놈을 이용하여서 구해진 결과이다. 이 조건식은 Lyapunov 방정식의 파라미터인 P와 Q가 직접적으로 조건식에 나타나지 않으므로 Lyapunov 방정식을 풀지 않아도 된다는 잇점이 있지만, A,B의 행렬이 Canonical form을 가지는 형태일 경우에는 놈의 값이 1보다 크게 되어 안정판별을 할 수가 없다는 단점을 가지고 있다. 이러한 현상을 극복하기 위해서 Similarity transform T을 하게 되면 섭동의 항에도 T와 T^{-1}가 곱해지기 때문에 $\alpha^2+\beta^2$의 한계치의 향상을 기대할 수 없게 된다.

주어진 시스템 (1)의 점근 안정성을 보장하는 정리 1 혹은 Lee[17]의 충분조건은 η,P,Q의 함수이므로, 판정하기 위해서는 Lyapunov 방정식의 해부터 구해야 한다. 그런데 Lyapunov 방정식 (2)를 살펴보면 주어진 양한정 행렬 Q에 대해서 상수 η에 따라 양의 해 P가 달라진다. 그러므로, 가능한 한 큰 값의 섭동의 상한치를 얻기 위해서는 η에 대해서 반복적으로 (2)의 해를 얻고, (14)와 (15)의 조건식을 계산하여 섭동의 허용 한계치를 얻을 수 있다. η의 조사 구간은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\cdot \max[0, 3\|B\|^2/(1-3\|B\|^2)] < \eta < \|A\|^{-2}-1 \ [17], \\ &\cdot 0 < \eta < (\rho(A))^{-2}-1 \ \text{정리 1} \end{aligned} \qquad (16)$$

여기서, 주어진 η의 조사구간의 범위는 정리 1이 일반적으로 더 큰 구역을 가지게 되지만, 더 큰 섭동에 대한 한계치를 얻을 수 있고, A,B행렬의 구조에 영향을 받지 않는다는 잇점이 있어서, 두 결과가 서로 tradeoff가 있다고 봐야 한다.

참조 1 : 주어진 정리 1은 행렬 Q의 선택에 따라서 섭동에 대한 한계치가 달라지게 된다. (15)에서 보면 μ의 값이 큰 $\lambda_m(Q)/\lambda_M(P)$ 와 작은 $\lambda_M(B^TPB)/\lambda_M(P)$ 일때에 큰 값을 가짐을 알 수 있다. $\lambda_m(Q)/\lambda_M(P)$ 의 비는 고정된 η와 최소 특이치가 1보다 큰 Q에 대하여 $Q=I$인 경우에 최대가 됨을 Kolla 등 [4]의 결과로 부터 알 수 있다. $\lambda_M(B^TPB)/\lambda_M(P)$ 의 비에 대하여서는 $Q=I$인 경우에 항상 최소가 된다고는 할 수가 없다. 하지만, 일반적으로 $Q=I$일 때 μ의 값이 덜 제한적일 여지가 많다고 할 수 있다. 해석적인 방법으로 최적의 Q를 선택하는 것은 본 연구에서는 제시하지는 않는다. 다만, 적절한 Q의 선택에 도움이 되는 한 방법으로는 minimization toolbox(Matlab, Maple등)들을 이용하는 방식이 있다.

다음의 예제는 비구조적 노옴 한정섭동을 가지는 시스템의 예로써 기존의 Lee 등[17]에 의해서 제시된 결과와 이 논문에 의해서 제시된 시스템의 안정성을 보장하는 섭동의 허용치를 비교한다.

예제 1 : 다음과 같은 시스템을 생각하자.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-h)+\Delta A(x)+\Delta B(x_h) \qquad (17)$$

여기서 시스템 행렬 A와 B는

$$A=\begin{bmatrix}0.20 & 0.30\\ 0.10 & -0.15\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.1 & 0.05\\ 0.05 & 0.1\end{bmatrix}$$

이다. $Q=I$를 사용하여, 기존의 논문[17]에서 제시된 안정성을 보장하는 섭동의 상한치와의 비교는

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &< 0.1103 \quad [17] \\ \alpha^2+\beta^2 &< 0.1304 \quad \text{정리 1} \end{aligned}$$

으로 이 연구의 결과가 더 큰 섭동에 대한 노옴 상한치를 줄 수 있음을 알 수 있다. η에 따른 자세한 비교는 표 1에 주어져 있다.

표 1. 비선형 섭동에 대한 허용 가능 한계치 비교.
Table 1. Comparison of allowable bound on non-linear perturbations.

η	μ_l	μ
0.1	0.0033	0.0039
0.7	0.0830	0.0878
0.9	0.0946	0.1012
1.1	0.1022	0.1109
1.3	0.1070	0.1179
1.5	0.1095	0.1229
1.71	**0.1103**	0.1264
1.9	0.1097	0.1285
2.1	0.1081	0.1298
2.37	0.1045	**0.1304**
2.5	0.1022	0.1302
2.7	0.0983	0.1297
3.1	0.0890	0.1273
3.9	0.0660	0.1196
5.1	0.0249	0.1040

따름정리 1 : 문헌[14, 15]에 의하면 (5)에 주어진 비선형 섭동이 선형 시변 섭동을 갖게 되는 경우가 많다. 섭동이 다음과 같은 형태를 가지고

$$\Delta A(x)=\Delta Ax(k) \text{ 그리고 } \Delta B(x_h)=\Delta Bx(k-h) \qquad (18)$$

섭동행렬이 다음과 같이 제한되어 있다고 가정하면

$$\|\Delta A\| \le \alpha \text{ 그리고 } \|\Delta B\| \le \beta \qquad (19)$$

정리 1의 (6)은 섭동 (18)에 대해서도 유효하다.

2. 구조화된 섭동을 가지는 이산 시간지연 시스템의 강인 안정성

이 절에서는 선형 구조의 섭동항이 있는 두 가지 형태의 구조화된 섭동을 가지는 이산 시간지연 시스템의 강인 안정성을 꾀하기 위한 충분조건을 Lyapunov 안정성 이론을 적용하여 구하고자 한다.

다음의 불확실 이산 시간지연 시스템을 생각하자.

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)x(k-h) \qquad (20)$$

여기서, 섭동항은 다음의 두 가지 형태로 구조화되어 있다고 가정하자.

$$i)|\Delta A| \le E \text{ 그리고 } |\Delta B| \le D \qquad (21)$$

$$ii)\Delta A=\sum_{i=1}^{m} e_iE_i \text{ 그리고 } \Delta B=\sum_{i=1}^{n} d_iD_i \qquad (22)$$

여기서, 행렬 D와 E는 모든 요소가 음이 아닌 상수를 갖는 행렬이고, E_i와 D_i는 상수 행렬이고, e_i와 d_i는 시변 불확실성 파라미터이다.

이때, 우리는 다음의 정리를 얻는다.

정리 2 : ϵ은 (6)에 정의된것이며, P를 (2)에 주어진 Lyapunov 방정식의 해라고 하자. 이때, 다음의 조건이 성립

되면

$$\lambda_m(Q) \ -\varepsilon[\lambda_M(D^T|P|D)+\lambda_M(B^TPB) + \lambda_M(E^T|P|E)] > 0, \tag{23}$$

구조적 섭동 (21)을 갖는 시스템 (20)은 점근적으로 안정하다.

증명 : 부록 참조.

정리 2에서 주어진 조건식에서의 η에 대한 구역조사에 대한 부담을 줄이고, Lyapunov 함수를 새로이 정의하여 조건(23)의 제한성을 줄일 수 있는 다음의 결과를 얻을 수 있다.

정리 3 : 다음의 조건이 성립하면

$$\lambda_m(Q \ -2B^TPB-4|A^TP|E-4|B^TP|D -2E^T|P|E-2D^T|P|D) > 0, \tag{24}$$

구조적 섭동 (22)를 갖는 시스템 (20)은 점근적으로 안정하다. 여기서 P는

$$2A^TPA-P = -Q$$

의 해이다.

증명 : 부록 참조.

예제 2 : 다음과 같은 시스템을 생각하자.

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)x(k-h)$$

여기서 시스템 행렬 A와 B는

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.3\end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

이고 E와 D는

$$E=0.2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad D=0.07\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

이라 하자. (2)의 Lyapunov 방정식을 풀기 위하여 Q

$$Q\equiv\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

를 정의할 때 해 P는

$$P=\begin{bmatrix}1.087 & 0\\ 0 & 1.2195\end{bmatrix}$$

가 되고, 이로부터 안정 조건식 (24)가

$$\lambda_m(Q-2B^TPB-4|A^TP|E-4|B^TP|D-2E^T|P|E -2D^T|P|D) = 0.0414 > 0,$$

만족하므로 섭동에 대하여 강인 안정하다고 할 수 있다. 그러나, 정리 2를 이용하면 안정성의 판별을 말 할 수 없음을 검사 할 수 있다.

이제, (22)의 구조적 섭동을 갖는 시스템 (20)의 강인 안정성에 대하여 살펴보자. 다음의 정리는 섭동 (22)를 갖는 이산 시간지연 시스템의 강인 안정성을 보장하는 조건을 제시한다.

정리 4 : P는 (2)에 주어진 Lyapunov 방정식의 해이고 P_e와 P_d를

$$\begin{aligned} P_e &= [P^{1/2}E_1 \ P^{1/2}E_2 \cdots P^{1/2}E_m], \\ P_d &= [P^{1/2}D_1 \ P^{1/2}D_2 \cdots P^{1/2}D_n] \end{aligned} \tag{25}$$

와 같이 정의하자. 그러면, 다음의 조건들 중에 하나가 성립되면

$$i)\lambda_m(Q) \ -\varepsilon\Big(\lambda_M(B^TPB)+[\max_i|e_i|\sigma_M(\sum_{i=1}^m|P^{1/2}E_i|)]^2 + [\max_i|d_i| \ \sigma_M(\sum_{i=1}^n|P^{1/2}D_i|)]^2\Big) > 0, \tag{26}$$

$$ii)\lambda_m(Q) \ -\varepsilon\Big(\lambda_M(B^TPB)+[\sum_{i=1}^m|e_i| \ \sigma_M(P^{1/2}E_i)]^2 + [\sum_{i=1}^m|d_i| \ \sigma_M(P^{1/2}D_i)]^2\Big) > 0, \tag{27}$$

$$iii) \ \lambda_m(Q) \ -\varepsilon\Big(\lambda_M(B^TPB)+[\sigma_M^2(P_e) \ \sum_{i=1}^m e_i^2]^2 + [\sigma_M^2(P_d) \ \sum_{i=1}^m d_i^2]^2\Big) > 0, \tag{28}$$

구조적 섭동 (22)를 갖는 시스템 (20)은 점근적으로 안정하다.

증명 : 부록 참조.

시스템 (20)의 안정성을 보장하는 또 하나의 정리를 구하기 위하여 먼저 다음을 정의한다. 주어지는 양한정 행렬 Q에 대하여 P를 다음의 등식을 만족하는 해라고 하자.

$$2A^TPA-P = -Q. \tag{29}$$

이 때 다음의 행렬을 정의한다.

$$\begin{aligned} P_{Ei} &= A^TPE_i+E_i^TPA \\ P_{Di} &= B^TPD_i+D_i^TPB \\ P_{Eij} &= E_i^TPE_j \\ P_{Dij} &= D_i^TPD_j. \end{aligned} \tag{30}$$

정리 5 : 주어진 양한정 행렬 Q에 대하여, P를 (29)의 해라고 하자. 그러면 섭동 (22)를 가지는 시스템 (20)은 다음의 조건들을 만족하면 안정하다.

$$Q-2B^TPB>0$$

$$\begin{aligned} &2[\sum_i|e_i|\sigma_M(P_{Ei})+\sum_i|d_i|\sigma_M(P_{Di}) \\ &\quad +\sum_{i,j}|e_i||e_j|\sigma_M(P_{Eij})+\sum_{i,j}|d_i||d_j|\sigma_M(P_{Dij}))] \\ &< \lambda_m(Q-2B^TPB). \end{aligned} \tag{31}$$

증명 : 부록 참조.

예제 3 : 다음과 같은 공칭시스템을 생각하자.

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\ 0 & -0.3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0.1 & 0.05\\ 0.05 & 0.1\end{bmatrix}x(k-h)$$

그리고 섭동 행렬 ΔA와 ΔB는 다음의 형태를 가진다고 하자.

$$\Delta A=e_1\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \Delta B=d_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

또한 행렬 Q는

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

로 정하자. 그러면 (29)로부터 양한정 행렬 P는

$$P=\begin{bmatrix}0.7686 & 0.1372\\ 0.1372 & 1.2306\end{bmatrix}$$

이고, 이로부터 P_{E1}, P_{D1}, P_{E11}, P_{D11}은 각각 다음과 같다.

$$P_{E1}=-\begin{bmatrix}0.3074 & 0.3157\\ 0.3157 & 0.6011\end{bmatrix},$$

$$P_{D1}=\begin{bmatrix}0.1674 & -0.0231\\ -0.0231 & -0.2598\end{bmatrix},$$

$$P_{E11}=-\begin{bmatrix}0.7686 & -0.1372\\ -0.1372 & 1.2306\end{bmatrix},$$

$$P_{D11}=\begin{bmatrix}0.7686 & -0.1372\\ -0.1372 & 1.2306\end{bmatrix}.$$

이때, (31)의 안정성 조건을 살펴보면 다음과 같이 불확실

파라미터 d_1과 e_1의 부등식으로 얻을 수 있다

$$1.6048|e_1|+0.5222|d_1|+2.5365|e_1|^2+2.5365|d_2|^2 < 0.6557. \tag{32}$$

그리고 [17]에서의 결과를 이용하면 다음과 같다.

$$1.217|e_1|+0.3|d_1|+|e_1|^2+|d_2|^2 < 0.1072. \tag{33}$$

두 조건 (32), (33)에 의해서 만족되는 섭동 변수 e_1과 d_1의 영역을 구한 것이 그림 1에 제시되었다. 영역 S1은 Lee[17]의 결과에 따른 안정성 영역이고, 영역 S2는 정리 5에 의해서 얻어진 영역이다.

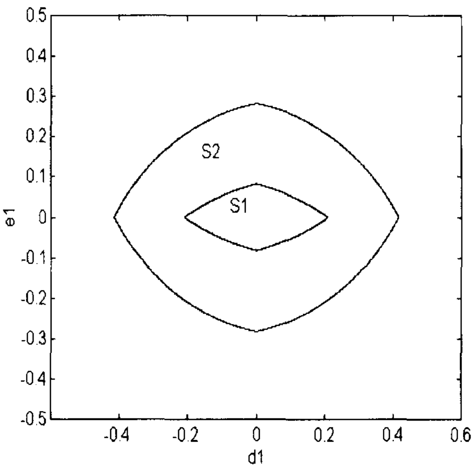

그림 1. e_1과 d_1의 안정 영역 비교.

Fig. 1. Comparison of stability region of e_1 and d_1.

위의 그림에서 알 수 있듯이 본 연구의 결과가 더 많은 안정성 영역을 보장함을 알 수 있다.

III. 결론

본 논문은 시간지연을 가지는 이산 시간 시스템에 섭동이 존재할 때 시스템의 안정성을 보장하는 충분조건들을 제시하였다. 이 논문에서는 시스템에 존재하는 섭동을 크게 두 가지로 나누었다. 즉, 비구조적 섭동과 구조적 섭동을 가지는 경우의 시스템의 강인 안정성을 다루었다. 시스템의 안정성을 해석하는 방법으로는 일반적인 Lyapunov 안정법을 이용하였다. 먼저, 비구조적 섭동을 가지는 시스템에 대해서 시스템 안정성을 위한 조건을 제시하였고, 이로부터 허용 가능한 섭동의 크기를 얻었다. 이 허용 가능치가 기존의 문헌에서 제시된 것 보다 더 큰 섭동의 허용치를 준다는 것을 예제를 통하여 살펴보았다. 다음으로, 구조적 섭동을 가지는 경우에는 문헌에서 일반적으로 다루는 두 가지 형태의 구조성에 대해서 고려하였다. 기존의 [15]-[16]에서는 섭동이 시불변인 경우에만 성립하는 충분조건을 제시하였지만, 이 연구에서는 섭동이 시변인 경우에도 적용이 가능하도록 확장하였다.

참고문헌

[1] R. V. Patel and M. Toda, "Quantitative measures of robustness for multivariable systems," in *Proc. JACC*, New York, TP8-A, 1980.

[2] E. Yaz, "Deterministic and stochastic robustness measures for discrete systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-33, 1988.

[3] K. Zhou and P. P. Khargonekar, "Robust stabilization of linear systems with norm bounded time-varying uncertainty," *Sys. & Contr. Lett.*, vol. 10, pp. 17-20, 1988.

[4] S. R. Kolla, R. K. Yedavalli, and J. B. Farison, "Robust stability bounds on time-varying perturbations for state-space models of linear discrete-time systems," *Internat. J. Control*, vol. 50, pp. 151-159, 1989.

[5] E. Yaz and X. Niu, "Stability robustness of linear discrete-time systems in the presence of uncertainty," *Internat. J. Control*, vol. 50, pp. 173-182, 1989.

[6] A. Richid, "Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed systems," *Internat. J. Sys. Sci.*, vol. 21, pp. 579-585, 1990.

[7] T. Mori, "Criteria for asymptotic stability of linear time-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, pp. 158-161, 1985.

[8] A. Hmamed, "On the stability of time-delay systems: new result," *Internat. J. Control.*, vol. 43, pp. 321-324, 1986.

[9] S.S. Wang, B. S. Chen and T. P. Lin, "Robust stability of uncertain time-delay systems," *Internat. J. Control*, vol. 46, pp. 963-976, 1987.

[10] W. Cheres, Z. J. Palmor and S. Gutman, "Quantitative measures of robustness for systems including delay perturbations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-34, pp. 1203-1204, 1989.

[11] A. Hmamed, "Furthr results on the delay-independent asymptotic stability of linear systems," *Internat. J. Sys. Sci.*, vol. 22, pp. 1127-1132, 1991.

[12] K. K. Shyr and J. J. Yan, "Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control," *Internat. J. Control*, vol. 57, pp. 237-246, 1993.

[13] T. Mori, N. Fukuma and M. Kuwahara, "Delay independent stability criteria for discrete-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, pp. 964-966, 1982.

[14] C.-H. Lee, T.-H. Li and F.-C. Kung, "D-stability analysis for discrete systems with a time delay," *Sys. & Contr. Lett.*, vol. 19, pp. 213-219, 1992.

[15] T.-J. Su and W.-J. Shyr, "Robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-39, pp. 425-428, 1994.

[16] H. Trinh and M. Aldeen, "D-stability analysis of discrete-delay perturbed systems," *Internat. J. Control*, vol. 61, pp. 493-505, 1995.

[17] C.-H. Lee, T.-H. Li and F.-C. kung, "New stability for discrete time-delay systems with uncertainties," *CTAT*, vol. 10, pp. 1159-1168, June, 1995.

[18] Z. Q. Gao and P. J. Antsaklis, "Explicity asymme-

tric bounds for robust stability of continuous and discrete-time systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-38, pp. 332-335, 1993.

[19] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. 2nd Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.

부록

정리 2의 증명 :

(7)에서처럼 Lyapunov 함수 $V(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$V(x) = x^TPx + \gamma \sum_{i=k-h}^{k-1} x(i)^T x(i), \tag{A.1}$$

단, 파라미터 γ는

$$\gamma = \varepsilon[\lambda_M(B^TPB) + \lambda_M(D^T|P|D)]$$

로 정의하며 ε은 식(6)에 정의되었다.
이때, 시간에 대한 차이 $\Delta V(x)$는

$$\begin{aligned}\Delta V(x) =& x^T(A^TPA - P + \gamma I)x + 2x^TA^TP\Delta Ax \\ &+ x^T\Delta A^TP\Delta Ax + 2x^T(A^TPB + A^TP\Delta B \\ &+ \Delta A^TPB + \Delta A^TP\Delta B)x_h + x_h^T(B^TPB \\ &+ 2B^TP\Delta B + \Delta B^TP\Delta B - \gamma I)x_h\end{aligned} \tag{A.2}$$

보조정리 1과 (21)을 사용하면, 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}2x^TA^TP\Delta Ax &\le \frac{\eta}{3}x^TA^TPAx + \frac{3}{\eta}x^T\Delta A^TP\Delta Ax \\ &\le \frac{\eta}{3}x^TA^TPAx + \frac{3}{\eta}x^TE^T|P|Ex,\end{aligned} \tag{A.3}$$

여기서 임의의 행렬 M에 대하여, 부등식 $x^TMx \le x^T|M|x$가 적용되었다.
같은 방식으로 다음의 부등식을

$$\begin{aligned}2x^TA^TP\Delta Bx_h &\le \frac{\eta}{3}x^TA^TPAx + \frac{3}{\eta}x_h^TD^T|P|Dx_h, \\ 2x^TA^TPBx_h &\le \frac{\eta}{3}x^TA^TPAx + \frac{3}{\eta}x_h^TB^TPBx_h, \\ 2x^T\Delta^TAPBx_h &\le x^TE^T|P|Ex + x_h^TB^TPBx_h, \\ 2x_h^TB^TP\Delta Bx_h &\le x_h^TB^TPBx_h + x_h^TD^T|P|Dx_h, \\ 2x^T\Delta^TAP\Delta Bx_h &\le x^TE^T|P|Ex + x_h^TD^T|P|Dx_h.\end{aligned} \tag{A.4}$$

구할 수 있다.
위의 부등식 (A.4)를 (A.2)에 대치하고, 정리 1의 증명처럼 조작하면 다음의 $\Delta V(x)$ 상한치를 얻을 수 있다.

$$\Delta V(x) \le -\lambda_m[Q - \gamma - \varepsilon\lambda_M(E^T|P|E)]\|x\|^2.$$

따라서, (23)의 조건이 만족되면 $\Delta V(x)$는 항상 음이 된다. 이로써 증명은 완료된다. ■

정리 3의 증명 :

Lyapunov 함수 $V(x)$를

$$\begin{aligned}V(x) =& x^TPx \\ &+ 2\sum_{i=k-h}^{k-1} x(i)^T(B+\Delta B)^TP(B+\Delta B)x(i),\end{aligned}$$

처럼 정의하자.
이때, 시간에 대한 차이 $\Delta V(x)$는

$$\begin{aligned}\Delta V(x) =& x^T\hat{A}^TP\hat{A}x + 2x^T\hat{A}^TP\hat{B}x_h + x_h^T\hat{B}^TP\hat{B}x_h \\ &- x^TPx + 2[x^T\hat{B}^TP\hat{B}x - x_h^T\hat{B}^TP\hat{B}x_h]\end{aligned} \tag{A.5}$$

여기서, 편의상 $\hat{A} = A + \Delta A$, $\hat{B} = B + \Delta B$로 정의하자. 보조정리 1을 사용하여 다음의 부등식을 (A.5)에 대치하면

$$2x^T\hat{A}^TP\hat{B}x_h \le x^T\hat{A}^TP\hat{A}x + x_h^T\hat{B}^TP\hat{B}x_h,$$

다음과 같이 $\Delta V(x)$의 새로운 상한치를 얻는다.

$$\begin{aligned}\Delta V(x) \le& x^T[2A^TPA - P + 2B^TPB + 2(A^TP\Delta A \\ &+ \Delta A^TPA) + 2(A^TP\Delta A + \Delta A^TPA) + 2\Delta^TAP\Delta A \\ &+ 2\Delta B^TP\Delta B]x \\ =& x^T(2A^TPA - P + 2B^TPB + 4A^TP\Delta A + 4B^TP\Delta B \\ &+ 2\Delta A^TP\Delta A + 2\Delta B^TP\Delta B)x.\end{aligned} \tag{A.6}$$

부등식 $x^TMx \le x^T|M|x$을 이용하여

$$\begin{aligned}\Delta V(x_k) \le& x^T(-Q + 2B^TPB + 4|A^TP|E + 4|B^TP|D \\ &+ 2E|P|E + 2D|P|D)x\end{aligned}$$

을 얻는다. 조건식 (24)가 성립하면 $\Delta V(x)$가 음이 되어 시스템의 안정성이 보장된다. 이로써 증명은 완료된다. ■

정리 4의 증명 :

Lyapunov 함수 $V(x)$를

$$\begin{aligned}V(x) =& x^TPx + \varepsilon\sum_{i=k-h}^{k-1} x(i)^TB^TPBx(i) \\ &+ \varepsilon\sum_{i=k-h}^{k-1} x(i)^T\Delta^TBP\Delta Bx(i),\end{aligned}$$

처럼 정한다.
이때, 시간에 대한 차이 $\Delta V(x)$는

$$\begin{aligned}\Delta V =& x^T(A^TPA - P)x + 2x^TA^TP\Delta Ax + x^T\Delta A^TP\Delta Ax \\ &+ 2x^T(A^TPB + A^TP\Delta B + \Delta A^TPB + \Delta A^TP\Delta B)x_h \\ &+ x_h^T(B^TPB + 2B^TP\Delta B + \Delta B^TP\Delta B)x_h + \varepsilon(x^TB^TPBx \\ &- x_h^TB^TPBx_h) + \varepsilon(x^T\Delta B^TP\Delta Bx - x_h^T\Delta B^TP\Delta Bx_h)\end{aligned} \tag{A.7}$$

(A.3-A.4)에서처럼 보조정리 1을 사용하면

$$\begin{aligned}\Delta V \le& -[\lambda_m(Q) - \varepsilon\lambda_M(B^TPB)]\|x\|^2 + \varepsilon x^T[(\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)^T \\ &\cdot P\sum_{i=1}^{m} e_iE_i + (\sum_{i=1}^{n} d_iD_i)^TP\sum_{i=1}^{n} d_iD_i]x\end{aligned} \tag{A.8}$$

을 구할 수 있고, 여기서 다음의 부등식

$$\begin{aligned}& x^T(\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)^TP(\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)x \\ &\le \sigma_M((\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)^TP\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)\|x\|^2 \\ &\le [\sigma_M(P^{1/2}\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)]^2\|x\|^2 \\ &\le [\sigma_M(\sum_{i=1}^{m} |e_i||P^{1/2}E_i|)]^2\|x\|^2 \\ &\le [(\max_i |e_i|)\sigma_M(\sum_{i=1}^{m} |P^{1/2}E_i|)]^2\|x\|^2\end{aligned} \tag{A.9}$$

이 성립하고, (A.8)의 우변의 마지막 항도 (A.9)처럼 대치하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\Delta V(x) \le& -\{\lambda_m(Q) - \varepsilon(\lambda_M(B^TPB) \\ &+ [\max_i |e_i|\sigma_M(\sum_{i=1}^{m} |P^{1/2}E_i|)]^2 \\ &+ [\max_i |d_i|\sigma_M(\sum_{i=1}^{n} |P^{1/2}D_i|)]^2)\}\|x\|^2.\end{aligned} \tag{A.10}$$

따라서, (26)의 조건이 만족되면 $\Delta V(x_k)$는 항상 음이 된다.
정리 3의 나머지 두 충분조건은 다음의 부등식을 이용하여

$$[\sigma_M(P^{1/2}\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)]^2 \le [\sum_{i=1}^{m} |e_i|\sigma_M(P^{1/2}E_i)]^2$$

혹은

$$[\sigma_M(P^{1/2}\sum_{i=1}^{m} e_iE_i)]^2 = [\sigma_M(P^* e^*)]^2 \le \left[\sigma_M(P^*)\left(\sum_{i=1}^{m} e_i^2\right)^{1/2}\right]^2 = \sigma_M^2(P^*)\sum_{i=1}^{m} e_i^2$$

여기서 $P^* = [\, P^{1/2}E_1 \; P^{1/2}E_2 \cdots P^{1/2}E_m \,]$, $e^* = [\, e_1I \;\; e_2I \cdots e_mI \,]$

(A.10)에 대치함으로써 쉽게 증명을 이끌어 낼 수 있다. 이로써 증명은 완료된다. ■

정리 5의 증명 :

Lyapunov 함수 $V(x)$를

$$V(x) = x^TPx + 2\sum_{i=k-h}^{k-1} x(i)^T(B+\Delta B)^TP(B+\Delta B)x(i),$$

처럼 정의하자.

이때, 시간에 대한 차이 $\Delta V(x)$는 (A.5)와 동일하고, 보조정리 1을 사용하여 다음의 부등식을

$$2x^T\hat{A}^TP\hat{B}x_h \le x^T\hat{A}^TP\hat{A}x + x_h^T\hat{B}^TP\hat{B}x_h,$$

대치하면

$$\begin{aligned}\Delta V &\le x^T[2A^TPA - P + 2B^TPB + 2(A^TP\Delta A + \Delta A^TPA) \\ &\quad + 2(B^TP\Delta B + \Delta B^TPB) + 2\Delta A^TP\Delta A + 2\Delta B^TP\Delta B]x \\ &= x^T[-Q + 2B^TPB + 2\sum_i e_i(A^TPE_i + E_i^TPA) + 2\sum_i e_i \\ &\quad \cdot (B^TPD_i + D_i^TPB) + 2\sum_{i,j}(e_ie_jE_i^TPE_j + d_id_jD_i^TPD_j)]x \\ &= x^T(-Q + 2B^TPB + 2\sum_i e_iP_{Ei} + 2\sum_i d_iP_{Di} \\ &\quad + 2\sum_{i,j} e_ie_jP_{Eij} + 2\sum_{i,j} d_id_jP_{Dij})x\end{aligned}$$

를 얻는다.

여기서, 행렬 M을 다음과 같이 정의하자.

$$M = -Q + 2B^TPB + 2\sum_i e_iP_{Ei} + 2\sum_i d_iP_{Di} + 2\sum_{i,j} e_ie_jP_{Eij} + 2\sum_{i,j} d_id_jP_{Dij}.$$

주어진 시스템의 안정성을 보장하기 위해서는 $\Delta V(x)$가 음이 되어야 한다. 즉, 행렬 M의 모든 고유치가 음이어야 한다. 이는 다음과 같다.

$$\lambda(M) < 0.$$

보조정리 2, (31)의 첫 번째 조건과 Rayleigh principle[19]을 이용하여

$$\begin{aligned}\lambda(M) &\le -\lambda_m(Q - 2B^TPB) + 2\sum_i \lambda_M(e_iP_{Ei}) \\ &\quad + 2\sum_i \lambda_M(d_iP_{Di}) + 2\sum_{i,j}\lambda_M(e_ie_jP_{Eij}) + 2\sum_{i,j}\lambda_M(d_id_jP_{Dij}) \\ &\le -\lambda_m(Q - 2B^TPB) + 2\sum_i(|e_i|\lambda_M(P_{Ei}) + |d_i|\lambda_M(P_{Di})) \\ &\quad + 2\sum_{i,j}|e_i||e_j|\lambda_M(P_{Eij}) + 2\sum_{i,j}|d_i||d_j|\lambda_M(P_{Dij}) \\ &\le -\lambda_m(Q - 2B^TPB) + 2\sum_i(|e_i|\sigma_M(P_{Ei}) + |d_i|\sigma_M(P_{Di})) \\ &\quad + 2\sum_{i,j}|e_i||e_j|\sigma_M(P_{Eij}) + 2\sum_{i,j}|d_i||d_j|\sigma_M(P_{Dij})\end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 따라서, 시스템 (20)은 조건식 (31)이 만족되면 점근적으로 안정하다. 이로써 증명은 완료된다. ■

박 주 현

1968년 1월 11일생. 1990년 경북대학교 공과대학 전자공학과 졸업. 1992년 동 대학원 졸업(공학석사). 1992년 ~ 현재 포항공과대학교 전자전기공학과 박사과정 재학중. 연구분야는 Robust control, time-delay system, large-scale system, ICASE, IEEE, SIAM 회원임.

원 상 철

1951년 1월 19일생. 서울대학교 전기공학과에서 1974년, 1976년에 학사, 석사학위 받음. 1985년 University of Iowa 의 전자공학과에서 박사학위 취득. 1985년 ~ 1987년 Univ. of New Haven 전기 및 전산기공학과 교수역임. 1988년이래 포항공대 전자전기공학과 교수, 철강제어센터(SPARC) 소장. 주요 연구분야는 Robotics, automotive control. 현재, IEEE, ICASE, KIEE 회원임.