

선형 회분식 공정을 위한 이차 성능 지수에 의한 모델 기반 반복 학습 제어

Model-Based Iterative Learning Control with Quadratic Criterion for Linear Batch Processes

이 광 순, 김 원 철, 이 재 형
(Kwang Soon Lee, Won Cheol Kim and Jay H. Lee)

Abstract : Availability of input trajectories corresponding to desired output trajectories is often important in designing control systems for batch and other transient processes. In this paper, we propose a predictive control-type model-based iterative learning algorithm which is applicable to finding the nominal input trajectories of a linear time-invariant batch process. Unlike the other existing learning control algorithms, the proposed algorithm can be applied to nonsquare systems and has an ability to adjust noise sensitivity as well as convergence rate. A simple model identification technique with which performance of the proposed learning algorithm can be significantly enhanced is also proposed. Performance of the proposed learning algorithm is demonstrated through numerical simulations.

Keywords : learning control, batch process control, quadratic criterion, FIR model, ILC

I. 서론

회분식 공정은 한정된 시간 동안 운전이 지속되며 또 일회의 운전 후 같은 형태의 운전이 계속 반복되는 공정을 일컫는다. 과도 응답 혹은 비정상 상태가 주로 지배하는 이러한 회분식 공정의 제어는 일반적으로 주어진 기준 출력 궤적(nominal output trajectory)을 추적하는 추적 제어 문제(tracking control problem)로 주어지게 된다. 공정의 특성에 선형성이 강한 소재의 열처리, 실리콘 웨이퍼의 가열 공정 등에서는 비선형성에 따른 문제점이 크게 노출되지는 않는다. 그러나 가장 대표적인 회분식 화학 공정이라 할 수 있는 회분식 반응기에서는 위의 문제 외에도 모델화의 어려움, 심한 비선형성의 노출 등 연속 공정에서는 크게 문제가 되지 않던 제어상의 어려움이 나타나기도 한다. 최근의 회분식 반응기 제어에 관한 Berber[1]의 조사 연구 보고에 의하면 대부분의 연구가 연속 공정에서 적용되던 제어 방법을 약간의 수정을 통해 적용하는 것들이며, 비선형성이 매우 심한 회분식 반응기에서조차도 비선형성의 주 원인인 반응열의 시간에 따른 궤적을 추정하여 이를 앞먹임 제어(feedforward control)로 상쇄시키려는 시도 등이 다소 특이할 뿐, 한정된 시간 동안 같은 형태의 운전이 반복되는 회분식 공정의 일반적인 운전 특성을 활용한 예는 찾아볼 수가 없다. 사실 연속 공정의 제어 방법을 회분식 공정에 그대로 적용했을 경우 얻을 수 있는 성능에는 한계가 있으며 작업이 반복되더라도 같은 성능만이 얻어질 뿐 반복 운전에 따른 성능 향상은 기대할 수 없다.

일반적으로 회분식 공정은 정상 상태가 없이 운전 기간 동안 입력과 출력이 시간에 따라 계속 변하기 때문에 선형 제어 이론을 적용하기 위해서는 기준 입력 궤적을 주변으로 한 편차 변수(deviation variable)에 대한 선형 모델을 구하는 것이 필요하다. 그러나 대개의 경우 기준 출력 궤적은

미리 주어지는 반면 기준 입력 궤적은 주어지지 않으므로 불확실성이 있는 공정 모델 하에서 이를 구하는 방법이 개발될 필요가 있다. 또한 이 기준 입력 궤적은 공정 모델을 이용하지 않는 PID 형태의 제어에서도 제어 성능을 향상시키는 중요한 구실을 할 수 있다. 이를 이해하기 위하여 그림 1에 고정된 입력 바이어스 값을 사용하는 일반적인 되먹임(feedback) 제어 상황과, 기준 입력 궤적을 시변 입력 바이어스로 사용하는 되먹임 제어 상황을 비교하였다. 기준 입력 궤적을 시변 입력 바이어스로 사용하게 되면 비록 이 궤적이 근사적인 것이라 할지라도 되먹임 제어가 감당해야 하는 보정량이 매우 작아지므로 되먹임 제어의 성능을 크게 향상시킬 수 있다. 특히 이러한 제어 성능의 향상은 되먹임 제어로는 얻을 수 있는 성능의 한계가 있는 비최소 위상 공정(nonminimum phase process), 시간 지연 공정(time delay process)[2], 그리고 비선형 공정에서 더 두드러지게 나타날 것이다.

회분식 공정에서 불확실한 공정 모델에 의존하며 공정의 반복 운전 특성을 이용하여 입력 기준 궤적을 점진적으로 구하는 방법은, 소위 반복 학습 제어(iterative learning control)이라는 이름으로, Arimoto 등[3]의 연구 이후 주로 로봇 팔의 제어를 위해 많이 연구되어 왔다. 초기 학습 제어에 대한 연구들은 공정에 대한 모델이 없더라도 반복 작업을 통해 원하는 공정 출력에 해당되는 입력을 계산하는 입력 개선식을 구하는 방향으로 연구가 이루어져 왔다. 이 결과, 미분기[3], 고차 학습[4], PID 형태[5] 등 일단 직관적 형태로 제어기를 설계한 후 그 수조건을 판단하는 형태로 연구가 이루어졌다. 이러한 형태의 학습 제어기들과는 달리 공정 모델을 이용한 제어기들도 제시되었으며 이들 중 공정의 역모델을 이용한 학습 제어기는 모델에 오차가 없는 경우 한 번의 학습으로 원하는 공정 출력을 얻을 수 있는 이점이 있어 여러 연구들의 대상이 되었다[6], [7]. 그러나 어떠한 학습 제어기도 입출력 운전 자료를 이용하여 공정의 역모델을 근사해 나가는 속성을 가지고 있기 때문에 학습 제어기는 비분 기능을 필연적으로 포함할 수밖에 없으며, 이에 따라 공정 출력 측정치 내의 잡음에 대해 대단히 민감해 질 수 있는 소지가 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위

접수일자 : 1996. 5. 29., 수정완료 : 1996. 8. 15.

이광순, 김원철 : 서강대학교 화학공학과

이재형 : Auburn 대학교 화학공학과

※ 본 연구에 대한 LG 연암 재단, 공정 산업의 지능 자동화 연구 센터(ARC), 그리고 한국 과학 재단의 연구비 지원에 감사드립니다.

하여 미분 항을 사용하지 않는 P-형 학습 제어기[8], [9], 로버스트 필터(robust filter)[7]의 사용 등이 제시되기도 하였다. 그러나 이러한 방법은 근본적인 해결책이 되지 못하며 공정 출력 궤적이 궁극에 가서 (in the limit) 기준 출력 궤적과 오차를 가지는 문제점을 안고 있다. 이 문제점을 해결하기 위한 좀 더 근본적인 방법으로 Sogo 등[10]은 연속 시간대에서, 또한 Tao 등[11]은 이산 시간대에서 입력 벌치 항(input penalty term)을 포함한 이차 성능 지수를 최소화 하는 학습 제어기를 제안한 바 있다. 그러나 이들이 채택한 성능 지수를 만족하는 제어기는 출력 궤적에 오차가 나타나는 문제점을 안고 있으며, 이에 따라 모델 오차의 수렴성에 대한 영향 등 기본적인 성질들이 분석되지 못하였다.

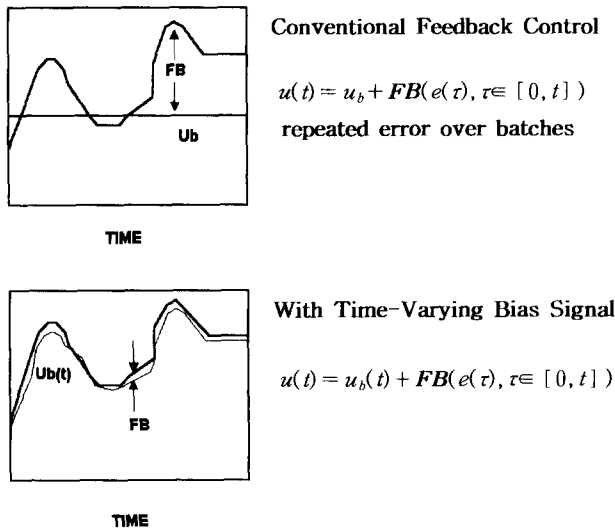


그림 1. 기존 되먹임 제어와 시변 바이어스 신호를 이용한 되먹임 제어.

Fig. 1. Conventional feedback control and feedback control with time-varying bias signal.

본 연구에서는 전통적인 회분식 화학 공정 뿐 아니라 소재의 열처리, 실리콘 웨이퍼 가열 공정 등 넓은 의미의 회분식 공정에서의 응용을 목표로, 제어계 설계 및 제어 성능 향상을 위하여 요구되는 기준 입력 궤적을 구하기 위한 새로운 학습 제어 방법을 제시하고자 하였다. 본 연구에서는 기존 학습 제어기의 가장 큰 문제점인 잡음에 대한 민감성을 근본적으로 해결하고자 하였으며, 입출력 변수의 수가 같지 않는 다변수 계에도 적용할 수 있는 예측 제어기 형태의 이산 시간대 모델 기반 학습 제어기를 제안하고자 하였다. 본 연구에서는 제안된 학습제어기의 수학적 성격을 좀 더 정확히 이해하기 위한 목적으로 대상 공정을 선형 공정으로 한정하였다. 그러나 이전 회분(previous batch) 운전의 입출력 궤적을 중심으로 구한 선형화 모델을 이용하면 비선형 공정으로 확장하는 것도 가능하다[12]. 이때 구해지는 선형화 모델은, 모델 인식 기법을 이용하여 구할 수 밖에 없으며, 공정의 비선형 특성상 국지적 선형 모델의 조합 혹은 시변 파라미터를 갖는 선형 모델로 표현될 것이다.

먼저 2장에서는 공정을 유한 펄스 응답 상수로 이루어진 행렬로 표현하였으며 3장에서는 기존 학습 제어기의 목적과 문제점을 최적화 문제로 설명하였고 제안된 학습 제어기의 목적을 정의하였다. 4장에서는 학습 제어기의 목적을 이차 성능 지수로 만든 후 학습 제어기 형태의 해를 구하였으며, 5장에서는 이렇게 구한 학습 제어기의 수렴 조건, 잡음에 대한 민감도, 그리고 모델 오차에 대한 강인성에 대해 알아

보았다. 제안된 학습 제어기는 모델 오차가 없는 경우에는 항상 수렴함을 보였으며, 조율 변수를 이용하여 잡음에 대한 민감도와 모델 오차에 대한 강인성을 조절할 수 있음을 보였다. 6장에서는 모델 오차가 있을 때 학습 제어기의 성능 개선을 위해 사용할 수 있는 모델 추정기도 함께 제안하였다. 마지막으로 수치모사를 통해 제안한 학습 제어기와 역모델에 근거한 학습 제어기의 추적성을 비교한 결과를 7장에 나타내었다.

II. 이산 시간대 회분식 공정의 표현

N회의 샘플링으로 구성되는 회분 조업 시간 $[0, 1, \dots, N-1]$ 에서 정의되는 SISO(Single-Input Single-Output) 선형 회분식 공정은 다음과 같은 이산 시간 펄스 응답 모델로 표현할 수 있다.

$$y(m) = \sum_{i=0}^m h_{m-i}u(i) + y_0(m), m \in [0, 1, \dots, N-1] \quad (1)$$

여기서 u 와 y 는 각각 공정의 입력과 출력을 나타내고, y_0 는 매 회분 조업마다 일정하게 들어오는 외란을 나타내며, m 는 m 번째 샘플링 시간을 가리키며, h_{m-i} 는 i 시점의 단일 펄스 입력이 m 샘플링 시점 후의 출력에 미치는 영향의 크기를 나타낸다. 회분 조업 시간은 유한한 샘플링 시점 동안만 진행되므로 입력과 출력의 관계는 다음과 같이 유한 차원 입출력 벡터사이의 대수 관계식으로 표현된다.

$$y = Gu + y_0 \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} y &= [y(0), y(1), \dots, y(N-1)]^T \\ u &= [u(0), u(1), \dots, u(N-1)]^T \\ y_0 &= [y_0(0), y_0(1), \dots, y_0(N-1)]^T \end{aligned} \quad (3)$$

$$G = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix}$$

입출력 사이에 d 스텝의 시간지연이 있는 경우에는 $h_0 = h_1 = \dots = h_{d-1} = 0$ 이므로 G 는 다음과 같이 표현된다.

$$G = \begin{bmatrix} O & O \\ G_c & O \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서, O 는 모든 요소가 0이고 해당하는 크기를 갖는 행렬이며 G_c 는 다음 식과 같다.

$$G_c = \begin{bmatrix} h_d & 0 & \dots & 0 \\ h_{d+1} & h_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_d \end{bmatrix} \quad (5)$$

위의 모델을 입출력 변수의 수가 각각 n_u 와 n_y 인 다변수 계로 확장하여 표기하면 다음과 같다.

$$y = Gu + y_0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y &= [y_1^T, y_2^T, \dots, y_{n_y}^T]^T \\ u &= [u_1^T, u_2^T, \dots, u_{n_u}^T]^T \\ y_0 &= [y_{01}^T, y_{02}^T, \dots, y_{0n_y}^T]^T \end{aligned} \quad (7)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n_u} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n_y 1} & G_{n_y 2} & \dots & G_{n_y n_u} \end{bmatrix}$$

여기서 G_{ij} 는 j 번째 입력과 i 번째 출력사이의 펄스 응답 행렬을 나타낸다.

III. 학습 제어 문제

앞의 (6)으로 표현되는 공정의 $k+1$ 과 k 번째 회분 조업의 입출력은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$y_{k+1} = y_k + G(u_{k+1} - u_k) \tag{8}$$

여기서 하점자 k 는 k 번째 회분 조업을 가리킨다. 출력 설정치 궤적 y_d 가 매 회분 조업마다 같다고 할 때, 제어 오차와 입력 변화량을 각각

$$e_k = y_k - y_d \tag{9}$$

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k \tag{10}$$

라고 정의하면 (8)은 다음과 같은 회귀식으로 표현된다.

$$e_{k+1} = e_k + G \Delta u_k \tag{11}$$

기존의 학습 제어의 목적은 공정에 대한 모델이 근사적으로만 주어져 있더라도 작업이 반복되면서 점진적으로 공정 출력이 설정치의 궤적을 완벽히 추적하도록 하는 것이었다. 이 목적은 입출력 변수의 수가 같지 않은 경우(특히 $n_y > n_u$)에는 일반적으로 만족될 수 없으며, 따라서 다음과 같이 가능한 최소값에 도달하도록 하는 것으로 그 목적을 변형하여 수식으로 표현하는 것이 필요하다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| e_k \| = \min \| e \| \tag{12}$$

여기서 $\| \cdot \|$ 는 임의의 벡터 norm을 나타낸다. 본 연구에서는 PD(Positive Definite) 행렬이 가중된 Euclidean norm을 사용하였다.

k 번째 회분 조업이 끝나면 e_k 와 u_k 가 주어지므로, 위의 학습 제어 목적은 (13)과 같이 다음 조업에서 예상되는 출력 오차를 최소화하는 입력을 찾는 최적화 문제로 표현할 수 있다.

$$\min_{u_{k+1}} [J_k = \frac{1}{2} e_{k+1}^T e_{k+1}] \tag{13}$$

이때 (11)을 (13)에 대입하여 해를 구하면 다음과 같은 역모델을 이용한 학습 제어기(I-ILC, Inverse model-based Iterative Learning Controller)가 구해진다.

$$u_{k+1} = u_k - (G^T G)^{-1} G^T e_k \tag{14}$$

위의 I-ILC는 입력에 대한 가중치가 없기 때문에 과도한 입력이 나타날 수 있다. 이 단점을 보완하고 또한 출력에 대한 가중치를 도입한다면 다음과 같이 표현된다.

$$\min_{u_{k+1}} [J_k = \frac{1}{2} \{ e_{k+1}^T Q e_{k+1} + u_{k+1}^T R u_{k+1} \}] \tag{15}$$

여기서 Q 와 R 은 PD인 대칭 행렬이다. (15)의 해는 (16)으로 표현된다.

$$u_{k+1} = (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q G u_k - (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q e_k \tag{16}$$

이 ILC가 Tao 등[11]이 제안한 형태이다. 그러나 (16)은 $e_k = 0$ 인 경우에도 u_k 와 u_{k+1} 가 같지 않으므로 출력 오차가 영으로 수렴할 수 없음을 알 수 있다.

IV. Q-ILC (Iterative Learning Control with Quadratic Criterion)

입력 변수의 과도한 움직임을 억제하면서도 출력에 오차가 생기는 방지할 수 있도록 하는 방법은, 예측 제어에서

채택하고 있는 것과 같이, 입력의 크기 대신 입력의 변화량에 대해 벌칙항을 도입하는 방법이다. 이와 같이 e_{k+1} 와 Δu_k 의 이차 목적 함수를 최소화하는 Δu_k 를 구하는 최적화 문제는 (17)으로 표현된다.

$$\min_{\Delta u_k} [J_k = \frac{1}{2} \{ e_{k+1}^T Q e_{k+1} + \Delta u_k^T R \Delta u_k \}] \tag{17}$$

그리고 (11)을 (17)에 대입하고 Δu_k 에 대해 미분을 취하면 본 연구에서 제시하고자 하는 다음과 같은 형태의 학습 제어기가 얻어지며 이를 Q-ILC로 부르기로 한다.

$$u_{k+1} = u_k - (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q e_k \tag{18}$$

(18)에서 $e_k \neq 0$ 인 오차가 지속되면 u_k 는 회분이 반복되는 동안 계속 증가(절대값의 관점에서)하게 된다. 즉 PID 제어기의 적분기 기능과 같이 제어 오차가 소멸될 때 까지 계속 제어 동작을 키워나가는 기능을 갖는다. 한편 $e_k = 0$ 인 경우에는 $u_k = u_{k+1}$ 이므로 학습 제어기가 수렴하면 출력 오차가 영으로 수렴함을 알 수 있다. (18)로 표현되는 Q-ILC의 조율 변수는 Q 와 R 이다. 출력 오차에 대한 가중치 Q 는 출력의 중요도나 크기에 따라 scaling을 하기 위해 사용할 수 있으며, 입력 변화에 대한 가중치 R 은 입력 변화 속도를 조절하기 위해 사용할 수 있다.

V. Q-ILC의 특성 분석

1. 수렴성

먼저 공정 모델에 오차가 없는 경우에 대한 Q-ILC의 수렴성을 알아보자. 사실 (17)의 이차 성능 지수는 공정 모델에 오차 없는 경우 Q-ILC가 수렴한다는 성질을 이미 함의하고 있지만 구체적인 분석을 위해서, 또 모델 오차의 영향을 분석하기 위해서는 Q-ILC에 의해 제어되고 있는 공정의 동특성을 분석하는 것이 필요하다. (18)을 (11)에 대입하고 matrix inversion lemma [13]를 사용하여 공정 출력 오차에 대한 회귀식을 정리하면,

$$e_{k+1} = (I - G(G^T Q G + R)^{-1} G^T Q) e_k = (I + G R^{-1} G^T Q)^{-1} e_k \tag{19}$$

의 공정 출력 오차에 대한 회귀식을 얻게 되며, 수렴을 위한 조건은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & |\lambda_i((I + G R^{-1} G^T Q)^{-1})| \\ &= \left| \frac{1}{1 + \lambda_i(G R^{-1} G^T Q)} \right| < 1 \quad \text{for all } i \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 λ_i 는 고유치를 의미한다. 한편 (11), (18), (19)를 이용하여 e_{k+1} 와 e_k 를 소거하면 (21)과 같이 입력 변화에 대한 회귀식을 얻을 수도 있다.

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1} &= (I - (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q G) \Delta u_k \\ &= (I + R^{-1} G^T Q G)^{-1} \Delta u_k \end{aligned} \tag{21}$$

따라서 입력 변화가 수렴하기 위한 조건은 (22)로 표현된다.

$$\begin{aligned} & |\lambda_i((I + R^{-1} G^T Q G)^{-1})| \\ &= \left| \frac{1}{1 + \lambda_i(R^{-1} G^T Q G)} \right| < 1 \end{aligned} \tag{22}$$

여기서 G 가 nonsingular인 경우는 (20), (22)가 모두 만족된다. 그러나 입출력 변수 수의 차이에 의하여, 또 시간 지연에 의해 G 는 singular 행렬이 될 수가 있으며, 이 때에는 (20) 혹은 (22) 좌변의 고유치 중 일부는 1이 되어 부등식을 만족하지 못하게 된다. 이러한 경우, 출력 혹은 입력 백

터의 어느 부분이 수렴을 하며, 어느 부분이 수렴하지 못하는 지에 대한 분석을 다음과 같이 수행할 수 있다.

먼저 전체적인 전개 과정에 대한 이해를 돕기 위하여 $n_u=2, n_y=1$ 인 간단한 경우를 생각하여 보자. 여기서 각 G_{ij} 가 (4)의 형태를 가짐을 생각하고 일반성을 잃지 않고 $y_0=0$ 라 가정하면 (6)은 다음과 같이 partition 될 수 있다.

$$y = [G_1 \ G_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_{uc} \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 하첨자 uc 는 시간 지연 때문에 입력의 변화가 영향을 줄 수 없는 조업 초기 시간에서의 출력 샘플값이며 하첨자 c 는 입력의 영향을 받을 수 있는 출력 샘플값들을 의미한다. 따라서 G_c 는 0이 아닌 행으로만 구성된 블록 행렬이다. 이제 Q 를 $diag[Q_1, Q_2]$ 와 같이 (23)의 partition과 같은 차수로 나누어 표현하고, (23)과 Q 를 (19)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} e_{uc} \\ e_c \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (I + G_c R^{-1} G_c^T Q_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{uc} \\ e_c \end{bmatrix}_k \quad (24)$$

를 얻는다. 여기서 G_c 의 행들이 모두 선형 독립이라고 하면 $G_c R^{-1} G_c^T Q_2$ 은 PD 대칭인 두 행렬의 곱이므로 다시 PD가 되어[14] $(I + G_c R^{-1} G_c^T Q_2)^{-1}$ 의 고유치는 모두 0과 1 사이에 존재하고 $e_{c,k}$ 는 모두 0으로 수렴한다. 한편 $e_{uc,k}$ 는 초기 회분 조업에서의 값이 지속적으로 유지된다. 즉, 제어 가능한 출력 응답 부분의 제어오차는 0으로 수렴하며, 입력의 영향이 미치지 않는 출력 응답 부분은 일정한 값을 유지하며 변하지 않는다. 한편 위의 (23)을 (18)에 대입하면

$$\Delta u_k = - (G_c^T Q_2 G_c + R)^{-1} G_c^T Q_2 e_{c,k} \quad (25)$$

과 같은 결과를 얻는다. 여기서 $e_{c,k}$ 는 0으로 수렴하므로 Δu_k 도 0으로 수렴하게 됨을 알 수 있다. 일단 $\Delta u_k \rightarrow 0$ 이 이루어지면 (17)의 목적 함수에 의하여 e_∞ 는 $\frac{1}{2} e^T Q e$ 를 최소화하는 값이 됨을 알 수 있다.

위의 해석은 $n_u \geq n_y > 1$ 인 경우로도 쉽게 확장된다. 이 때에도 역시 (23)과 같이 벡터 y 를 입력 변화의 영향을 전혀 받을 수 없는 부분과 그렇지 않은 부분으로 나눌 수 있으며, y 의 요소들을 이렇게 두 묶음으로 나누어 정리하는 과정에 맞추어 G 에 대한 행을 교환하면 (23)과 같은 partition이 이루어지며 $n_y=1$ 인 경우에서와 같은 결론이 도출된다.

출력 변수의 수가 입력 변수의 수 보다 많은 $n_u \leq n_y$ 경우도 유사한 과정이 적용된다. 이 때에는 출력에 영향을 미치는 입력 벡터 부분과 시간 지연으로 인하여 출력에 영향을 미칠 수 없는 회분 조업 마지막 시점 부근의 입력 부분의 두 묶음으로 u 를 나누며 이에 준하여 G 를 partition한다. 즉,

$$y = [G_c \ 0] \begin{bmatrix} u_c \\ u_{uc} \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서 G_c 의 모든 열은 0이 아닌 벡터만으로 구성된다.

$R = diag[R_1, R_2]$ 로 분해하고 이 partition을 (21)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta u_{uc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + R_1^{-1} G_c^T Q G_c)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta u_{uc} \end{bmatrix} \quad (27)$$

를 얻게 되며, 이 때 G_c 의 열이 모두 선형 독립이면 $(I + R_1^{-1} G_c^T Q G_c)^{-1}$ 의 고유치가 모두 0과 1 사이에 존재하게 되어 Δu_c 는 0으로 수렴함을 알 수 있다. 한편, 위의 partition을 (18)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta u_{uc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_c^T Q G_c + R_2)^{-1} G_c^T Q \\ 0 \end{bmatrix} e_\infty \quad (28)$$

이 되어 $\Delta u_{uc} = 0$ 도 만족됨을 알 수 있다. 결국 $k \rightarrow \infty$ 에서 $\Delta u_k \rightarrow 0$ 이 이루어지며 (17)의 목적 함수에 의하여 e_∞ 는 $\frac{1}{2} e^T Q e$ 가 최소화되는 값으로 수렴하게 됨을 알 수 있다. 또한 (28)로 부터 출력 오차의 수렴 값은 $(G_c^T Q G_c + R_2)^{-1} G_c^T Q$ 행렬의 null space 내에 존재함을 알 수 있다.

이상의 분석을 통하여 모델 오차가 없는 경우, 입출력 변수의 수, 각 입출력 쌍 사이의 지연 시간에 관계없이 Q-ILC에 의한 Δu_k 는 항상 0으로 수렴하며, 이 때 제어 오차는 $\frac{1}{2} e^T Q e$ 가 최소가 되는 값으로 수렴함을 알 수 있다. 특히 입력 변수의 수가 출력 변수의 수 보다 큰 경우, 지연 시간으로 인하여 입력 변화의 영향을 받을 수 없는 샘플링 값을 제외한 모든 출력 변수 내의 요소들은 원하는 설정치 কে적으로 수렴함을 알 수 있다.

2. 잡음에 대한 민감도

위의 (14), (18) 등 학습 제어기는 공정 출력 측정치를 공정의 역모델 성격을 가진 필터로 처리하므로 측정 잡음에 매우 민감하게 반응하는 성격을 가질 수 있다. 이제 제안된 Q-ILC의 잡음에 대한 민감도를 기존의 모델 근거 학습 제어기 중 가장 대표적인 형태라 할 수 있는 I-ILC와 비교하여 보기로 하자. 편의상 I-ILC는 G 가 nonsingular 라는 가정 하에서 전개한다.

$$I-ILC : u_{k+1} = u_k - G^{-1} e_k \quad (29)$$

$$Q-ILC : u_{k+1} = u_k - (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q e_k \quad (30)$$

각 ILC의 잡음에 대한 민감도는 학습 제어 필터의 induced norm으로 평가될 수 있다. 먼저 I-ILC의 잡음에 대한 민감도는

$$\|G^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\sigma_{\min}(G)} \quad (31)$$

로 평가된다. 여기서 G 는 전달 함수와 물리적으로 같은 의미를 가지며 공정의 전달 함수는 일반적으로 저역 필터 특성을 가지기 때문에 고주파 영역에서는 이득이 0을 향해 감소하게 된다. 따라서 샘플링 주기가 줄어들수록 $\sigma_{\min}(G)$ 는 0으로 접근하며 $\|G^{-1}\|_\infty$ 는 계속 증가하게 된다.

이에 반하여 Q-ILC의 잡음에 대한 민감도는

$$\begin{aligned} \|(G^T Q G + R)^{-1} G^T Q\|_\infty &\leq \frac{\sigma_{\max}(G) \sigma_{\max}(Q)}{\sigma_{\min}(G^T Q G + R)} \\ &\leq \frac{\sigma_{\max}(G) \sigma_{\max}(Q)}{\sigma_{\min}(R)} \end{aligned} \quad (32)$$

로 표현된다. 여기서 $\sigma_{\max}(G)$ 는 공정 전달 함수의 최대 이득에 해당되므로 샘플링 주기와는 상관없는 유한한 값이며, $\sigma_{\max}(Q)$ 와 $\sigma_{\min}(R)$ 는 사용자가 설정한 Q 와 R 에 의해 결정되는 값이다. 따라서 (32)의 오른쪽 항은 유한한 값

을 가지므로 Q-ILC의 잡음에 대한 민감도에는 한계 값이 존재하며 이 한계값은 원하는 대로 조절이 가능함을 알 수 있다.

3. 강인성

이제까지는 실제 공정 \bar{G} 가 모델 G 와 같다고 가정하고 학습 제어기를 설계했으나 실제 상황에서는 항상 모델 오차가 존재한다. 이 장에서는 모델 오차가 수렴성에 어떠한 영향을 미치는지를 살펴본다.

먼저 $n_u \geq n_y$ 인 경우를 생각하자. (11)의 G 를 \bar{G} 로 대체하고 출력 오차에 대한 회귀식을 얻으면 다음과 같다.

$$e_{k+1} = (I - \bar{G}(G^T Q G + R)^{-1} G^T Q) e_k \quad (33)$$

이제 G 를 기본 행렬 조작을 통해 (23)와 같은 형태로 정리하고, 이때 \bar{G} 에 똑같은 기본 행렬 조작을 가하여 정리된 결과를 $\begin{bmatrix} g \\ G_c \end{bmatrix}$ 라고 하자. 수렴성 분석에서와 같이 행렬 및 제어 오차 벡터를 partition 하여 (34)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} e_{uc} \\ e_c \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} I & -g(G_c^T Q_2 G_c + R)^{-1} G_c^T Q_2 \\ 0 & I - \bar{G}_c^T G_c^T Q_2 G_c + R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{uc} \\ e_c \end{bmatrix}_k \quad (34)$$

가 얻어진다. 이 식으로부터 만약 $e_{c,k}$ 가 0으로 수렴하면 g 에 상관없이 $e_{uc,k}$ 는 일정한 값으로 수렴하며, 5.1 절의 수렴성에서의 분석이 그대로 적용되게 되어 전체적인 수렴성이 증명된다. 이제 $e_{c,k}$ 의 수렴성을 살펴보기 위하여 \bar{G} 가

$$\bar{G}_c = (I + \Delta_{oc}) G_c \quad (35)$$

로 표현된다고 하자. 이 식을 (34)의 (2,2) 블록 행렬에 대입하면

$$0 < \lambda_i((I + \Delta_{oc}) G_c (G_c^T Q_2 G_c + R)^{-1} G_c^T Q_2) < 2 \quad (36)$$

가 $e_{c,k}$ 가 0으로 수렴할 조건이 된다. 여기서 R 을 매우 큰 값의 행렬로 선택하면 고유치는 매우 작아지므로 강인성이 개선될 수 있음을 알 수 있다. 예를 들어 $R = \alpha I - G_c^T Q_2 G_c$, $Q_2 = (G_c G_c^T)^{-1}$, $\alpha > 1$ 로 선택하면 (36)은

$$0 < \lambda_i(I + \Delta_{oc}) < 2\alpha \rightarrow -1 < \lambda_i(\Delta_{oc}) < 2\alpha - 1 \quad (37)$$

이 되므로 α 의 선택에 의해 허용되는 모델 오차의 범위를 원하는 대로 넓힐 수 있다. 이에 반하여 G^{-1} 가 존재한다는 가정 하에서 I-ILC의 강인성을 살펴보면 다음 범위 내의 출력 곱 모델 오차(output multiplicative model uncertainty)만이 허용되는 것을 쉽게 유도할 수 있다.

$$-1 < \lambda_i(\Delta_{oc}) < 1 \quad (38)$$

따라서 제안된 Q-ILC가 I-ILC에 비하여 우수한 강인성을 가짐을 알 수 있다.

$n_u \leq n_y$ 인 경우도 유사한 결과가 도출된다. 먼저 \bar{G} 를 $\begin{bmatrix} \bar{G}_c & g \end{bmatrix}$ 와 같이 표현하고, 입력 곱 모델 오차(input multiplicative model uncertainty)를 가정하여 $\bar{G}_c = G_c(I + \Delta_{ic})$ 와 같이 표현하자. (26)과 같이 입력을 partition한 후 정리를 하면 $k+1$ 과 k 번째 $\begin{bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta u_{uc} \end{bmatrix}$ 의 관계는 다음과 같은 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} I - (G_c^T Q G_c + R)^{-1} G_c^T Q G_c (I + \Delta_{ic}) & -G_c^T Q g \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서 Δu_{uc} 는 수렴성 분석에서와 같이 0이 되며, Δu_c 은 (1,1) 블록 행렬의 고유치에 의하여 수렴성이 결정된다. 이 경우도 $n_u \geq n_y$ 에서와 같은 논리로 R_1 을 큰 값의 PD 행렬이 되면 고유치가 수렴 영역 내에 존재하게 된다. 만약 $R_1 = \alpha G_c^T Q G_c$ 로 주어지면 Δu_c 가 수렴할 조건은

$$-1 < \lambda_i(\Delta_{ic}) < 2\alpha - 1 \quad (40)$$

이 되어 α 의 선택에 따라 허용 가능한 모델 오차의 범위가 크게 확장되는 것을 알 수 있다.

위의 분석으로부터 I-ILC는 조율할 수 있는 변수가 없기 때문에 고정된 범위내의 모델 오차만을 허용하는 반면, Q-ILC는 조율 변수를 이용하여 넓은 범위의 모델 오차를 허용하도록 할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 좋은 수렴 성능을 얻기 위해서는 모델을 정확히 구하는 것이 필요하다.

VI. 모델 추정 방법

모델이 실제 공정과 일치하지 않으면 학습 제어기의 강인한 수렴성을 위해 수렴 속도를 느리게 조율할 수 밖에 없다. 특히 모델 차수와 시간 지연의 오차는 학습 제어기의 성능을 나쁘게 하는 주요인이 된다. 따라서 모델 구조에 대한 정보 없이도 모델을 찾을 수 있는 모델 추정 방법이 필요하다. 제안한 학습 제어기는 펄스 응답 상수로 구성된 행렬을 사용하고 있으며 모델의 불확실성은 이 상수들의 차이 때문에 발생한다. 이 불확실성을 다음과 같이 펄스 응답 벡터 h 가 다음과 같은 평균과 covariance를 갖는 랜덤 변수로 가정하기로 하자.

$$E(h_k) = \bar{h} \quad (41)$$

$$E[h_k - \bar{h}]^T [h_k - \bar{h}] = V \delta_{jk} \quad (42)$$

유한 펄스 응답 상수로 이루어진 행렬 G 는 Toeplitz 행렬로 다음과 같은 성질이 있다.

$$G u = \begin{bmatrix} u(0) & 0 & \dots & 0 \\ u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(N-1) & u(N-2) & \dots & u(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix} = L h \quad (43)$$

여기서 L 는 첫 번째 열이 u 로 이루어진 Toeplitz 행렬이다. 이러한 성질을 이용하면 단변수 경우 다음과 같은 상태 공간 방정식을 얻을 수 있다.

$$h_{k+1} = h_k + v_k \quad (44)$$

$$y_k = L_k h_k + w_k \quad (45)$$

여기서

$$E(w_k) = 0, \quad E(w_j^T w_k) = W \delta_{jk} \quad (46)$$

위 (44)와 (45)는 선형 상태 공간 방정식이므로 펄스 응답 벡터 h_k 는 다음과 같은 Kalman filter를 사용하여 추정할 수 있다.

$$\hat{h}_{k+1} = \hat{h}_k + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (47)$$

$$\hat{y}_k = L_k \hat{h}_k \quad (48)$$

$$K_k = P_k L_k^T (L_k P_k L_k^T + W_k)^{-1} \quad (49)$$

$$P_{k+1} = P_k - P_k L_k^T (L_k P_k L_k^T + W_k)^{-1} L_k P_k + V_k \quad (50)$$

$$P_0 = P_I$$

다변수 계에 대해서도 위의 모델 추정 방법은 쉽게 확장된다. 위의 모델 추정기는 시간지연이나 모델의 차수 등과 같은 모델 구조에 대한 정보가 필요없이 공정 모델을 추정하기 때문에 제안한 학습 제어기와 결합하여 사용하기 적합한 형태이다. 또한 위의 모델 추정 방법은 매 회분 조업이 끝난 후 수행하는 것이므로 적용 제어에서처럼 모델 추정기와 제어기의 상호 작용에 의해 비선형성이 유발되는 문제점은 없다.

VII. 모사

제안한 학습 제어기의 성능을 알아보기 위해 다음의 두 가지 예에 대해 전산모사를 하였다.

예제 1 : 시간지연이 없는 이차공정

다음 (51)의 전달 함수로 표현되는 모델에 대해

$$\frac{1}{(5s+1)(3s+1)} \tag{51}$$

구간 [0, 40]에서 0.5의 샘플링 간격으로 펄스 응답 행렬 G 를 구하여 I-ILC와 Q-ILC를 각각 설계하였다. Q-ILC의 조율변수는 $Q=I$ 와 $R=0.02I$ 로 하였다. 실제 공정이 $\bar{G}=0.8G$ 인 행렬로 표현된다면 출력 곱 모델 오차는 $-0.2I$ 이므로 I-ILC와 Q-ILC 모두 이 모델 오차에 대해서 수렴 조건을 만족한다. (31)과 (32)으로 표현되는 I-ILC와 Q-ILC의 잡음에 대한 민감도는 각각 5000과 3이다.

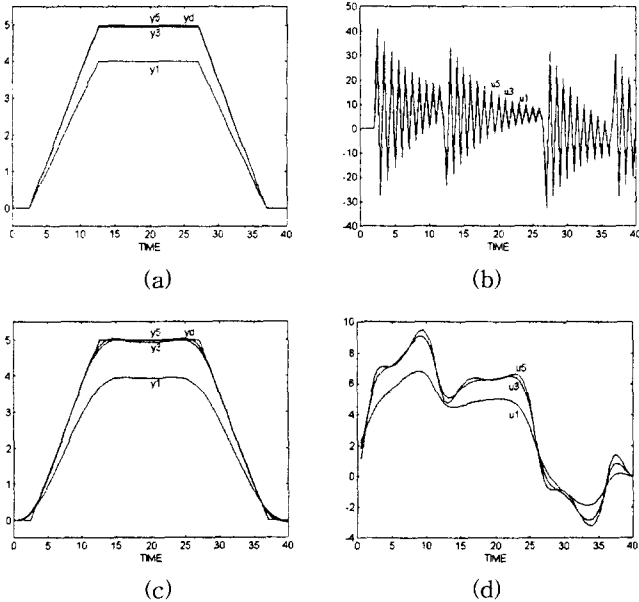


그림 2. 예제 1에서 측정 잡음이 없을 때 I-ILC와 Q-ILC의 추적 성능.

Fig. 2. Tracking performances of I-ILC and Q-ILC ($Q=I, R=0.02I$) in the example 1 without measurement noise.

- (a) Output trajectories by I-ILC.
- (b) Input trajectories by I-ILC.
- (c) Output trajectories by Q-ILC.
- (d) Input trajectories by Q-ILC.

측정 잡음이 없는 실제 공정 \bar{G} 에 대해 I-ILC와 Q-ILC 사용하여 전산 모사한 결과를 그림 2에 나타내었다. I-ILC의 공정 출력은 설정치 궤적으로 수렴하지만 공정 입력이 심하게 흔들려 실제 적용하기 어려움을 알 수 있다. I-ILC는 작업이 반복됨에 따라 공정 입력의 흔들림이 커지게 된

다. Q-ILC의 수렴 속도는 I-ILC보다 느리지만 입력의 흔들림이 적고 공정 출력은 설정치를 부드럽게 근사함을 알 수 있다. 그림 2에서 나타난 입력의 극심한 진동 현상은 사실 (51)을 이산화하면서 나타난 ringing zero에 의한 것이다. (51)의 연속 시간대 모델을 0.5의 샘플링 간격으로 zero-order hold를 통하여 측정한다면 (52)와 같이 $z=-0.9149$ 에 영(zero)을 갖는 이산 시간대 모델로 표시된다.

$$\frac{0.007629z+0.00698}{z^2-1.751z+0.7659} \tag{52}$$

(52)의 역모델을 학습 제어기로 사용하면 이 영은 진동이 쉽게 줄어들지 않는 극(pole)으로 작용하게 되어 제어 출력에 심한 진동이 나타나게 된다. $e_k \rightarrow 0$ 이 만족하는 학습 제어기의 제어 출력은 결국 I-ILC의 제어 출력으로 수렴해가므로 Q-ILC의 제어 출력도 회분 조업이 반복되면 결국 그림 2와 같은 제어 출력을 나타낼 것이다. 그러나 Q-ILC는, 잡음에 대한 민감도에서 알 수 있듯이, 고주파 영역의 수렴 속도를 억제하고 있으므로 학습 초기의 제어 출력이 I-ILC에 비해 현저한 차이를 나타낸다. 한편 고주파 영역에서 Q-ILC의 수렴 속도를 억제하기 위해 입력 변화에 대한 가중치를 증가시키면 모든 주파수에서 수렴 속도가 억제되므로 주파수에 따라 조율하는 기법이 필요하다[15].

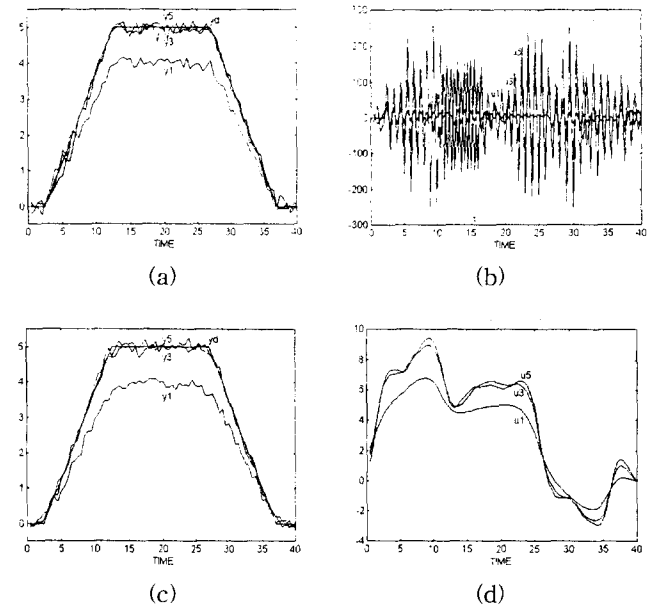


그림 3. 예제 1에서 측정 잡음이 있을 때 I-ILC와 Q-ILC의 추적 성능.

Fig. 3. Tracking performances of I-ILC and Q-ILC ($Q=I, R=0.02I$) in the example 1 with measurement noise.

- (a) Output trajectories by I-ILC.
- (b) Input trajectories by I-ILC.
- (c) Output trajectories by Q-ILC.
- (d) Input trajectories by Q-ILC.

그림 3에는 측정 잡음이 있을 경우에 대해 앞에서 설계한 두 제어기를 사용하여 전산 모사한 결과를 나타내었다. 이 때 사용한 측정 잡음은 평균이 영이고 분산이 0.01인 정규 분포를 갖는 백색 잡음이다. I-ILC는 공정 입력 쪽에서 변화가 심한 반면, Q-ILC는 입출력 신호는 변화가 거의 없으므로 Q-ILC가 잡음에 대해 민감하지 않음을 확인할 수 있다.

예제 2 : 모델 오차가 있는 2x2 공정

전달 함수가 (53)로 표현되고 공정 출력에 평균이 영이고 분산이 0.000025인 백색 잡음이 섞여있는 2x2 다변수 공정을

$$\begin{bmatrix} \frac{1.878}{(4s+1)} & \frac{-0.86}{(6s+1)} \\ \frac{0.98}{(8s+1)} & \frac{-1.1}{(5s+1)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

(54)의 공정으로 알고 구간 [0, 40]에서 0.5의 샘플링 간격으로 펄스 응답 행렬 G 를 만들어 I-ILC와 Q-ILC를 설계하였다. 이 때 Q-ILC의 조율 변수는 $R=I$ 와 $Q=I$ 로 하였다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1.8}{12s^2+8s+1} & \frac{-0.86}{18s^2+9s+1} \\ \frac{1}{15s^2+7s+1} & \frac{-2}{9s^2+6s+1} \end{bmatrix} \quad (54)$$

그림 4에 I-ILC의 추적 성능을 나타내었다. 두 번째 조업에서 입력력이 심하게 흔들리고 그림에는 나타내지 않았지만 조업이 반복되면서 입력력의 흔들림은 계속 커지게 된다. 설계된 I-ILC의 잡음에 대한 민감도를 (31)을 이용해서 계산해 보면 2000으로 잡음에 대해 민감함을 알 수 있다. 펄스 응답 행렬 G 를 구할 때와 마찬가지로 (53)의 모델에 대해서도 펄스 응답 행렬 \bar{G} 를 구하여 모델 오차가 있는 경우의 I-ILC의 수렴 조건을 계산해 보면 $I-\bar{G}G^{-1}$ 의 모든 고유치가 $-52\sim 1$ 의 범위에 존재하므로 수렴 조건을 만족하지 못함을 알 수 있다.

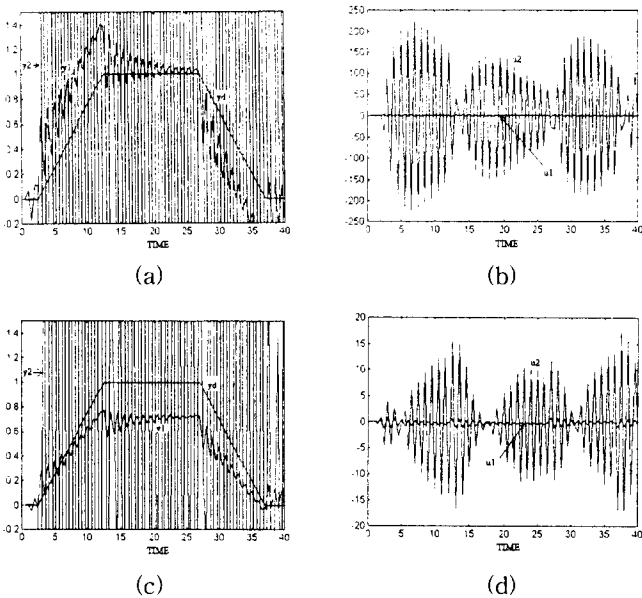


그림 4. 예제 2에서 I-ILC의 추적 성능.
Fig. 4. Tracking performance of I-ILC in the example 2.
(a) Output trajectories of y_1 . (b) Input trajectories of u_1 . (c) Output trajectories of y_2 . (d) Input trajectories of u_2 .

그림 5에 모델 추정기를 사용하지 않은 Q-ILC의 추적 성능을 나타내었다. (32)로 표현되는 Q-ILC의 잡음에 대한 민감도는 0.5이므로 I-ILC에 비해 잡음에 둔감함을 알 수 있다. 모델 오차가 없는 경우에는 $(I+R^{-1}G^TQG)^{-1}$ 의 모든 고유치가 0.13~1의 범위에 존재하므로 (22)의 수렴 조건을 만족하고, 모델 오차가 있는 경우에도 $I-\bar{G}(G^T$

$QG+R)^{-1}G^TQ$ 의 모든 고유치가 0.4~1의 범위 내에 존재하므로 역시 수렴 조건을 만족한다. 그러나 수렴 조건의 낮은 한계값이 0에 가까울수록 출력 오차가 빨리 영으로 수렴하므로, 모델 오차 때문에 출력 오차의 수렴 속도가 늦어짐을 알 수 있다.

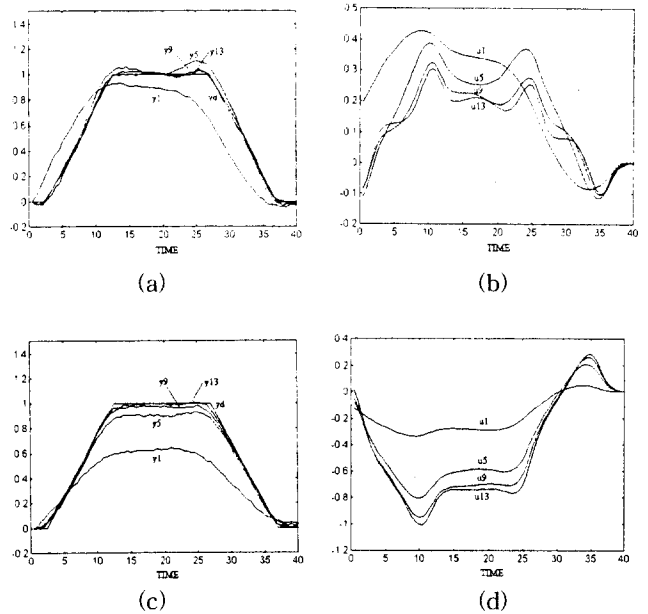


그림 5. 예제 2에서 추정기를 사용하지 않은 Q-ILC의 추적 성능.
Fig. 5. Tracking performance of Q-ILC(Q=I,R=I) in the example 2 without parameter estimation.
(a) Output trajectories of y_1 . (b) Input trajectories of u_1 . (c) Output trajectories of y_2 . (d) Input trajectories of u_2 .

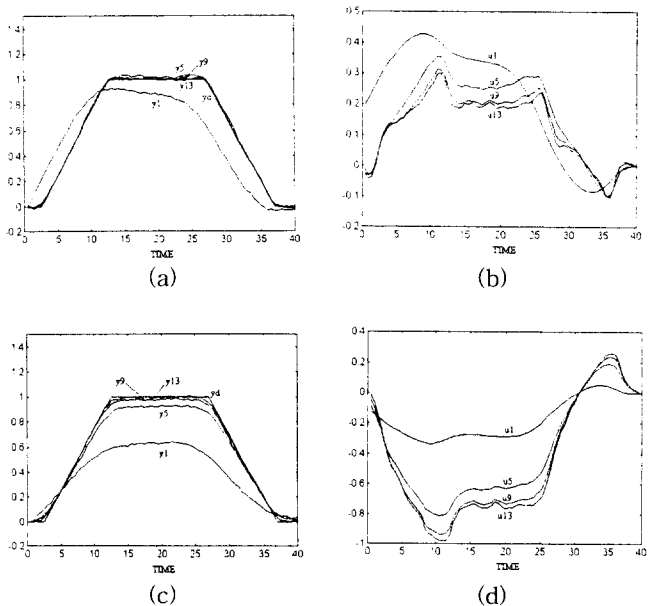


그림 6. 예제 2에서 추정기를 사용한 Q-ILC의 추적 성능.
Fig. 6. Tracking performance of Q-ILC(Q=I,R=I) in the example 2 with parameter estimation.
(a) Output trajectories of y_1 . (b) Input trajectories of u_1 . (c) Output trajectories of y_2 . (d) Input trajectories of u_2 .

(54)를 이용하여 만든 펄스 응답 행렬 G 를 초기 값으로 이용하여 6장의 모델 추정기를 적용한 후, 추정된 모델을 이용하여 Q-ILC를 만들어 (53)로 표현되는 공정에 적용한 결과를 그림 6에 나타내었다. 모델 추정기를 설계할 때 펄스 응답 벡터에는 평균이 영이고 분산이 0.00001인 잡음이 들어오는 것으로 가정하였으며, Q-ILC의 조율 변수는 모델 추정기를 사용하지 않은 경우와 마찬가지로 $R = I$ 와 $Q = I$ 로 하였다. 학습이 반복되면서 모델 추정기가 추정 한 모델이 펄스 응답 행렬 \bar{G} 로 수렴하면, $I - \bar{G}(\bar{G}^T Q \bar{G} + R)^{-1} \bar{G}^T Q$ 의 모든 고유치는 0.16~1의 범위 내에 존재하므로 수렴 조건을 만족함과 동시에 출력 오차의 수렴 속도도 향상됨을 알 수 있다.

Ⅶ. 결론

본 연구에서는 입출력 변수가 같지 않은 경우에도 적용 가능하고 잡음에 대한 민감도를 조절할 수 있는 이산 시간 대 모델 기반 다변수 학습 제어기를 제안하고 분석하였으며, 제안한 학습 제어기에 적합한 형태의 모델 추정기도 함께 제안하였다. 제안한 학습 제어기는 모델 오차가 없는 경우에는 항상 수렴하였으며, 이차 목적 함수의 가중치를 조율 변수로 사용하여 잡음에 대한 민감도, 수렴 속도, 그리고 모델 오차에 대한 강인성을 조절할 수 있었다.

제안한 학습 제어기에 대해서는 아직 기본적인 연구만 되어 있는 상태이므로 이를 실제 공정에 적용하기 위해서는 많은 연구들이 진행되어야 한다. 제안한 학습 제어기는 모델 기반 학습 제어기이므로 시변 선형 공정이나 비선형 공정으로 확장이 용이하며, 최적화 기법을 이용하면 제약 조건(constraints)이 있는 문제로의 확장이 가능하다. 한편 제안된 학습 제어기가 실용화되기 위해서는 강인성에 대한 보완 연구, 가중치 행렬의 조율과 수렴성과의 상관 관계 분석, 모델 예측 제어기와와의 결합, 그리고 계산량을 줄이기 위한 연구 등이 추가적으로 이루어져야 할 것으로 생각된다.

참고문헌

[1] R. Berber, "Control of batch reactors: a review", *Trans. IChemE*, vol. 74, Part A, pp. 3-20, 1996.
 [2] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust Process Control*, Prentice-Hall, NJ, 1989.
 [3] S. Arimoto, S. Kawamura and F. Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning", *J. Robot. Sys.*, vol. 1, pp. 123-140, 1984.
 [4] Z. Bien and K. M. Huh, "Higher-order iterative learning control algorithm", *IEE Proc. Part D*, vol. 136, no. 3, pp. 105-112, 1989.
 [5] P. Bondi, G. Casalino and L. Gambardella, "On the iterative learning control theory for robotic manipulators", *IEEE J. Robot. Autom.*, vol. 4, pp. 14-22, 1988.
 [6] S. R. Oh, Z. Bien and I. H. Suh, "An iterative learning control method with application for the robot manipulator", *IEEE J. Robot. Autom.*, vol. 4, pp. 508-514, 1988.
 [7] K. S. Lee, S. H. Bang and K. S. Chang, "Feed-back-assisted iterative learning control based on an inverse process model", *J. Process Control*, vol. 4, no. 2, pp. 77-89, 1994.

[8] S. Arimoto, T. Naniwa and H. Suzuki, "Robustness of P-type learning control with a forgetting factor for robotic motions", *Proc. ACC*, Honolulu, Hawaii, December, 1990.
 [9] S. S. Saab, W. G. Vogt and M. H. Mickle, "Robustness and convergence of P-type learning control", *Proc. ACC*, San Francisco, California, June, 1993.
 [10] T. Sogo and N. Adachi, "A gradient-type learning control algorithm for linear systems", *Proc. ASCC*, Tokyo, July, 1994.
 [11] K. M. Tao, R. L. Kosut and G. Aral, "Learning feedforward control", *Proc. of the ACC*, Baltimore, Maryland, June, 1994.
 [12] K. S. Lee and J. H. Lee, "Model-based refinement of input trajectories for batch and other transient processes", *'96 Korea-China Joint Workshop on PSE*, Seoul, May, 1996.
 [13] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, NJ, 1980.
 [14] A. Weinmann, *Uncertain Models and Robust Control*, Springer-Verlag, NY, 1991.
 [15] W. C. Kim and K. S. Lee, "Frequency dependent tuning of a quadratic criterion based iterative learning control algorithm", *Proc. ICASE*, Pohang, Korea, Oct., 1996.

부록

보조정리 1 : 공정 입출력변수의 수가 같고($n_y=n_u$) 입력과 출력이 선형독립관계로 표현될 때, (23)의 Q-ILC를 적용하면 입력변화 Δu_k 는 영으로 수렴하고 공정출력 y_k 은 수렴하며 제어 가능한 출력오차는 영으로 수렴한다.

증명 : (8)에 행과 열을 바꾸는 기본행렬조작(elementary operation)을 수행하면 언제나 다음과 같이 입출력변수의 영향관계를 구분할 수 있는 형태로 정리된다.

$$y' = G' u' \tag{A1}$$

$$\begin{bmatrix} y'_{uc} \\ y'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ G_c & O_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{uc} \\ u'_c \end{bmatrix} \tag{A2}$$

여기서

$$O_{11} \text{ 행의 갯수} = nr = \sum_{i=1}^{ny} dr^i \tag{A3}$$

$$dr^i = \min[d_{r1}, d_{r2}, \dots, d_{rinu}]$$

이며

$$O_{22} \text{ 열의 갯수} = nc = \sum_{i=1}^{nu} dc^i \tag{A4}$$

$$dc^i = \min[d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{nyi}]$$

d_{ij} 는 G_{ij} 의 시간지연을 나타내고 G_c 는 모든 고유치가 영이 아닌 정방(square)행렬이다. 또한 G 와 G' 는 (29)와 같은 유사변환관계로 표현된다.

(A2)에서 y'_{uc} 은 시간지연 때문에 공정입력에 영향을 받지 않는 공정출력을 가리키고 u'_{uc} 은 시간지연 때문에 공정출력에 영향을 미치지 못하는 공정입력을 가리킨다.

출력오차에 대한 가중치 Q 와 입력변화에 대한 가중치 R 에 (A1)에 가한 기본행렬조작을 행한 결과가 각각 (A5)와 (A6)과 같이 해당되는 크기를 갖는 블록대칭행렬로 표현될

때

$$Q' = \begin{bmatrix} Q'_1 & O \\ O & Q'_2 \end{bmatrix} \quad (A5)$$

$$R' = \begin{bmatrix} R'_1 & O \\ O & R'_2 \end{bmatrix} \quad (A6)$$

(A2)를 이용하면 (23), (26)과 (28)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} \Delta u'_c \\ \Delta u'_{uc} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} (G_c^T Q'_2 G_c + R'_1)^{-1} G_c^T Q'_2 e'_c \\ O \end{bmatrix}_k \quad (A7)$$

$$\begin{bmatrix} e'_{uc} \\ e'_c \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & (I + G_c R'^{-1}_1 G_c^T Q'_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_{uc} \\ e'_c \end{bmatrix}_k \quad (A8)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta u'_c \\ \Delta u'_{uc} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} (G_c^T Q'_2 G_c + R'_1)^{-1} R'_1 & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u'_c \\ \Delta u'_{uc} \end{bmatrix}_k \quad (A9)$$

(A8)에서 e'_c 가 수렴할 충분조건은 (A10)이 된다.

$$\rho_s((I + G_c R'^{-1}_1 G_c^T Q'_2)^{-1}) < 1 \quad (A10)$$

V 와 Λ 를 $G_c R'^{-1}_1 G_c^T Q'_2$ 의 고유벡터(eigen vector)와 고유치로 이루어진 행렬이라면

$$\begin{aligned} & (I + G_c R'^{-1}_1 G_c^T Q'_2)^{-1} \\ &= V(I + \Lambda)^{-1} V^{-1} \\ &= V \text{diag}\left(\frac{1}{1+\lambda_1}, \dots, \frac{1}{1+\lambda_n}\right) V^{-1} \end{aligned} \quad (A11)$$

로 정리된다. 여기서 diag 는 대각항(diagonal)에만 값이 있는 행렬을 나타낸다. 두 개의 Positive 대칭행렬의 곱으로 이루어진 행렬은 실수부분이 양인 고유치들을 갖는다[11].

$G_c R'^{-1}_1 G_c^T$ 와 Q'_2 는 모두 고유치가 양의 값을 갖는 실수이므로 (A11)의 모든 고유치는 (A12)을 만족하게 된다.

$$\left| \frac{1}{\lambda_i + 1} \right| < 1 \quad (A12)$$

따라서 e'_c 는 (A10)의 수렴조건을 만족하므로 회분조업이 반복되면서 영으로 수렴한다. (A9)의 $\Delta u'_c$ 가 수렴할 충분조건은

$$\begin{aligned} & \rho_s((G_c^T Q'_2 G_c + R'_1)^{-1} R'_1) \\ &= \rho_s((R'^{-1}_1 G_c^T Q'_2 G_c + I)^{-1}) < 1 \end{aligned} \quad (A13)$$

으로 표현된다. (A13)은 (A11)과 같은 형태이므로 같은 이유에서 $\Delta u'_c$ 는 영으로 수렴한다. (A7)에서 $\Delta u'_{uc} = 0$ 이므로 u'_{uc} 는 일정하며 (A8)에서 e'_{uc} 는 일정하다. ■

보조정리 2 : 공정 입력변수의 수가 출력변수의 수보다 많고($n_y < n_u$) 입력과 출력이 선형독립관계로 표시될 때, (26)의 Q-ILC를 적용하면 입력변화 Δu_k 는 영으로 수렴하고 공정출력 y_k 는 수렴하며 제어가능한 공정출력오차는 영으로 수렴한다.

증명 : 보조정리1에서와 마찬가지로 (8)에 행과 열을 바꾸는 기본행렬조작을 수행하면 (A2)로 만들 수 있다. 이때 G_c 의 크기가 $n_r \times n_c$ 이라고 하면 $n_r < n_c$ 이다. (23), (26)과 (28)은 마찬가지로 (A7), (A8), (A9)로 정리된다. (A8)에서 $G_c R'^{-1}_1 G_c^T$ 는 full rank를 가지므로 positive 행렬의 정의에 의해 고유치가 모두 양의 값을 가지며 Q'_2 는 positive이므로 제어가능한 출력오차 e'_c 는 영으로 수렴한다. e'_c 가 영으로 수렴하므로 (A7)에 의해 $\Delta u'_c$ 는 영으로 수렴한다. ■

보조정리 3 : 공정 출력변수의 수가 입력변수의 수보다 많고($n_y > n_u$) 입력과 출력이 선형독립관계로 표시될 때, (26)의 Q-ILC를 적용하면 제어출력 Δu_k 는 영으로 수렴하고 출력오차 e_k 는 $e^T Q e$ 를 최소로 만드는 값으로 수렴한다.

증명 : 보조정리1에서와 마찬가지로 (8)에 행과 열을 바꾸는 기본행렬조작을 수행하면 (A2)로 만들 수 있다. 이때 G_c 의 크기가 $n_r \times n_c$ 이라고 하면 $n_r > n_c$ 이다. (23), (26)과 (28)은 마찬가지로 (A7), (A8), (A9)으로 정리된다. (A9)에서 $\Delta u'_c$ 의 관계식을 다시 쓰면 $\Delta u'_{c,k+1} = (R'^{-1}_1 G_c^T Q'_2 G_c + I)^{-1} \Delta u'_{c,k}$ 가 된다. 여기서 $G_c^T Q'_2 G_c$ 는 full rank를 가지므로 고유치가 모두 양의 값을 가지며 R'^{-1}_1 는 positive 행렬이므로 $\Delta u'_c$ 는 영으로 수렴한다. (15)과 (22)에 의해 $\Delta u'$ 가 영이면 $e^T Q e$ 를 최소로 만드는 값에서 e' 는 일정하게 된다. ■



이 광 순

1955년생. 1977년 서울대학교 화학공학과 졸업(공학사). 1979년 한국과학기술원 화학공학과 졸업(공학석사). 1983년 한국과학기술원 화학공학과 졸업(공학박사, 공정제어전공). 1983년 서강대학교 화학공학과에 임용되어 현재 정교수. 1986년 캐나다 Univ. of Waterloo 방문교수. 1995년 미국 Auburn Univ. 방문교수. 1991년 ~ 현재 포항공과대학교 부설 공정산업의 지능자동화센터(ARC) 연구원으로 회분식공정 자동화 분야 담당. 주요 관심 분야는 batch, repetitive, transient 공정의 학습제어, MPC, 모델 인식 등임.



이 재 형

1965년생. 1986년 Univ. of Washington 화학공학과 졸업(공학사). 1991년 California Institute of Technology 화학공학과 졸업(공학박사). 1991년 ~ 현재 Auburn Univ. 부교수. Manfred Morari, Carlos Garcia, David Prett 등과 함께 "Model Predictive Control"의 공동저자. (97년 출판예정) 1993년 National Science Foundation의 Young Investigator상 수상. 주요 관심 분야는 MPC, 비선형 상태 추정과 다변수 모델 인식, 추계적 제어, 제어 구조 선택 등임.

**김 원 철**

1963년생. 1988년 서강대학교 화학공학과 졸업 (공학사). 1990년 서강대학교 화학공학과 졸업 (공학석사). 1990 ~ 1993년 태평양화학(주) 시스템 엔지니어링 사업부 근무. 1993년 ~ 현재 서강대학교 화학공학과 박사과정. 주요

관심 분야는 학습제어, MPC 등임.