

## 경계 요소법을 이용한 2차원 비저항 모델링 Two-dimensional Resistivity Modeling Using Boundary Elements Method

김 형 수 (Kim, Hyoung-Soo)

한국수자원공사 수자원연구소

### 요약 / ABSTRACT

경계요소법을 이용한 2차원 전기비저항 모델링을 위한 이론적 전개와 수치계산 기술이 주어졌다. 균질 지하모델과 층상구조 지하모델에 대한 점전류전원에 대한 전위분포가 경계요소법을 이용하여 계산되었으며, 그 결과는 동일 모델에 대해서 수행된 유한차분법, 유한요소법의 수치 결과와 함께 비교 연구되었다. 경계요소법을 사용한 2차원 전기모델링은 저장용량, 계산속도 및 정확도에서 유한요소법이나 유한차분법에 비해 효율적임이 입증되었다.

The theory and numerical technique using boundary elements method (BEM) are given to solve 2-dimensional resistivity problems. Potential distributions from homogeneous resistivity model and layered model are calculated by using BEM for a point source of current injection. The potential distributions of BEM are compared with those of finite difference method (FDM) and finite elements method (FEM). Among the three numerical methods to solve 2-dimensional resistivity problem, it is proved that BEM is more efficient tool than FDM and FEM in consideration of computing storage and time as well as the accuracy of solutions.

### 서 론

전기 탐사가 지구물리탐사의 일환으로 사용되기 시작한 이후, 1차원 층상 구조 및 2차원 혹은 3차원 전기 탐사 모델링 연구가 과거 수십년동안 꾸준히 수행되어 왔다. 특히, 2차원 구조에 대한 연구는 수치 계산적인 측면과 실제 자료 해석 측면에서 모두 유용하게 적용될 수 있어 1970년대 이후에 많은

연구가 수행되어 왔다. 2차원 전기 탐사 모델링의 순산 (forward calculation)은 2차원 편미분 방정식으로 표현되는 경계 문제를 수치적으로 해결하는 것이다. 이러한 수치 해석을 위한 대표적인 방법으로는 유한차분법 (Finite Difference Method)과 유한요소법 (Finite Element Method)이 있으며, 실제로 이 방법들을 이용한 2차원 전기비저항구조에 대한 순산 및 역산 (inversion)이 활발히 연구되어 왔

경계요소법 (Boundary Element Method) 역시, 유한차분법이나 유한요소법과 같이 경계 문제를 수치적으로 풀어내기 위한 하나의 방법이다. 경계요소법은 고전적인 적분방정식과 유한 요소법으로부터 유래되었다. 이 방법은 특히 수치 계산을 위한 저장 공간 및 무한치 처리 측면에서 기존의 수치 해석 방법보다 효과적인 것으로 알려져 있으며, 현재 많은 경계치 문제 해결에 성공적으로 응용되고 있다 (Walker and Brebbia, 1980).

본 연구는 경계요소법을 이용하여, 2차원 구조를 갖는 지하모델에 대한 점전류전원의 전위분포를 계산하는 방법을 소개하며, 이 경계요소법을 이용한 계산치와 기존의 유한차분법 및 유한요소법을 이용한 계산치를 상호 비교함으로써 경계요소법의 효용성을 검토하는데 그 목적이 있다.

## 경계요소법을 이용한 전위 계산법

### 기본 지배 방정식 및 경계 조건

지하 구조를 주향방향 (본 연구에서는 y축 방향) 에는 독립적인 비저항 분포로 가정한 경우, 점전류로부터 야기되는 전위분포를 계산하기 위해서 사용되는 기본적인 지배 방정식은 (1) 식과 같다.

$$-\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \phi(x, y, z)] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta(x-x_s) \delta(y-y_s) \delta(z-z_s) \quad (1)$$

여기에서  $\sigma(x, z)$ 는 전기전도도,  $\phi(x, y, z)$ 는 전기전위,  $\rho$ 는 체전류밀도,  $\delta$ 는 델타함수이다.

이 경우 전류 전원이 점전원이므로, 좌변의 전기전도도 분포가 주향방향 (y축방향)에 독립적일지라도 전위분포  $\phi$ 는 주향방향에 종속되므로, 이러한 3차원 문제를 2차원 문제로 환원하기 위해서는 y축에 대해 푸리에 변환을 수행한다. 푸리에 변환을 위해 사용되는 식은 (2)식과 같다(Dey and Morrison, 1979).

$$F(x, k_y, z) = \int_0^{\infty} f(x, y, z) \cos(k_y y) dy$$

$$f(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(x, k_y, z) \cos(k_y y) dk_y \quad (2)$$

전위 분포의 지배 방정식 (1)을 (2)식을 이용해,  $k_y$  영역의 전위 분포 함수  $\phi(x, k_y, z)$ 에 대한 방정식으로 변환하면 (3) 식과 같이 표현되며, .

$$-\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \phi(x, k_y, z)] + k_y^2 \sigma(x, z) \phi(x, k_y, z) = \frac{I}{2} \delta(x-x_s) \delta(z-z_s) \quad (3)$$

여기에서  $I$ 는 전류 전극에서 공급되는 전류의 양이다. 결국, 공간 영역에서의 전위분포  $\phi$ 를 구하기 위해서는  $k_y$  영역에서의 전위분포  $\phi$ 를 구하고 이를 (2) 식을 이용해, 푸리에 역변환시켜 그 값을 구하게 된다.

Fig. 1은 경계 조건과 경계요소법을 이용한 기본 지배방정식을 설명하기 위해 설정된 2차원 지하 모형을 보여준다. 이 모형의 경우, 지하 구조는  $\sigma_1$ 의 전기전도도를 갖는  $\Omega_1$ 영역과  $\sigma_2$ 의 전기전도도를 갖는  $\Omega_2$ 영역으로 나누어지며, 지하의 경계는 크게 지표면 (Fig. 1에서의  $\Gamma_1$ ), 다른 전기 전도도를 갖는 영역사이의 경계면 (위 모형의 경우, 경계면  $\Gamma_3$ ), 그리고 수치 계산 과정에서 계산 영역을 무한히 확장시킬 수 없기 때문에 나타나게 되는, 수치 계산을 위한 유한 경계면 ( $\Gamma_2 + \Gamma_5 + \Gamma_4$ )의 세가지 경계로 나누어진다.

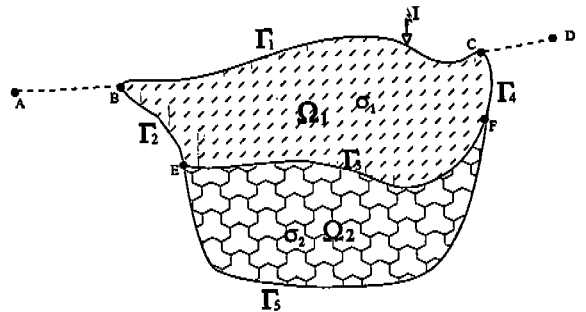


Fig. 1. Two-dimensional model consisting of two subregion for boundary elements method.

본 연구에서,  $k_y$  영역에서의 전위분포  $\phi$ 를 구하기 위해 사용된 이들 경계에서의 물리적인 경계 조건은 Dey와 Morrison (1979)의 연구에서 사용된 경계조건을 사용하였으며, 그 조건들은 다음과 같다.

경계조건 i : 지표면에서는 전류 전극이 놓여진 부위를 제외하고는 지표면에 대한 수직 성분 전류는 없다.

즉, 경계  $\Gamma_1$ 에서

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} = 0 \quad (\text{전류전극점제외}) \quad (4)$$

여기에서  $\phi_1$ 은 영역  $\Omega_1$ 에서의 전위를,  $n_1$ 은  $\Omega_1$  영역의 외부를 향하는 경계의 단위 수직 성분 방향을 지시한다.

경계조건 ii : 서로 다른 전기 전도도를 갖는 영역간의 경계에서  $\phi$ 는 연속이며, 그 경계에서의 전류밀도의 수직 성분은 연속이다.

즉, 경계  $\Gamma_3$ 에서

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (5)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} = -\sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} \quad (6)$$

여기에서 (6)식의 좌우변의 부호가 다른 이유는  $n_1$ 과  $n_2$ 의 방향이 경계  $\Gamma_3$ 에서 반대이기 때문이다.

경계조건 iii : 지표면을 제외한 외부 경계면이 (본 모형의 경우  $\Gamma_2 + \Gamma_5 + \Gamma_4$ ) 전류 전극으로부터 충분한 거리를 가지고 있을 경우 이들 경계에서는 다음 (7)식과 같은 근사식이 성립한다.

$$\Gamma_2 \text{ 와 } \Gamma_4 \text{에서, } \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} + \alpha \phi_1 \cos(\theta) = 0$$

$\Gamma_5$ 에서,

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} + \alpha \phi_2 \cos(\theta) = 0 \quad (7)$$

여기에서  $\alpha = \frac{k_y K_1(|\vec{r}| k_y)}{K_0(|\vec{r}| k_y)}$  이며,  $K_0$ 과  $K_1$  0차와 1차 modified

Bessel 함수이다. 또한  $\vec{r}$ 는 전류전극에서 경계까지의 거리벡터,  $\theta$ 는  $\vec{r}$ 과  $\hat{n}$ 이 이루는 각도이다.

보통 이들 경계에서는 Dirichlet 조건 혹은 Neumann 조건을 가정하기도 하지만 (7)식과 같은 혼합 경계 조건(mixed boundary condition)을 사용하는 것이 과소진단(undershoot) 혹은 과다진단(overshoot) 현상을 최소화하는 것으로 알려져 있다 (Dey and Morrison, 1979).

### 가중잔차 방정식 및 요소 분할

경계요소법을 이용하여 미분방정식 (3)을 풀기 위해서는 가중잔차 방정식(weighted residual equation)의 형태로 변환시키는 과정이 필요하다. 이 가중잔차 방정식으로의 유도는 Appendix 1.에 상세히 서술되어 있다. 결국 (3)식을 가중잔차 방정식의 형태로 표현하면,  $\Omega_1$ 영역내에서 (8)식과 같이 표현된다.

$$-\frac{1}{2} \phi_{1,i} + \frac{I}{2\sigma_1} w(x_s, z_s; x_i, z_i) = \int_{\Gamma^1} \phi_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma^1 - \int_{\Gamma^1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma^1 \quad (8)$$

여기에서  $\Gamma^1$ 은 Fig. 1에서  $\Omega_1$ 영역을 둘러싸고 있는  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ 경계를 표시하며,  $(x_s, z_s)$ 는 전류전극의 위치를,  $(x_i, z_i)$ 는  $\phi_1$ 가 계산되는 위치를 나타낸다. 또한  $w(\vec{r}_1; \vec{r}_2)$ 는 가중함수(weight function)로  $\vec{r}_2$ 에 가상의 delta source가 놓여진 경우  $\vec{r}_1$ 에서 나타나는 반응(response)인 Green 함수이다. 이 가중 함수  $w(\vec{r}_1; \vec{r}_2)$ 과  $\frac{\partial w}{\partial n}$ 의 실제 형태는 Appendix 1.에 주어져 있다. 마찬가지로,  $\Omega_2$ 영역에서도  $\Omega_1$ 영역과 같이 가중잔차 방정식으로 (3)식을 변환하면 (9)식과 같이 표현된다.

$$-\frac{1}{2} \phi_{2,i} + \frac{I}{2\sigma_2} w(x_s, z_s; x_i, z_i) = \int_{\Gamma^2} \phi_2 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma^2 - \int_{\Gamma^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} w d\Gamma^2 \quad (9)$$

여기에서  $\Gamma^2$ 은 그림 1에서  $\Omega_2$  영역을 둘러싸고 있는  $\Gamma_3 + \Gamma_5$  경계를 표시한다. Fig. 1과 같이 지하의 비저항영역이 두 영역으로 나누어지는 경우는 (8)과 (9) 식으로 전체 영역에 대한 미분방정식이 형성된다. 그러나 일반적인 전기 탐사의 경우는, 전류전극이 지표에 ( $\Omega_1$  영역) 존재하므로 (9)식 좌변의 제 2 항의 값을 갖지 않는다. 결국 가중 잔차 형태로 표현된 (8)과 (9)식을, 경계조건을 이용하여 풀게 된다.

가중 잔차 (weight residual) 형태로 변형된 미분방정식과 경계 조건들을 사용하여 외부 경계에서의  $\phi$ 의 값 및 내부 물질 경계에서의 (본 논문에서는  $\Gamma_3$  경계)  $\phi$  및  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 의 값을 구하기 위한 행렬식을 유도하기 위해서, 어떻게 경계요소를 분할하고 경계점을 선정하는지 알아보자.

Fig. 2는 본 연구에서 사용하게 될 경계요소 (boundary elements)를 보여준다. Fig. 2는 기본적으로 Fig. 1에서 주어진 비저항모델의 형태로 두 개의 비저항치 영역과 이 두 영역을 구분하는 경계면  $\Gamma_3$ , 지표면에 해당되는  $\Gamma_1$  그리고 비저항모델을 구성하는 2차원 외곽범위 경계면  $\Gamma_2 + \Gamma_5 + \Gamma_4$ 로 구성되어진다. Fig. 2에 표시된 일련번호는 경계요소를 구분하는 경계점이다. 이 경계점은  $\Gamma_2$ 에 1번부터 K번까지 모두 K개 있으며, 이들 경계점으로 이루어지는  $\Gamma_2$ 에서의 경계요소는 K-1개로 구성된다. 즉 1번 경계점과 2번 경계점으로 이루어진 경계요소를 1번 요소로, 2번 경계점과 3번 경계점으로 이루어진 요소를 2번 요소로, 이런 식으로 요소에 번호를 매겨나가면 K-1번 경계점과 K번 경계점으로 이루어진 요소가 K-1번 요소로 지정된다. 마찬가지로  $\Gamma_5$ 경계에는 K번 경계점부터 L번 경계점까지 모두 L-K+1개의 경계점이 존재하며, K번 경계점과 K+1번 경계점으로 이루어진 K번 요소부터, L-1번 경계점과 L번 경계점으로 이루어진 L-1번 요소까지 모두 L-K개의 요소를 갖는다. 계속해서 이어지는  $\Gamma_4$ 와  $\Gamma_1$ 에는 각각 L번 요소부터 M-1번 요소까지 M-L개의 요소와 M번 요소부터 N번 요소까지의 N-M+1개의 요소를 각각 갖는다. 여기

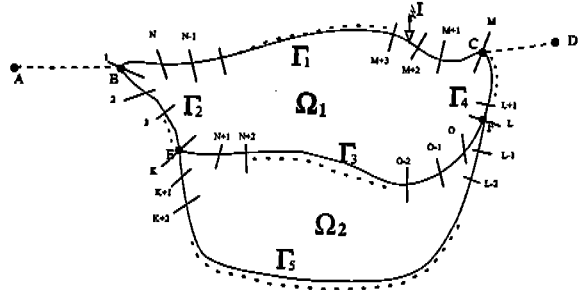


Fig. 2. The nodes and boundary elements for two-dimensional resistivity modeling. Serial numbers represent the nodal points.

에서 N번 요소는 N번 경계점과 1번 경계점(Fig. 2의 B점)으로 이루어진 요소이다. 결국  $\Gamma_2 + \Gamma_5 + \Gamma_4 + \Gamma_1$  즉, 외곽범위경계면과 지표 경계면에는 총 N개의 경계요소를 갖게 된다. 비저항영역의 내부 경계면인  $\Gamma_3$ 의 경우는 Fig. 2의 E점 (K번 경계점)부터 시작하여 F점 (L번 경계점) 사이에 N+1번부터 O번까지 O-N+2개의 경계점 (E 및 F점 포함)을 갖으며, N+1번 요소가 E점 (K 경계점)과 N+1번 경계점으로 이루어진 요소이며, N+1번 경계점과 N+2번 경계점으로 이루어진 요소가 N+2번 요소이다. 이러한 요소는 마지막 O번 경계점과 F점(L번 경계점)으로 이루어진 O+1번 요소까지 형성된다. 그러므로  $\Gamma_3$ 에 놓여지는 요소의 수는 O-N+1개 요소이다. 결국 Fig. 2의 비저항 모델의 경우는 총 O개의 경계점과 O+1개의 경계요소를 갖게 된다. 경계요소법을 이용하여 경계치 문제를 풀기 위한 경계요소는 요소내에서 우리가 구하고자 하는  $\phi$ 값들의 결정 방식에 따라 상수 요소 (constant element), 선형 요소(linear element), 2차식 요소 (quadratic element)로 나눌 수 있다(Brebbia and Dominguez, 1989). 본 연구에서는 요소내의  $\phi$ 값 및  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 의 값이 요소내에서는 일정하다고 가정하여 문제를 해결하는 상수 요소법을 사용하기로 한다.

### 행렬식 유도 및 행렬 생성

전질의 (8)식은 영역  $\Omega_1$ 에 대한 가중잔차 방정

식이다. 이제 이 영역을 둘러싸고 있는  $\Gamma^1$ 은  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ 이므로 이를 각각 나누어, (8)식을 정리하면 다음 (10)식을 얻게 된다.

$$-\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{I}{2\sigma_1} w(x_s, z_s; x_i, z_i) = \left[ \int_{\Gamma_1} \phi_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \phi_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \phi_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \phi_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \right] - \left[ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma \right] \quad (10)$$

이중,  $\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma$ 의 값은 경계조건 i에 의해 값이 없으며,  $\int_{\Gamma_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma$ 과  $\int_{\Gamma_4} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} w d\Gamma$ 의  $\frac{\partial \phi_1}{\partial n}$ 의 값은 경계조건 iii에 의해  $-\alpha \phi_1 \cos(\theta)$ 의 값을 갖는다. (10) 식을 간단히 하기 위하여  $\frac{\partial \phi_1}{\partial n}$ 를  $q_1$ 으로 표기하고 경계조건을 사용하여 정리하면 (11) 식을 얻게 된다.

$$-\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{I}{2\sigma_1} w(x_s, z_s; x_i, z_i) = \int_{\Gamma_1} \phi_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \phi_1 \left( \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha \cos(\theta) \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \phi_1 \frac{\partial w}{\partial n} - q_1 w d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \phi_1 \left( \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha \cos(\theta) \right) d\Gamma \quad (11)$$

같은 방법으로 (9) 식도  $\Omega_2$  영역을 둘러싸고 있는  $\Gamma^2$  ( $\Gamma_3 + \Gamma_5$ )에 대해 각 경계별로 나누어 정리하면 (12) 식과 같다.

$$-\frac{1}{2} \phi_2 + \frac{I}{2\sigma_2} w(x_s, z_s; x_i, z_i) = \int_{\Gamma_3} \phi_2 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_5} \phi_2 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma_5} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} w d\Gamma \quad (12)$$

(12)식 좌변의 제 2 항은  $\Omega_2$  영역내에 전류전원이 존재하지 않으므로 그 값이 존재하지 않으며, 우변의  $\Gamma_5$ 에서의  $\frac{\partial \phi_2}{\partial n}$ 의 값은 경계 조건 iii에 의해  $-\alpha \phi_2 \cos(\theta)$ 이다.  $\Gamma_3$ 에서의  $\frac{\partial \phi_2}{\partial n}$ 의 값은 경계 조건 ii에 의해  $-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1$ 의 값을 가지므로 (12) 식은 (13) 식으로 정리된다.

$$-\frac{1}{2} \phi_2 = \int_{\Gamma_3} \phi_2 \left( \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha \cos(\theta) \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_5} \left( \phi_2 \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1 w \right) d\Gamma \quad (13)$$

행렬식을 구성하기 위해 식 (11)과 (13)을 경계요소별로 나누어 처리하기 위해서는 우선, 주어진 경계에 대한 선적분을 경계요소별 이산 합으로 표시하여야 한다. 즉,

$$\int_{\Gamma_i} d\Gamma = \sum_k \int_{\Gamma_{ik}} d\Gamma \quad (\text{여기에서 } \Gamma_i = \sum_k \Gamma_{ik} \text{이며}$$

$k$ 는 경계요소의 일련번호임)

으로 표시된다.

이제, (11)식을 경계 요소별 이산합으로 표현하면

$$-\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{I}{2\sigma_1} w(x_s, z_s; x_i, z_i) = \sum_{k=1}^{K-1} \phi_{1,k} \int_{\Gamma_{2k}} \left( \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha \cos(\theta) \right) d\Gamma + \sum_{k=L}^{M-1} \phi_{1,k} \int_{\Gamma_{4k}} \left( \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha \cos(\theta) \right) d\Gamma + \sum_{k=N+1}^{Q+1} \left[ \phi_{1,k} \int_{\Gamma_{3k}} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - q_{1,k} \int_{\Gamma_{3k}} w d\Gamma \right] + \sum_{k=M}^N \phi_{1,k} \int_{\Gamma_{4k}} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (14)$$

으로 표현된다. 여기에서  $\phi$ 와  $q$ 는 경계요소내에서 상수값을 가지므로, 적분식 외부에 쓸 수 있다. (14)식에서  $i$ 는 1부터  $K-1$ ,  $L$ 부터  $M-1$ ,  $M$ 부터  $N$ ,  $N+1$ 부터  $O+1$ 까지의 값을 각각의 경계  $\Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_1, \Gamma_3$ 에서 갖는다. 결국 (14)식이  $i$ 값이 변화되어 나가면서, 총  $O+K+1-L$ 개의 식을 구성하게 된다.

유사한 방법으로 (13)식을 경계 요소별 이산합으로 표현하면 (15)식과 같다.

$$-\frac{1}{2} \phi_2 = \sum_{k=N+1}^{Q+1} \phi_{2,i} \int_{\Gamma_{3i}} \left( \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha \cos(\theta) \right) d\Gamma + \sum_{k=K}^{L-1} \left[ \phi_{2,i} \int_{\Gamma_{5i}} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_{1,i} \int_{\Gamma_{5i}} w d\Gamma \right] \quad (15)$$

(15) 식에서  $i$ 는  $N+1$ 부터  $O+1$ ,  $K$ 부터  $L-1$ 까지의 값을 각각의 경계  $\Gamma_3, \Gamma_5$ 에서 갖는다. (15) 식도 (14) 식과 마찬가지로  $i$ 값을 변화시켜 나가면  $O+L-N+1-K$ 의 식을 얻게 된다. 결국 (14)와 (15) 식을 통해 얻게 되는 총 방정식의 수는  $2(O+1)-N$ 개이다. 실제, 우리가 구해야 하는 미지수의 갯수는

총 경계요소에서의 O+1개의  $\phi$ 와 경계  $\Gamma_3$ 에서의  $\frac{\partial \phi}{\partial n_1}$  값인 O+1-N개의  $q_1$ 로 총 2(O+1)-N개이다. 이 미지수들은 결국 (14)와 (15) 식을 통해 얻게 되는 총 2(O+1)-N개의 방정식을 통해 구할 수 있게 된다. (14)와 (15) 식을 행렬의 형태로 정리하게 되면 (16)식 처럼 표현된다. 이때 행렬식은 이식을 효과적으로 풀어낼 수 있도록 0이 아닌 값들이 주로 행렬의 대각선에 놓이도록 조정하여 주어진다.

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & B_2^1 & B_4^1 & A_3^1 & -C_3^1 & 0_5^1 & \phi_{r_1} \\ A_1^2 & B_2^2 & B_4^2 & A_3^2 & -C_3^2 & 0_5^2 & \phi_{r_2} \\ A_1^3 & B_2^3 & B_4^3 & A_3^3 & -C_3^3 & 0_5^3 & \phi_{r_3} \\ A_1^4 & B_2^4 & B_4^4 & A_3^4 & -C_3^4 & 0_5^4 & \phi_{r_4} \\ A_1^5 & B_2^5 & B_4^5 & A_3^5 & -C_3^5 & 0_5^5 & \phi_{r_5} \\ 0_1^3 & 0_2^3 & 0_3^3 & D_3^3 & -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} C_3^3 & E_5^3 & q_{r_3} \\ 0_1^5 & 0_2^5 & 0_3^5 & D_3^5 & -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} C_3^5 & E_5^5 & \phi_{r_5} \end{bmatrix} = \frac{I}{2\sigma_1} \begin{bmatrix} w_{r_1} \\ w_{r_2} \\ w_{r_3} \\ w_{r_4} \\ w_{r_5} \\ 0_{r_1} \\ 0_{r_5} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기에서  $A_i^j, B_i^j, C_i^j, D_i^j, E_i^j, 0_i^j$  각 행렬들의 성분치 및 벡터  $\phi, q, w$ 의 성분치는 Appendix 2에 구체적으로 설명되어 있다.

Table 1. Values of wavenumber which are used in two-dimensional resistivity modelling.

$k_y(1)$	0.00001	$k_y(13)$	0.2
$k_y(2)$	0.00005	$k_y(14)$	0.3
$k_y(3)$	0.0001	$k_y(15)$	0.5
$k_y(4)$	0.0005	$k_y(16)$	0.64
$k_y(5)$	0.001	$k_y(17)$	0.8
$k_y(6)$	0.005	$k_y(18)$	1.0
$k_y(7)$	0.01	$k_y(19)$	1.28
$k_y(8)$	0.02	$k_y(20)$	2.0
$k_y(9)$	0.04	$k_y(21)$	3.5
$k_y(10)$	0.08	$k_y(22)$	4.5
$k_y(11)$	0.12	$k_y(23)$	6.0
$k_y(12)$	0.16	$k_y(24)$	9.0

결국 행렬식 (16)을 풀어내면 외부 및 내부 경계에서의  $\phi$ 값 및 내부경계의  $q$ 값을 구할 수 있다. 그러나 여기에서 구하게 되는  $\phi$ 는  $k_y$  영역에서의 값이므로 이 것을 실제 공간영역으로 변환하는 과정이 필요하다. 영역 변환을 위해서는 (2) 식이 이용되며, 실제 본 연구의 계산에서는 24개의  $k_y$  값이 사용되었으며, 그 값은 Table 1에 주어진다.

### 내부에서의 전위 및 그 미분치 계산

Appendix 1의 참조하면 가중함수  $w$ 을 사용한 가중잔차 방정식은 (17) 식과 같다.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) \phi + \lambda^2 \phi w - f w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad (17)$$

이때,  $\nabla^2 w + \lambda^2 w + \Delta_i = 0$ 을 만족하는 함수  $w$ 를 가중함수로 사용하고 이 식에  $\phi$ 를 곱하고 이를  $\Omega$  영역에 대해서 적분하게 되면,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 w) \phi \, d\Omega &= \int_{\Omega} (-\lambda^2 w - \Delta_i) \phi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (-\lambda^2 w) \phi \, d\Omega - \int_{\Omega} (\Delta_i) \phi \, d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

로 표현된다. (18) 식의 우변의 두번째 항은 가상의 source가 경계에 있는 경우는  $-\frac{1}{2} \phi_i$ 로, 내부에 포함되는 경우는  $-\phi_i$ 로 표현된다. 그러나 우리가 여기에서 관심을 갖고 구하고자 하는 전위값은 내부에서의 전위값이므로 이 값은  $-\phi_i$ 을 갖게 된다. 그러므로 (17) 식은 다음과 같이 정리된다.

$$-\phi_i - \int_{\Omega} f w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad (19)$$

이때  $f$ 는  $-\frac{I}{2\sigma} \delta(x-x_s) \delta(z-z_s)$ 이므로 적분 이 수행되는 영역  $\Omega$ 에 전류전극이 있는 경우, (19)식의 두번째 항  $-\int_{\Omega} f w \, d\Omega$ 의 값은  $\frac{I}{2\sigma} w(x_s, z_s; x_i, z_i)$ 이며, 만약 적분 영역  $\Omega$ 에 전류전극이 없는 경우는 그 값이 없다. 결국, 이 두 가지 경우에 대해서 (19) 식을 정리하면 다음 (20) 및 (21) 식으로 정리할 수 있다.

적분 영역  $\Omega$ 에 전류전극이 있는 경우 영역내의 전위치

$$\phi_i = \frac{I}{2\sigma} w(x_s, z_s; x_i, z_i) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (20)$$

적분 영역  $\Omega$ 에 전류전극이 없는 경우 영역내의 전위치

$$\phi_i = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (21)$$

결국, 경계에서의 전위값과 그 미분치를 알게 되면 (20) 또는 (21) 식을 사용하여 영역 내에서의 전위분포를 구할 수 있음을 알 수 있다. 마찬가지로 영역내부에서의 전위의 미분치  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  및  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ 는 다음 (22) 또는 (23)식을 통해서 구할 수 있다.

적분 영역  $\Omega$ 에 전류전극이 있는 경우 영역내의 전위미분치

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} &= \frac{I}{2\sigma} \frac{\partial w(x_s, z_s; x_i, z_i)}{\partial x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial x} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} &= \frac{I}{2\sigma} \frac{\partial w(x_s, z_s; x_i, z_i)}{\partial z} \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial z} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (22)$$

적분 영역  $\Omega$ 에 전류전극이 없는 경우 영역내의 전위미분치

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial z} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

그러나 이러한 물질 내부에서의 전위치의 측정은 실제 전기 탐사에서는 일반적으로 수행되지 않으므로 특별한 경우를 제외하고는 계산을 수행할 필요가 없다.

### 2차원 모델링 수치 계산

경계요소법을 사용한 2차원 전기탐사 모델링의 결과를 검증하기 위하여 세 가지 모형에 대한 수치

계산이 수행되었다. 수치모형으로 사용된 모형은 기본적으로 직사각형의 단순 형태로  $x$ 축으로 100개의 경계요소와  $z$ 축으로 100개의 경계요소를 가지고 있는 형태로 경계요소의 크기는  $x$ 축의 경우 외곽의 요소로 갈수록 점차로 커지는 형태로,  $z$ 축의 경우 심부의 요소로 갈수록 점차로 커지는 형태로 고안되었다. 이때 모델의 최소 기본 경계요소는  $\Delta x, \Delta z$  모두 1m로 구성되어 있다.

첫 번째 모델(Model 1)은 균질 모델로서 전류전극에서 흘러주는 전류와 매질의 비저항치에 따라 변화하는 전위값을 경계요소법을 이용하여 수치적으로 계산하여 실제 해석해와 비교하였다. 계산 결과는 Fig. 3에 보여지며, 전류치 및 비저항치 변화에 따른 수치해와 해석해의 오차값은 아래 (24) 식을 이용한 평균제곱근 편차식(RMS)과 (25)식을 이용한 로그치 편차식(LDEV) 두가지 방법을 이용해 계산되었다.

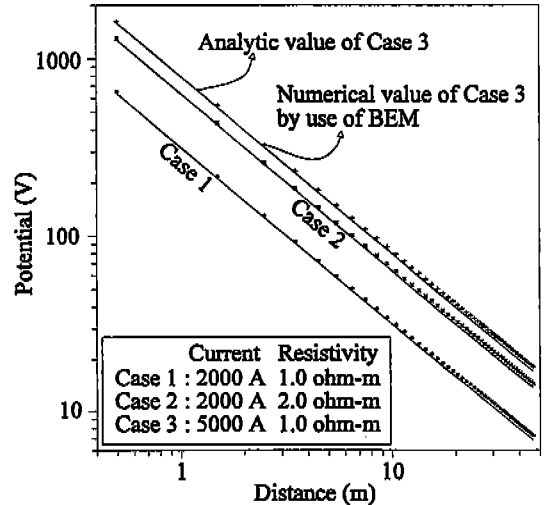


Fig. 3. Electric potential results of BEM resistivity modelling for homogeneous model.

$$RMS(\%) = 100 \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left[ \frac{V_i^m - V_i^a}{V_i^m} \right]^2}{N}} \quad (24)$$

$$LDEV(\%) = 100 \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [\log_{10}(V_i^m / V_i^a)]^2}{N}} \quad (25)$$

여기에서  $V^m$ 는 수치해이며,  $V^a$ 는 해석해이다. 균질 모델의 경우, 경계요소법을 사용하여 구한 해석해에 대한 수치해의 평균제곱근 편차율(RMS)은 5.3%, 로그치 편차율(LDEV)은 2.3%였다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 균질 모델에 대해서 수행된 경계요소법을 이용한 계산은 실제 해석해와 거의 일치된 결과를 보여주며, 이 전위치를 결보기비저항치로 환산할 경우는 해석해와 수치해가 거의 일치한다. 특히, 전류 전원에 인접한 부위에서 생기는 오차가 경계요소법을 사용한 경우에는 거의 발생하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 4는 균질 모델에 대해 경계요소법, 유한요소법, 유한차분법의 수치계산 결과 및 해석해를 보여준다. 본 연구에서 사용된 유한요소법과 유한차분법의 수치계산은 Kim (1994)의 프로그램을 사용하였다. 각개 방법에 대한 해석해에 대한 평균제곱근 편차율 및 로그치 편차율은 Table 2에 다른 모델로부터 야기되는 편차율과 함께 주어진다. Fig. 4의 결과에서 알 수 있듯이, 균질 모델에 대해서 수행된 유한요소법의 수치결과는 전류전원 근처에서 매

Table 2. Deviation values according to numerical methods.

Method \ Case	Model 1		Model 2		Model 3	
	RMS (%)	LDEV (%)	RMS (%)	LDEV (%)	RMS (%)	LDEV (%)
BEM	5.3	2.3	5.2	2.2	2.9	1.3
FEM	9.8	6.0	18.8	8.8	15.2	8.0
FDM	15.3	7.5	9.0	4.3	19.1	9.4

우 큰 오차를 보이며, 전원에서 원거리로 이동할 경우, 경계요소법을 이용한 수치계산과 거의 일치하는 결과를 보여준다. 반면, 유한차분법을 이용한 수치계산은 전원부위에서 대체로 안정된 해를 보여주지만, 전원에서 멀리 떨어진 지점에서 오차가 가중되는 현상을 보이고 있다.

두 번째 모델(Model 2)과 세 번째 모델(Model 3)은 2층 구조 모델로 두 번째 모델의 경우 제 1 층이 제 2 층에 비해 비저항치가 적은 형태이며, 세 번째 모델의 경우 제 1 층이 제 2 층에 비해 비저항층이 큰 형태이다. Fig. 5는 두 번째 모델에 대한 2차원 모델링 수치해들과 이 모델에 대한 층상구조 이용한 해석해의 결과를 보여주며, Fig. 6은 세 번째 모델에 대한 2차원 모델링 수치해와 이 모델에 대한 층상구조를 이용한 해석해의 결과를 보여준다. 이들 값들에 대한 편차율은 Table 2에 주어져 있다. 두 번째 모델의 수치계산 결과를 보여주는 Fig. 5에서 볼 수 있듯이, 유한요소법의 수치계산 결과는 여전히 전원부위의 오차가 심각함을 보여준다. 또한 전원에서 멀리 있는 지점에서의 수치계산 결과는, 경계요소법을 제외하고는 해석해와 차이가 있음을 알 수 있다. 세 번째 모델의 경우, Fig. 6에서 볼 수 있듯이, 유한요소법을 이용한 수치해의 경우는 전원에서 멀리 떨어진 지점에서 해석해와의 오차가 경계요소법에 비해 심각함을 알 수 있다. 결국, 위의 계산결과도와 Table 2에 주어진 편차값들에서 볼 수 있듯이, 본 연구에서 사용된 세 가지 2차원 수치해석방법중 경계요소법을 이용한 수치계산값이 해석해와 가장 근접한 결과를 보여줄 수 있다.

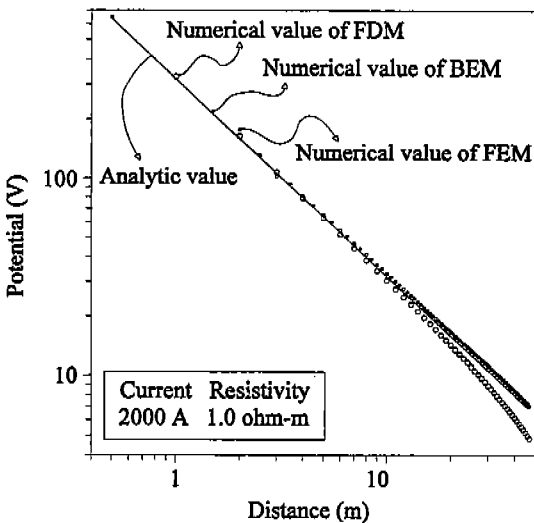


Fig. 4. Electric potential comparison of BEM, FDM and FEM results for homogeneous resistivity model (Model 1).



결론 및 의견

경계요소법을 이용한 전기 비저항 2차원 모델링을 위한 이론적 방법론이 제시되었으며, 이 방법을 이용해 실제적인 수치 계산이 수행되어 기존의 2차원 전기 비저항 모델링 방법인 유한 요소법 및 유한 차분법의 결과와 비교되었다. 경계요소법을 이용한 방법은 균질모델과 층상구조 모델에 대해 모두 기존의 2차원 수치모델 방법인 유한요소법 및 유한차분법에 비해 정확한 해를 계산해 냄이 밝혀졌다. 이러한 수치해는 특히 전류전극에 가까운 지점에서 효과적임이 밝혀졌다. 또한 지하의 비저항 모델을 지나치게 세분하지 않는 한 계산용량을 현저하게 줄일 수 있었으며, 일반적인 전기 비저항 탐사에서 측정되는 경계면 (즉, 지표면)에서의 전위치만을 계산하므로 계산 효율에 있어서도 타 2차원 모델링 방법에 비해 효과적임을 알 수 있다. 실제적인 계산의 효율성은 지하 비저항 모델을 어떠한 형태로 구성하느냐에 따라 그 결과가 달라지지만, 일반적으로 유한요소법이나 유한차분법이 수평격자 및 수직격자의 수가 증가함에 따라 격자수에 세계곱치에 비례하는데 비해 경계요소법은 제곱치에 비례한다고 할 수 있으므로, 그 효율은 격자점수가 증가할수록 현저하게 월등해진다. 또한 경계요소법은 비저항치의 경계부위에서만 요소를 분할하므로 지하 모델을 형성하는 것이 용이하여 대화식으로 모델을 형성하면서 비저항치를 해석하는 경우 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 그러나 경계요소법은 지하매질의 물성을 지나치게 세분화 해서 지하에 많은 경계가 형성되는 경우에는 유한차분법이나 유한요소법에 비해 특별한 효율을 기대할 수 없을 수도 있으며, 이런 경우 오히려 유한차분법이나 유한요소법에 비해 복잡한 프로그래밍 작업이 요구될 수 있는 단점을 가질 수도 있다. 앞으로 경계요소법을 사용한 방법은 지표의 지형적인 효과 계산 및 수평 탐사자료에 대한 2차원 해석 등에 효과적으로 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

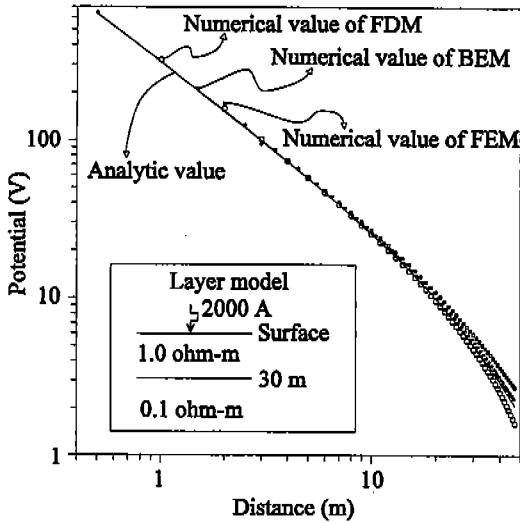


Fig. 5. Electric potential comparison of BEM, FDM, and FEM results for 2-layer resistivity model(Model 2). The resistivity of first layer is 1.0 ohm-m and the second 0.1 ohm-m. Thickness of the first layer is 30 m.

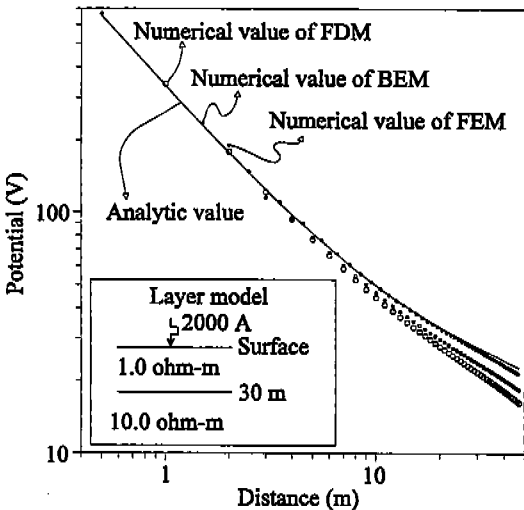


Fig. 6. Electric potential comparison of BEM, FDM, and FEM results for 2-layer resistivity model(Model 3). The resistivity of first layer is 1.0 ohm-m and the second 10.0 ohm-m. Thickness of the first layer is 30 m.

Appendix 1. 가중잔차 방정식 (weight residual equation) 유도

포텐셜 문제에 대한 미분 방정식을, 가중잔차 방

정식으로 유도하는 일반적인 방법은 Brebbia와 Dominguez(1989)에 잘 설명되어 있다. 본 색인에서는 2차원 전기비저항 문제에 대한 미분 방정식을 가중잔차 방정식으로 유도하는 방법을 설명한다.

기본적으로 2차원 전기 탐사에서 풀어야 하는 미분 방정식은 본문의 (3) 식 즉 아래 (A-1) 식이다.

$$-\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \phi(x, k_y, z)] + k_y^2 \sigma(x, z) \phi(x, k_y, z) = \frac{I}{2} \delta(x-x_s) \delta(z-z_s) \quad (A-1)$$

만약, 이 식에서  $\sigma(x, z)$ 을 하나의 균질매질내에서 본다면 이 값은  $\sigma$ 라는 상수값으로 바꿀 수 있으며, 그럼 (A-1)식은 (A-2)식처럼 쓸 수 있다.

$$-\sigma \nabla^2 \phi + k_y^2 \phi = \frac{I}{2} \delta(x-x_s) \delta(z-z_s) \quad (A-2)$$

이를 다시 쓰면,

$$\nabla^2 \phi + \lambda^2 \phi = f \quad (A-3)$$

처럼 쓸 수 있고 여기에서  $\lambda^2$ 은  $-k_y^2$ 이며  $f$ 는  $-\frac{I}{2\sigma} \delta(x-x_s) \delta(z-z_s)$ 이다.

(A-3) 식을 가중 잔차식으로 만들기 위해 (A-3) 식에 가중 함수  $w$ 를 곱하고 그 곱한 결과를 주어진 영역  $\Omega$ 에 대해 면적분하면 다음과 같은 (A-4) 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi + \lambda^2 \phi - f) w d\Omega = 0 \quad (A-4)$$

그러면 이 식은 임의의 함수  $w$ 에 대하여 성립하여야 한다.

이때  $\int_{\Omega} \nabla^2 \phi w d\Omega$ 를 Gauss divergence theorem (Becker, et al., 1981)을 써서 정리하여 (A-4)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi + \lambda^2 \phi - f) w d\Omega &= \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda^2 \phi w - fw \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla^2 w) \phi + \lambda^2 \phi w - fw d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (A-5)$$

처럼 표현된다. 이 때  $w$ 는 임의의 함수이므로 이

$w$ 를 다음 (A-6) 식을 만족하는 함수로 선택하기로 하자.

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w + \Delta_i = 0 \quad (A-6)$$

여기서  $\Delta_i$ 는 Dirac Delta 함수로  $(x_i, z_i)$ 에서 무한대에 수렴하고 나머지 공간에 대해서는 0인 값을 갖는다. (A-6) 식을 이용하면

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) \phi d\Omega = \int_{\Omega} (-\lambda^2 w - \Delta_i) \phi d\Omega \quad (A-7)$$

으로 쓸 수 있다. 이때 (A-7) 식의 우변에  $\int_{\Omega} -\Delta_i \phi d\Omega$ 의 값은  $(x_i, z_i)$ 가  $\Omega$ 영역의 경계이고  $\Delta_i$ 가 Dirac Delta 함수임을 고려하면 그 값은  $-\frac{1}{2} \phi_i$ 이다 (Brebbia and Dominguez, 1989). 그럼, (A-5) 식을 이 값과 (A-7) 식을 이용하여 다시 정리하면

$$-\frac{1}{2} \phi_i - \int_{\Omega} fw d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (A-8)$$

(A-8) 식에서  $f$ 는  $-\frac{I}{2\sigma} \delta(x-x_s) \delta(z-z_s)$ 이므로 이 값을 (A-8) 식에 대입하여 정리하면

$$-\frac{1}{2} \phi_i + \frac{I}{2\sigma} w(x_s, z_s; x_i, z_i) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} w d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (A-9)$$

로 표현되며, 이 (A-9) 식이 가중잔차 방정식 (weight residual equation)이다.

여기서 가중 함수  $w$ 는 (A-6) 식의 해로서, 이는  $(x_i, z_i)$ 에 delta 함수형태의 source가 놓였을 때 야기되는 반응치 (response value), 즉 Green 함수에 해당된다. (A-6) 형태의 미분방정식의 기저해 (fundamental solution)는  $w(\vec{r}_j; \vec{r}_i) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_y r)$ 이며, 여기서  $r = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ ,  $K$ 는 modified Bessel 함수이다. 또한 (A-8)과 (A-9) 식에 나타나는  $\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} k_y K_1(k_y r) \cdot \frac{\partial r}{\partial n}$ 이다.

### Appendix 2. 경계요소에 의한 행렬식 (식 -16)의 성분치

$A_l^j$  행렬의 성분은  $a(l, m)$ 으로 표현되며 여기

에서  $i$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계요소들의 일련번호 범위를 가지며  $m$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계 요소들의 일련번호이다. 여기서

$$a(l, m) = \begin{cases} \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_1} d\Gamma & , l \neq m \\ \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_1} d\Gamma + \frac{1}{2} & , l = m \end{cases}$$

의 값을 갖는다.

예를 들어 (16) 식의 실제  $A_1^2$ 의 행렬치는

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} a(1, M) & a(1, M+1) & \cdots & a(1, N) \\ a(2, M) & a(2, M+1) & \cdots & a(2, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(K-1, M) & a(K-1, M+1) & \cdots & a(K-1, N) \end{pmatrix}$$

으로 표현된다. 행의 값은 경계  $\Gamma_2$ 에 있는 경계요소의 일련번호인 1부터  $K-1$ 까지의 범위를 갖고, 열의 값은 경계  $\Gamma_1$ 에 있는 경계요소의 일련번호치인  $M$ 부터  $N$ 까지의 범위를 갖는다.

$B_1^2$ 행렬의 성분은  $b(l, m)$ 으로 표현되며 여기에서  $i$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계요소들의 일련번호 범위를 가지며  $m$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계 요소들의 일련번호이다. 여기서

$$b(l, m) = \begin{cases} \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_1} + a \cos(\theta) d\Gamma & , l \neq m \\ \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_1} + a \cos(\theta) d\Gamma + \frac{1}{2} & , l = m \end{cases}$$

의 값을 갖는다.

예를 들어 (16) 식의 실제  $B_4^3$ 의 행렬치는

$$B_4^3 = \begin{pmatrix} b(N+1, L) & b(N+1, L+1) & \cdots & b(N+1, M-1) \\ b(N+2, L) & b(N+2, L+1) & \cdots & b(N+2, M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(O+1, L) & b(O+1, L+1) & \cdots & b(O+1, M-1) \end{pmatrix}$$

의 형태로 표현된다. 행의 값은 경계  $\Gamma_3$ 에 있는 경계요소의 일련번호인  $N+1$ 부터  $O+1$ 까지의 범위를 갖고, 열의 값은 경계  $\Gamma_4$ 에 있는 경계요소의 일련번호치인  $L$ 부터  $M-1$ 까지의 범위를 갖는다.

$C_1^3$ 행렬의 성분은  $c(l, m)$ 으로 표현되며 여기에

서  $i$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계요소들의 일련번호 범위를 가지며  $m$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계 요소들의 일련번호이다. 여기서

$$c(l, m) = \int_m w(\vec{r}_m; \vec{r}_l) d\Gamma \text{의 값을 갖는다.}$$

예를 들어 (16) 식의 실제  $C_3^4$ 의 행렬치는

$$C_3^4 = \begin{pmatrix} c(L, N+1) & c(L, N+2) & \cdots & c(L, O+1) \\ c(L+1, N+1) & c(L+1, N+2) & \cdots & c(L+1, O+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(M-1, N+1) & c(M-1, N+2) & \cdots & c(M-1, O+1) \end{pmatrix}$$

의 형태로 표현된다. 행의 값은 경계  $\Gamma_4$ 에 있는 경계요소의 일련번호인  $L$ 부터  $M-1$ 까지의 범위를 갖고, 열의 값은 경계  $\Gamma_3$ 에 있는 경계요소의 일련번호치인  $N+1$ 부터  $O+1$ 까지의 범위를 갖는다.

$D_1^4$ 행렬의 성분은  $d(l, m)$ 으로 표현되며 여기에서  $i$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계요소들의 일련번호 범위를 가지며  $m$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계 요소들의 일련번호이다. 여기서

$$d(l, m) = \begin{cases} \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_2} d\Gamma & , l \neq m \\ \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_2} d\Gamma + \frac{1}{2} & , l = m \end{cases}$$

의 값을 갖는다.

예를 들어 (16) 식의 실제  $D_3^5$ 의 행렬치는

$$D_3^5 = \begin{pmatrix} d(K, N+1) & d(K, N+2) & \cdots & d(K, O+1) \\ d(K+1, N+1) & d(K+1, N+2) & \cdots & d(K+1, O+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(L-1, N+1) & d(L-1, N+2) & \cdots & d(L-1, O+1) \end{pmatrix}$$

의 형태로 표현된다. 행의 값은 경계  $\Gamma_5$ 에 있는 경계요소의 일련번호인  $K$ 부터  $L-1$ 까지의 범위를 갖고, 열의 값은 경계  $\Gamma_3$ 에 있는 경계요소의 일련번호치인  $N+1$ 부터  $O+1$ 까지의 범위를 갖는다.

$E_1^5$ 행렬의 성분은  $e(l, m)$ 으로 표현되며 여기에서  $i$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계요소들의 일련번호 범위를 가지며  $m$ 은 경계  $\Gamma_i$ 에 있는 경계 요소들의 일련번호이다. 여기서

참 고 문 헌

$$e(l, m) = \begin{cases} \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_2} + \alpha \cos(\theta) d\Gamma & , l \neq m \\ \int_m \frac{\partial w(\vec{r}_m; \vec{r}_l)}{\partial n_2} + \alpha \cos(\theta) d\Gamma + \frac{1}{2} & , l = m \end{cases}$$

의 값을 갖는다.

예를 들어 (16) 식의 실제  $E_5^3$ 의 행렬치는

$$E_5^3 = \begin{pmatrix} d(N+1, K) & d(N+1, K+1) & \dots & d(N+1, L-1) \\ d(N+2, K) & d(N+2, K+1) & \dots & d(N+2, L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(O+1, K) & d(O+1, K+1) & \dots & d(O+1, L-1) \end{pmatrix}$$

의 형태로 표현되며, 행의 값은 경계  $\Gamma_3$ 에 있는 경계요소의 일련번호인  $N+1$ 부터  $O+1$ 까지의 범위를 갖고, 열의 값은 경계  $\Gamma_5$ 에 있는 경계요소의 일련번호치인  $K$ 부터  $L-1$ 까지의 범위를 갖는다.

$0_i^j$ 행렬은 그 행의 수가  $\Gamma_j$ 에 존재하는 요소수 만큼, 그 열의 수가  $\Gamma_i$ 에 있는 요소의 수만큼 0인 성분을 갖는 영행렬이다.

벡터 형태로 주어진  $\phi_{\Gamma_i}$ ,  $q_{\Gamma_i}$ ,  $w_{\Gamma_i}$  및  $0_{\Gamma_i}$ 의 값은 다음과 같다.

$\phi_{\Gamma_i}$ 는 경계  $\Gamma_i$ 에서의 전위값이며,  $q_{\Gamma_i}$ 는 경계  $\Gamma_i$ 에서 전위의 미분치이다. 또한  $w_{\Gamma_i}$ 는  $w(\vec{r}_s; \vec{r}_l)$ 로 여기서  $\vec{r}_s$ 는 전류전원의 위치벡터이며,  $\vec{r}_l$ 는 경계  $\Gamma_i$  위의 요소들의 위치벡터 값이다. 물론 여기에서  $w$ 는 Appendix 1에서 설명한  $w(\vec{r}_j; \vec{r}_i) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_s |\vec{r}_j - \vec{r}_i|)$ 이다.  $0_{\Gamma_i}$ 는  $\Gamma_i$ 에 존재하는 경계요소의 수만큼 0의 값을 갖는 영벡터이다.

Becker, F. X., Carey, G. F., and Oden, J. T., 1981, Finite elements, Vol. 1, Prentice-Hall, Inc., New Jersey. 258p.

Brebbia, C. A., and Dominguez, J., 1989, Boundary elements An introduction course, McGraw-Hill, 293p.

Dey, A., and Morrison, N. F., 1979, Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures, Geophysical prospecting 27, 106-136.

Kim, H.-S., 1994, Geoelectrical structure of the Cheju Island and interpretation methods of geoelectrical surveys, Seoul Nat'l Univ. Ph. D. Thesis, 311p.

Walker, S., and Brebbia, C. A., 1980, Boundary element techniques in engineering, Newnes-Butterworths, 210p.