

論文96-33B-10-1

비선형 시스템에 대한 동적 구간 제어법:강인성 및 외란의 영향

(Receding Horizon Control of Nonlinear Systems:
Robustness and Effects of Disturbance)

梁 玄 錫 *

(Hyun Suk Yang)

요 약

본 논문에서는 시스템의 상태변수 및 입출력에 제약조건이 있고 모델링 오차와 외란이 있는 비선형시스템에 대한 강인한 동적구간 제어알고리즘을 제시한다. 제시하는 알고리즘은 우선 동적구간 제어법칙을 적용하다가 시스템의 상태변수가 원점 근방으로 접근하면 선형 귀환제어 법칙을 적용하는 방식이다. 동적구간제어 알고리즘의 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간을 고려하여 시스템의 강인성을 이론적으로 입증하여 실시간 제어가 가능하도록 하였다.

Abstract

In this paper, a robust receding horizon control algorithm, which can be employed for a wide class of nonlinear systems with control and state constraints, modeling errors, and disturbances, is considered. In a neighborhood of the origin, a linear feedback controller for the linearized system is applied. Outside this neighborhood, a receding horizon control is applied. Robust stability is proved considering the time taken to solve an optimal control problem so that the proposed algorithm can be applied as an on-line controller.

I. 서 론

1960년대 이후 새로운 제어 이론이 많이 정립되었지만 시변 시스템이나 비선형 시스템을 안정화시키는 강인한 귀환 제어 법칙에 대한 연구는 매우 미흡한 편이다. 특히, 시스템의 상태변수, 입력, 또는 출력에 제약조건이 있을 경우의 귀환제어 법칙에 대한 연구는 그 중요성에 비해 전무한 상태이다. 현재까지 제약조건이 있는 경우의 문제는 open-loop 최적제어 방법을 이용하여 해결하고 있다. 이 방법은 시스템이나 제약조건의 형태에 영향을 받지 않은 장점이 있으나 제약조건의

난이도에 따라 계산 양이 매우 커진다는 것이 단점으로 지적되었다. 근래에 빠른 컴퓨터의 개발로 단위시간 당 계산량의 증가는 공학의 많은 문제 해결에 최적제어 방법의 이용을 가능하게 하였다^[1-6,12]. 실제 적용 가능한 (즉 계산적인 측면까지 고려한) 최적제어 방법을 이용한 귀환제어법칙의 시초는 1970년대 말에^[8,9] 시변 또는 비선형 시스템의 귀환 제어법칙을 한정된 구간에서 정의된 최적제어 문제를 계속적으로 계산하여 얻는 제어법 (이 제어법을 동적구간 제어법, Receding Horizon Control Law, 라고 부른다) 으로부터 비롯된다. 이 이후로 이론적으로 보다 발전한 형태의 동적구간제어 알고리즘들이 발표되었다^[11,12,14,15,17].

동적 구간 제어법이 이론적인 측면에서 연구되었음에 반하여 응용 적인 측면에서 이 개념을 도입하여 사용하던 분야가 있는데 이 분야가 공정 제어 분야이다. 공정 제어 분야에서 많이 사용되는 방법이 모델 예측

* 正會員, 弘益大學校 電子電氣工學部

(Dept. of Elec. Engr., Hongik Univ.)

※ 이 연구는 1995년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임 (과제번호 951-0914-051-1)

接受日字:1996年5月15日, 수정완료일:1996年9月23日

제어법 (Model Predictive Control)인데, 1978년에 Richalet은 모델 예측제어법의 성공적인 응용을 발표하였고 1979년에 미국 Shell 정유 회사의 엔지니어들은(Cutler와 Ramaker, 1979; Prett와 Gillette, 1979) 모델 예측 제어법과 유사한 동적 행렬 제어법(Dynamic Matrix Control)을 제시하고 이를 유체 촉매 쇄분기(fluid catalytic cracker)의 공정에 이용하였다. 두 제어법은 조정 변수의 변화에 따른 출력의 변동을 예측하고 이 예측치를 이용하여 원하는 출력을 얻게 한다¹⁶⁾.

1978년과 1979년에 시작된 모델 예측제어법은 화학 공정 분야(Chemical Process Industries)에서 점차적으로 각광을 받기 시작하였다. 1982년에 Mihra은 초전열기(superheater), 증기발전기(steam generator), 풍동(wind tunnel)등의 분야에 이 방법을 응용하고 이 결과를 요약, 발표하였다. 1985년에는 Matsko가 모델 예측 제어법의 펄프 및 종이 공장에의 성공적인 응용에 대하여 발표하였다. 학계에서는 모델 예측 제어법을 제한된 상태(controlled condition)에서 혼합기(mixing tank)와 열변환기(heat exchanger) 등에 적용하였다(Arkun, 1986). 또한 Parrish와 Brosilow는 1985년에 모델 예측 제어법과 기존의 제어법칙을 여러 예제를 통하여 비교 분석하고 이 결과를 발표하였다¹¹³⁾.

¹⁾ 이외에도 Clarke, Garcia, Morari 등 많은 학자들이 이론적인 측면에서 모델예측제어법을 수정, 조정하여 새로운 알고리즘들을 발표하였다^{11-7,15,17,18)}.

이상과 같이 모델 예측 제어법은 이의 응용에 관하여 많은 논문이 발표되었으나 제약조건이 있는 경우에는 안정도 이론 및 강인성의 이론적인 뒷받침이 거의 없는 형편이다. 이러한 이론적인 뒷받침 없이 응용에서 좋은 성과를 보이고 있는 이유는 모든 경우에서 공정 시스템이 안정된 시스템이기 때문이다. 이러한 이론의 미흡과 계산상의 어려움을 극복하기 위하여 Polak et al.은 1993년 [14,15]에 선형의 공정 과정에 적용할 수 있는 새로운 동적구간 알고리즘을 개발하고 이의 안정도 이론 및 강인성 이론을 정립하였고 공정의 상태 변수를 측정하지 못하는 경우에 시스템 식별법을 이용한 알고리즘을 제시하고 이의 이론도 정립하였다. 이러한 결과를 확장하여 저자들은 동적구간제어법을 이용한 비선형 시스템의 제어 알고리즘도 발표하였다¹⁷⁾. 그러나 이 논문은 안정도 이론을 입증하기 위하여 최적제어문제에 불필요한 제약조건을 첨가하여 최적제

어문제를 풀 때 걸리는 시간이 증가하고 시스템의 성능이 나빠지는 단점이 있다. 이들과 다른 동적구간 알고리즘을 이용한 비선형 시스템의 강인성에 대한 연구는 Mayne et al.에^{11,12)} 의하여 정립되었다. 이 논문에서 제시한 방법은 시스템 변수가 원점에서 멀리 있을 때에는 최적제어 방식에 의한 입력을 사용하고 원점 근처에서는 비선형 시스템을 선형화 하여 기존의 귀환 제어방식에 의한 입력을 사용하는 것이다. 이 방식은 성능은 좋으나 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간을 고려하지 않아 실제 적용에 있어 문제가 있으며 고려하는 목적함수가 단순한 선형이차함수(linear quadratic function)로 제한되어 있는 단점이 있다. 또한 외란이 있는 경우 시스템의 안정성에 외란이 미치는 영향에 대한 분석이 이루어지지 않은 문제점도 지적되고 있다. 최근에도 이러한 이론적인 측면의 논문 외에 응용적인 측면에서의 논문도 많이 발표되었다^{19,21)}.

본 논문은 2장에서 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간까지 고려한 새로운 동적구간제어 알고리즘을 제시하고 3장에서 이 알고리즘의 강인성 이론을 정립하고 4장에서는 외란을 고려한 강인성을 분석하고 5장에서 결론을 맺는다.

II. 동적구간 제어 알고리즘의 구현

동적구간 제어법은 고려하는 실제 시스템의 모델에 근거한 open-loop 최적제어 문제를 계속적으로 풀어야 한다. 실제 시스템을 모델할 때는 항상 오차가 있으므로 동적구간 제어법은 강인성을 가져야 한다. 강인성을 분석하기 위하여 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

여기에서 $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 이고 $u(t) \in \Omega$ 로 다음을 만족한다.

가정 2.1: (가) $f(\cdot, \cdot)$ 는 두번연속 미분가능하며 $f(0, 0) = 0$ 을 만족한다.

(나) $\Omega \in R^m$ 은 내부에 원점을 포함하는 compact 집합이다. ■

(1)의 시스템에 대한 최적제어 문제를 풀기 위하여 (1)의 모델을 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{x}^m(t) = f^m(x^m(t), u(t)) \quad (2)$$

여기에서 $f^m: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 으로 두변연속 미분가능하며 입력 $u(\cdot)$ 은 가정 2.1 (나)를 만족한다. 시간 t_0 에서 초기상태, x_0 ,와 입력 $u(\cdot)$ 에 의한 실제 시스템과 모델의 상태 궤적은 각각 $x(\cdot, t_0, x_0, u)$, $x^m(\cdot, t_0, x_0, u)$ 로 표시한다. 실제 시스템 (1)과 이의 모델 (2)는 다음의 조건을 만족한다.

가정 2.2: (가) 모델 시스템 (2)은 $f^m(0, 0) = 0$ 을 만족한다.

(나) $f(\cdot, \cdot)$ 과 $f^m(\cdot, \cdot)$ 는 Lipschitz 조건을 만족한다. 즉 어떤 $L \in (0, \infty)$ 이 존재하여 모든 $x_1(t), x_2(t) \in R^n, u_1(t), u_2(t) \in \Omega, t \in [0, \infty]$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\|f(x_1(t), u_1(t)) - f(x_2(t), u_2(t))\|_p \leq L(\|x_1(t) - x_2(t)\|_p + \|u_1(t) - u_2(t)\|_p) \quad (3)$$

$$\|f^m(x_1(t), u_1(t)) - f^m(x_2(t), u_2(t))\|_p \leq L(\|x_1(t) - x_2(t)\|_p + \|u_1(t) - u_2(t)\|_p) \quad (4)$$

(다) 어떤 $\beta \in (0, \infty)$ 가 존재하여 모든 $x(t) \in R^n, u(t) \in \Omega, t \in [0, \infty)$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\|f(x(t), u(t)) - f^m(x(t), u(t))\|_p \leq \beta(\|x(t)\|_p + \|u(t)\|_p) \quad (5)$$

$\|\cdot\|_p$ 는 $n \times n$ symmetric positive definite 행렬 P 에 대하여 $\|z\|_p^2 = z^T P z$ 로 정의한다. ■

동적구간 제어법은 일반적으로 진행과정이 매우 느린 시스템에 적용되는 것으로 고려하는 시간구간이 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간에 비해 매우 크다고 가정하여 이 시간을 고려하지 않고 있다. 그러나 제약조건이 있는 최적제어문제의 경우에 이를 풀 때 걸리는 시간은 제약조건의 난이도에 따라 기하급수적으로 늘어날 가능성이 있어 이론적인 측면과 실제 응용에서의 결과가 다를 수 있다. 본 논문에서는 Yang과 Polak^[17], Michalska과 Mayne^[12]이 제시한 알고리즘의 장점을 결합한 새로운 동적구간 제어법칙을 구현하고 이의 강인성을 이론적으로 입증하고자 한다. 우선 두 논문의 장단점을 살펴보자. [17]에서 제시한 제어법칙은 일반적인 동적구간 제어법과는 달리 샘플링 구간이 가변이며 최적제어 문제는 임의의 목적함수를 가질 수 있다. 또한 최적제어문제를 풀 때 걸리는 계산시간을 고려한 알고리즘을 제시하여 좀더 실제 적

용에 가까운 결과를 얻고 있다. 다만 이론적인 입증을 위하여 최적제어 문제에 두 가지 제약조건을 첨부하여 문제가 보다 복잡하게 되고 이에 따라 문제 해결에 더 많은 시간이 소요되는 단점이 있다. 논문 [12]는 현재 상태에서 최적제어문제를 풀어 얻은 시간구간과 입력을 시스템에 적용하는 방식으로 그 수행은 매우 좋으나 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간을 고려하지 않아 실질적인 적용에서는 걸림돌이 된다. 그러나 [12]를 제외한 대부분의 동적구간 제어법에서 취급하는 최적제어 문제는 구간의 마지막 시간 t_{end} 에서 상태는 $x(t_{end}, t_0, x_0, u) = 0$ 을 만족해야 하는데 이러한 제약조건이 있으면 최적제어 문제를 해결하는데 무한대의 시간이 소요되므로 실용성이 없게 된다. 이 논문에서는 시스템이 원점 근방에서 선형귀환 법칙으로 안정화될 수 있으면 최적제어문제의 제약조건 중 $x(t_{end}, t_0, x_0, u) = 0$ 대신에 어떤 작은 값 $\delta > 0$ 에 대하여 그 제약조건을 $\|x(t_{end}, t_0, x_0, u)\| \leq \delta$ 로 바꾸고 상태가 δ -ball 안에 들어가면 선형귀환 법칙을 적용하여 안정성을 얻는 방법을 택하여 제어법칙을 단순화시켰다.

본 논문에서 고려하는 최적제어문제를 살펴보자. 우선 i -번째 샘플시간 t_i 에서의 모델의 상태를 $x_i^m = x^m(t_i, t_{i-1}, x_{i-1}^m, u_{[t_{i-1}, t_i]})$ 라 할 때 최적제어문제 $P(x_i^m)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min \{ & f^0(x^m, t, u, T) | \\ & \|x^m(t_i + T, t_i, x_i^m, u)\|_p \leq \delta/2 \\ & \phi^i(x^m, u) \leq 0, i = 1, \dots, l, u \in \Omega_{[t_i, t_i + T]} \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 목적함수 $f^0(x^m, t, u, T)$ 에서 T 는 최적제어문제의 시간구간으로 (6)의 해는 이 구간에서의 입력 $u_{[t_i, t_i + T]}$ 와 최소의 시간구간 T 가 된다. 목적함수로 사용되는 대표적인 함수는 $\int_{t_i}^{t_i + T} (\|x^m(t)\|_p^2 + \|u(t)\|_p^2) dt$ 이나 여기에서는 임의의 함수를 목적함수로 사용할 수 있다. 다만 목적함수가 convex가 아닐 때에는 local minimum에서 정지할 수 있으므로 주의하여야 한다. 제약함수 $\phi^i(x^m, u)$ 는 단지 모델의 상태와 입력의 함수가 아닌 시간에 따른 제약도 포함할 수 있다. 수식으로 이를 표시하면 $\phi^i(x^m, u) = \max_{t \in [t_i, t_i + T]} \phi^i(x^m, u, t), j = 1, \dots, l$ 이 된다. 이 경우에 제약함수의 수는 l 개이지만 각각의 함수가 무한개 함수의 최대로 표시되어 이를 semi-infinite 최적제어문제라

한다. 수식 (6)에서의 δ 값은 다음 장에서 정의될 것이다. 이 조건은 모델의 상태가 $\delta/2$ -ball에 포함되면 실제 시스템의 상태는 δ -ball에 포함되어 선형귀환제어법을 적용할 수 있게 된다. 이의 이론적인 분석은 다음 장으로 미룬다.

기호를 간단히 하기 위하여 i 번째 샘플시간을 t_i , 이 때 모델의 상태를 x_i^m , 실제 시스템의 상태를 x_i^p 라고 하고 최적제어문제 $P(x_i^m)$ 의 결과인 입력을 $u_i(\cdot)$, 최소 시간구간을 T_i 라 하자. 최적제어문제 (6)을 풀 때 걸리는 시간까지 고려하는 동적구간제어 알고리즘을 다음과 같이 제시한다.

동적구간 제어 알고리즘:

데이터: 초기 시간 t_0 에서 시스템의 초기값 $x_0^p \in R^n$.

초기화 단계: 최적제어문제 $P(x_0^p)$ 를 풀어 최소 시간구간 T_0 , 입력 $u_0(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T_0]$,를 구한다.

제어 알고리즘:

단계 0: $i = 0$ 이라 한다.

단계 1: 입력 $u_i(t)$, $t \in [t_i, t_i + \Delta]$, 를 적용한다. 여기에서 Δ 는 샘플구간이다.

단계 2: 시스템의 상태 x_i^p 를 측정한다.

단계 3: 만약 $x_i^p \in B_\delta = \{x \in R^n \mid \|x\|_p < \delta\}$ 이면 선형 귀환제어법을 적용하고 그렇지 않으면 단계 4로 간다.

단계 4: 모델 시스템의 상태 x_{i+1}^m 를 계산한다.

단계 5: 최적제어문제 $P(x_{i+1}^m)$ 을 풀어 새로운 최소 시간구간 $T_{i+1} \geq \Delta$ 와 제어 입력 $u_{i+1}(t)$, $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$, 을 구한다.

단계 6: $i + 1$ 을 i 라하고 시간 t_{i+1} 까지 기다린 후 단계 1로 간다. ■

여기에서 샘플구간 Δ 는 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간 보다 큰 값을 선택하여야 한다. 그렇지 않으면 단계 6에서 언급한 것처럼 시간 t_{i+1} 까지 기다려도 최적제어문제의 해를 아직 얻지 못하여 단계 1로 갔을 때 적용할 입력이 없게 되는 현상이 생길 수도 있게 된다. 즉 위의 제어법을 적용할 수 있는 시스템은 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간과 비교하여 훨씬 느린 시스템들이다.

III. 강인성의 분석

2장에서 제시한 알고리즘의 안정도를 입증하기 위하여 우선적으로 비선형 시스템이 원점근방에서 선형귀환제어법으로 안정화 될 수 있음을 입증하여야 한다.

이를 위하여 시스템 식(1)과 이의 모델 (2)를 원점 근방에서 선형화한 식을 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_L(t) &= f_x(0, 0)x_L(t) + f_u(0, 0)u(t) \\ \dot{x}_L^m(t) &= f_x^m(0, 0)x_L^m(t) + f_u^m(0, 0)u(t)\end{aligned}\quad (7)$$

여기에서 $f_x(\cdot, \cdot)$, $f_u(\cdot, \cdot)$ 와 $f_x^m(\cdot, \cdot)$, $f_u^m(\cdot, \cdot)$ 은 각각 x , u 에 대한 $f(\cdot, \cdot)$ 와 $f^m(\cdot, \cdot)$ 의 미분치 들이고 $f_x(0, 0)$, $f_x^m(0, 0) \in R^{n \times n}$, $f_u(0, 0)$, $f_u^m(0, 0) \in R^{n \times m}$ 이다. 우선 다음의 가정이 필요하다.

가정 3.1: 선형화된 시스템 식 (7)의 $(f_x(0, 0), f_u(0, 0))$ 와 $(f_x^m(0, 0), f_u^m(0, 0))$ 는 제어가능쌍이라고 가정한다. ■

가정 3.1은 어떤 $K, K^m \in R^{m \times n}$ 가 존재하여 원점근방에서 시스템 (7)을 점근적으로 안정화시키는 선형귀환 제어입력 $u(t) = -Kx_L(t)$ 또는 $u(t) = -Kx_L^m(t)$ 이 존재함을 보장한다. 이를 이용하여 다음의 결과를 얻을 수 있다.

정리 3.2: 가정 2.1, 2.2, 3.1을 만족한다고 하자. 그러면 어떤 $\delta > 0$ 과 symmetric positive definite 행렬 $P \in R^{n \times n}$ 이 존재하여 시간 τ 에서 시스템의 상태변수 $x(\tau)$ 가 $B_\delta = \{z \in R^n \mid \|z\|_p < \delta\}$ 안에 존재할 때 선형 귀환 제어입력 $u(t) = -Kx(t) \in \Omega$, $t \geq \tau$,은 시스템 (1)을 (또는 $u(t) = -K^m x^m(t) \in \Omega$, $t \geq \tau$,은 시스템 (2)를) 안정화한다.

(증명) 가정3.1에 의해 $A = f_x(0, 0) - f_u(0, 0)K$ 를 안정화하는 행렬 K 가 존재하고 Lyapunov 식 $A^T P + PA = -Q$ 을 만족하는 symmetric positive definite 행렬 (P, Q) 가 존재한다. 그러면 Lyapunov 정리에 의하여 정리3.2는 간단히 증명된다. ■

정리3.2의 $\delta > 0$ 는 다음과 같은 구간을 갖는다. 우선 Ω 가 원점을 내부에 포함하는 compact 집합이므로 $B_M = \{z \in R^n \mid \|z\| \leq M\} \subset \Omega$ 을 만족하는 $M \in (0, \infty)$ 이 존재한다. 이러한 M 중에서 최대 값을 M_{\max} 라 하자. 그리고 λ_{\max}^A 와 λ_{\min}^A 는 각각 행렬 A 의 최대, 최소 singular value라 할 때 δ_{\max} 는 다음과 같고 $0 < \delta < \delta_{\max}$ 을 만족한다.

$$\delta_{\max} = \min \{ \delta_1, M_{\max} \lambda_{\min}^P / \lambda_{\max}^K \} \quad (8)$$

여기에서 K, P 는 위의 증명에서 결정된 행렬들이다. 수식 (8)에서 정의된 δ_{\max} 는 off-line 으로 미리

계산할 수 있는 값이다. 최적제어문제 (6)의 제약조건은 선형귀환제어법을 적용할 때도 만족해야 하므로 다음의 가정이 요구된다.

가정 3.3: δ_{\max} 를 수식 (8)과 같이 정의한다. 이때 모든 $\delta_m \in (0, \delta_{\max})$ 에 대하여 시간 τ 에서 $\|x(\tau)\|_p \leq \delta_m$ 을 만족할 때 입력 $u(t) = -Kx(t), t \geq \tau$,는 최적제어문제의 제약조건 $\psi^j(x, u) \leq 0, j = 1, \dots, l$,을 만족한다. ■

본 논문에서는 이론적인 증명을 위하여 주어진 최적제어문제의 해가 존재한다고 가정한다. 만약 그 해가 존재하지 않는 경우에 알고리즘은 우선 제약조건을 만족하기 위한 최선의 입력을 얻고자 할 것이다. 해가 존재할 경우 고려하는 시스템의 상태 $x(t)$ 가 무한대가 될 수 있다고 가정하는 것은 비현실적이므로 여기에서는 초기상태변수 $x(0)$ 가 어떤 compact 집합 $X_0 \subset R^n$ 안에 존재할 때 이 초기값에 따라 변하는 어떤 입력 $u_{[0, \infty)}$ 가 존재하여 이 입력을 이용하면 모든 제약조건을 만족하고 또한 상태변수 $x(t)$ 가 모든 시간 t 에 대하여 어떤 compact 집합 $X_{\max} \subset R^n$ 내에 있다고 가정한다. 그러면 최적제어문제의 해인 시간구간 T_i 도 한정된 값을 갖게 된다. T_{\max} 를 이러한 시간구간 중에서 최대 값이라 가정하자. 그러면 모든 $i \geq 0$ 에 대하여 $T_i \leq T_{\max}$ 를 만족하고 최적제어문제는 해가 존재하게 된다. 해가 존재한다 함은 최적제어문제를 한정된 시간 내에서 시간구간 T_i 과 제어입력 $u(t), t \in [t_i, t_i + T_i]$,를 얻을 수 있음을 뜻한다. 물론 이때 걸리는 시간은 목적함수 및 제약조건 of 난이도에 따라 결정된다.

제어알고리즘을 좀더 자세히 분석하기 위하여 그림1을 참조하자. 그림1은 제어알고리즘의 i 번째를 그림으로 도식화한 것이다. 먼저 시간 t_i 에서 시스템의 상태 x_i^p 를 측정하고 이를 초기값으로 하여 이미 이전 단계에서 계산되어 있는 입력 $u_i(t), t \in [t_i, t_{i+1}]$,를 적용한다. 그 다음은 두가지 과정이 동시에 이루어지고 있다. 하나는 시스템(1)이 입력을 받아 시간 t_{i+1} 까지 진행되는 것이고 (제어알고리즘의 단계1) 또 하나는 컴퓨터를 이용하여 알고리즘이 수행되는 것이다 (제어알고리즘의 단계2에서 5까지). 즉 시스템의 모델을 이용하여 시간 t_{i+1} 에서의 상태 x_{i+1}^m 를 계산하고 이를 이용하여 최적제어문제 $P(x_{i+1}^m)$ 을 풀어 다음 시간구간 T_{i+1} 과 그 구간에서 적용할 입력 $u_{i+1}(t), t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$,을 얻는다. 이때 이 구간 마지막에서의

상태를 $z_{i+1}^m = x^m(t_{i+1} + T_{i+1}, t_{i+1}, x_{i+1}, u_{i+1})$ 로 정의하자. 그러면 모델의 오차에 의하여 시간 t_{i+1} 에서 시스템의 상태 x_{i+1}^p 는 x_{i+1}^m 와 다르게 되어 시간 $t_{i+1} + T_{i-1}$ 에서 모델에 의하여 예측된 z_{i+1}^m 은 새로운 예측 $z_{i+1}^p = x^m(t_{i+1} + T_{i+1}, t_{i+1}, x_{i+1}^p, u_{i+1})$ 와 차이가 있게 된다. 또한 z_{i+1}^m 은 제약조건에 의하여 $B_{\delta/2}$ 안에 존재하지만 z_{i+1}^p 는 그렇지 않을 수 있게 된다. 시스템의 안정도를 입증하기 위하여 다음의 정리들이 필요하다.

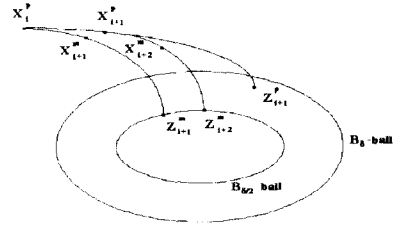


그림 1. 동적구간제어 알고리즘에 의한 상태변수의 궤적
Fig. 1. The trajectory of the state obtained by the moving horizon control algorithm.

정리 3.4: 어떤 시간 τ 에서 $x(\tau) \in B_{\delta} = \{z \in R^n | \|z\|_p < \delta\}$ 일 때 $u(t) = -Kx(t), t \geq \tau$ 인 선형귀환제어 입력을 적용한다고 가정하자. 그러면

- (가) 모든 시간 $t \geq \tau$, 또한 모든 $\delta \in (0, \delta_m)$ 에 대하여 $x(t) \in B_{\delta}$ 을 만족한다.
 - (나) 어떤 $\Delta_{\max} \in (0, \infty)$ 이 존재하여 임의의 상태 $x(\tau) \in B_{\delta}$ 에 대하여 $x(\tau + \Delta_{\max}) \in B_{\delta/2}$ 을 만족한다.
- (증명) (가) 정리 3.2에서 언급한 바와 같이 먼저 $\delta_m \leq \delta_{\max}$ 이므로 임의의 $\delta \in (0, \delta_m)$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma_{\delta} \|x(t)\|_p^2 = -\gamma_{\delta} V(x) \tag{9}$$

여기에서 $\gamma_{\delta} > 0$ 이므로 Lyapunov 함수 $V(x)$ 는 감소함수이다. 따라서 어떤 시간 τ 에서 $x(\tau) \in B_{\delta}$ 일 때 선형귀환 입력 $u(t) = -Kx(t), t \geq \tau$,을 적용하면 $V(x) = \|x(t)\|_p^2 \leq e^{-\gamma_{\delta}(t-\tau)} \|x(\tau)\|_p^2$ 이 모든 시간 $t \geq \tau$ 에서 만족되고 $\gamma_{\delta} > 0, e^{-\gamma_{\delta}(t-\tau)} \leq 1$ 이므로 모든 $t \geq \tau$ 에 대하여 $x(t) \in B_{\delta}$ 도 만족하게 된다.

(나) (가)의 증명에서 만약 $e^{-\gamma_{\delta} \Delta_{\max}} \leq 1/2$ 을 만족하는 Δ_{\max} , 즉 $\Delta_{\max} \geq \ln 2 / \gamma_{\delta}$,이면 임의의 $x(\tau) \in B_{\delta}$ 에 대하여 $x(\tau + \Delta_{\max}) \in B_{\delta/2}$, $t \geq \tau + \Delta_{\max}$,을 만족한다. 이상으

로 정리 3.4가 증명된다. ■

정리 3.4에서 K 를 K^m 으로, $x(t)$ 을 $x^m(t)$ 으로 대입하면 시스템의 모델 (2)에 대해서도 같은 결과를 얻는다. 지금까지는 선형귀환제어법을 사용할 수 있는 영역과 δ, Δ_{\max} 등의 변수 값을 선택하는 법에 대해 알아보았다. 다음으로 실제 시스템과 모델 시스템의 차이를 결정하는 가정 2.2 (다)에서 언급된 β 에 대하여 알아보자. 실제 시스템의 강인한 안정도를 증명하는데 있어 다음의 정리가 필요하다.

정리 3.5: 가정 2.1과 가정 2.2 (가), (나)를 만족한다고 가정하자. 시간 t_0 에서 초기조건 $x_0^p \in X_{\max}$ 에 대하여 $x(t), x^m(t) \in X_{\max}$, $t \geq t_0$,라고 가정한다. 임의 시간 t_i 에서 제어알고리즘을 적용했을 때 얻은 변수들을 위에서 언급한 바와 같이 $x_i^p, x_{i+1}^m, x_{i+1}^p, z_{i+1}^m$, 그리고 z_{i+1}^p 라 하자 (그림1 참조). 또한 가정 2.2 (다)를 만족하는 어떤 $\beta_{\max} \in (0, \infty)$ 가 존재한다고 가정하자. 그러면 임의의 $\delta \in (0, \delta_m)$ 에 대하여 $\beta_\delta \in (0, \beta_{\max})$ 가 존재하여 모든 $\beta \in (0, \beta_\delta)$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\|z_{i+1}^m - z_{i+1}^p\|_p \leq \delta / 2 \quad (10)$$

즉 β_δ 는 수식 (10)을 만족하게 하는 실제 시스템과 모델 시스템의 최대차이를 의미한다.

(증명) z_{i+1}^m 과 z_{i+1}^p 는 시간 t_{i+1} 에서 초기조건으로 각각 x_{i+1}^m, x_{i+1}^p 를, 입력은 최적제어문제 $P(x_{i+1}^m)$ 를 풀어 얻은 $u_{i+1}(t)$, $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$,을 수식 (2)에 적용하여 시간 $t_{i+1} + T_{i+1}$ 에서 계산된 상태들이다. 즉 시간 $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$ 에 대하여

$$\begin{aligned} z^m(t) &= f^m(z^m(t), u_{i+1}(t)), \quad z^m(t_{i+1}) = x_{i+1}^m \\ z^p(t) &= f^m(z^p(t), u_{i+1}(t)), \quad z^p(t_{i+1}) = x_{i+1}^p \end{aligned} \quad (11)$$

라 할 때 $z_{i+1}^m = z^m(t_{i+1} + T_{i+1}, t_{i+1}, x_{i+1}^m, u_{i+1})$, $z_{i+1}^p = z^p(t_{i+1} + T_{i+1}, t_{i+1}, x_{i+1}^p, u_{i+1})$ 로 정의된다. 그러면 모든 시간 $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$ 에 대하여 가정 2.1, 2.2에 의하여 다음이 만족된다.

$$\begin{aligned} \|z^m(t) - z^p(t)\|_p &\leq \int_{t_{i+1}}^t \|f^m(z^m(\tau), u_{i+1}(\tau)) - f^m(z^p(\tau), u_{i+1}(\tau))\|_p d\tau \\ &\quad + \|z^m(t_{i+1}) - z^p(t_{i+1})\|_p \\ &\leq \int_{t_{i+1}}^t L \|z^m(\tau) - z^p(\tau)\|_p d\tau \\ &\quad + \|z^m(t_{i+1}) - z^p(t_{i+1})\|_p \end{aligned}$$

그러면 Bellman-Gronwall 정리를 이용하면 모든 $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \|z^m(t) - z^p(t)\|_p &\leq \|z^m(t_{i+1}) - z^p(t_{i+1})\|_p e^{L(t-t_{i+1})} \\ &\leq \|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\|_p e^{LT_{i+1}} \end{aligned}$$

이 성립되며 가정에 의하여 $T_{i+1} \leq T_{\max}$ 이 만족되므로 다음을 얻는다.

$$\|z_{i+1}^m - z_{i+1}^p\|_p \leq \|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\|_p e^{LT_{\max}} \quad (12)$$

또한 x_{i+1}^m 과 x_{i+1}^p 는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} \|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\| &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f^m(x^m(t), u_i(t)) - f(x(t), u_i(t))\|_p dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f^m(x^m(t), u_i(t)) - f(x^m(t), u_i(t))\|_p \\ &\quad + \|f(x^m(t), u_i(t)) - f(x(t), u_i(t))\|_p dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta (\|x^m(t)\|_p + \|u_i(t)\|_p) \\ &\quad + L \|x^m(t) - x(t)\|_p dt \end{aligned}$$

모든 시간 t 에 대하여 $x^m(t) \in X_{\max}$, $u_i(t) \in \Omega$ 이고 $X_{\max} \subset R^n$ 와 $\Omega \subset R^m$ 은 compact 집합이므로 $\|x^m(t)\|_p \leq M$, $\|u_i(t)\|_p \leq M$, $t \geq t_0$,를 만족하는 어떤 $M \in (0, \infty)$ 이 존재한다. 따라서 위의 부등호에 Bellman-Gronwall 정리를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\|_p &\leq 2\beta M (t_{i+1} - t_i) e^{L(t_{i+1} - t_i)} \\ &= 2\beta M \Delta e^{L\Delta} \end{aligned} \quad (13)$$

수식 (13)을 수식 (12)에 대입하면

$$\|z_{i+1}^m - z_{i+1}^p\|_p \leq 2\beta M \Delta e^{L(T_{\max} + \Delta)} \quad (14)$$

을 얻는다. 따라서

$$\beta_\delta = \min\{\beta_{\max}, \delta / 4 M \Delta e^{L(T_{\max} + \Delta)}\} \quad (15)$$

로 정의하면 모든 $\beta \in (0, \beta_\delta)$ 에 대하여 수식 (10)이 만족되어 정리 3.5는 증명된다. ■

지금까지의 결과를 이용하여 동적구간 제어알고리즘의 강인성을 증명하자.

정리 3.6: 수식 (1)의 시스템이 수식 (2)로 모델 되었다고 가정하자. 또한 가정 2.1, 2.2, 3.1, 그리고 3.3이 만족된다고 가정한다. 여기에서 정의된 β 는 $(0, \beta_\delta)$

내에 있는 임의의 값으로 β_δ 는 수식 (15)에서 정의되었고 $\delta \in (0, \delta_m)$ 로 δ_m 은 가정 3.3에서 정의되었다. 또한 샘플 구간 $\Delta > \Delta_{\max}$ 로 최적제어문제 (6)을 해결하는데 걸리는 시간보다는 큰 값으로 Δ_{\max} 는 3.4에서 정의되었다. 이때 시스템 (1)에 동적구간 제어알고리즘을 적용하였을 때 시스템의 상태는 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\|x(t)\|_p \rightarrow 0$ 을 만족한다.

(증명) 시스템 상태의 sequence를 $\{x_i^j\}_{j=0}^\infty$ 라 할 때 한정된 반복 후에 $x_i^j \in B_\delta$ 임을 증명하면 이후의 입력은 선형귀환 제어입력이 되어 정리 3.2에 의하여 시스템이 안정하게 된다. 한정된 반복 후에 $x_i^j \in B_\delta$ 가 됨은 다음과 같이 증명한다. 시간 t_i 에서 측정된 상태 x_i^j 를 초기치로 하고 시간 t_{i+1} 까지 입력 $u_i(t)$ 을 모델 (2)에 적용하여 계산된 상태 x_{i+1}^m 를 이용하여 최적제어문제 $P(x_{i+1}^m)$ 를 풀어 얻은 최소 시간구간 T_{i+1} , 입력 $u_{i+1}(t)$, $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$, 그리고 이 구간의 마지막 상태를 z_{i+1}^m 라 하자. 반복되는 제어알고리즘의 단계 2에서 단계 5에 의하면 시간 t_{i+1} 에서 새로이 측정된 시스템의 state x_{i+1}^j 는 위에서 언급된 x_{i+1}^m 과는 오차가 있게 된다. x_{i+1}^j 를 초기치로 다시 같은 과정을 반복하면 시간구간 T_{i+2} , 입력 $u_{i+2}(\cdot)$, 그리고 z_{i+2}^m 를 얻게된다. 여기에서 z_{i+2}^m 은 x_{i+2}^m 을 초기치로 하여 모델 (2)에 입력 $u_{i+2}(t)$, $t \in [t_{i+2}, t_{i+2} + T_{i+2}]$,를 적용하여 얻은 것이다. 만약 이 입력 대신 $u_{i+1}(t)$, $t \in [t_{i+2}, t_{i+1} + T_{i+1}]$,을 적용하면 정리 3.5에서 정의된 z_{i+1}^j 가 된다. 그러면 최적제어문제의 제약조건에 의하여 $z_{i+1}^m, z_{i+2}^m \in B_{\delta/2}$ 이 되며 정리 3.5, $\|z_{i+1}^m - z_{i+1}^j\|_p \leq \delta/2$,에 의하여 $z_{i+1}^j \in B_\delta$ 가 된다. 그러면 정리 3.4에 의하여 선형귀환 제어입력 $u(t) = -Kx^m(t)$ 를 적용하면 Δ_{\max} 시간 이내에 상태는 $B_{\delta/2}$ -ball 내에 있게 된다. 시간구간 T_{i+2} 는 상태 x_{i+2}^m 에서 최적제어문제를 풀어 얻은 위의 조건을 만족하게 하는 최소의 시간구간이므로 $\Delta + T_{i+2} \leq T_{i+1} + \Delta_{\max}$ 를 만족한다. 즉 $T_{i+2} \leq T_{i+1} + \Delta_{\max} - \Delta$. 여기에서 $\Delta > \Delta_{\max}$ 이므로 sequence $\{T_i\}$ 는 최소한 $\Delta - \Delta_{\max} > 0$ 만큼 감소하게 된다. 또한 모든 $i \geq 0$ 에 대하여 $0 < T_i \leq T_{\max}$ 을 만족하므로 제어알고리즘의 최대 반복 횟수는 $T_{\max} / (\Delta - \Delta_{\max})$ 보다 큰 자연수 중에서 제일 작은 값이 된다. 따라서 어떤 $0 \leq i_0 < \infty$ 에서 $x_{i_0}^j \in B_\delta$ 를 만족하게 되고 이것으로 동적구간 제어 알고리즘의 강인성이 증명된다. ■

IV. 외란의 영향

외란이 있는 경우의 시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t)) \quad (16)$$

여기에서 $f: R^n \times R^m \times R^{m_d} \rightarrow R^n$ 는 연속미분 가능하며 $u \in U = \{u \in L^\infty[0, \infty) | u(t) \in \Omega_u, \forall t \geq 0\}$, 외란은 $d \in D = \{d \in L^\infty[0, \infty) | d(t) \in \Omega_d, \forall t \geq 0\}$ 을 만족한다. 여기에서 Ω_u, Ω_d 는 compact 집합으로 각각 $\Omega_u = \{z \in R^m | \|z\|_\infty \leq c_u\}$, $\Omega_d = \{z \in R^{m_d} | \|z\|_\infty \leq c_d\}$ 로 정의한다. 이 시스템의 외란은 알 수도 없고 예측할 수도 없으므로 다음과 같이 모델 한다.

$$\dot{x}^m(t) = f^m(x^m(t), u(t), 0) \quad (17)$$

고려하는 시스템 (16)과 이의 모델식 (17)은 다음과 같이 가정 2.2와 비슷한 가정을 필요로 한다.

가정 4.1: (가) 시스템 (16)과 이의 모델 (17)은 각각 $f(0, 0, 0) = 0, f^m(0, 0, 0) = 0$ 을 만족한다.

(나) $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 와 $f^m(\cdot, \cdot, \cdot)$ 는 Lipschitz 조건을 만족한다. 즉 어떤 $L \in (0, \infty)$ 이 존재하여 모든 $x_1(t), x_2(t) \in R^n, u_1, u_2 \in U, d_1, d_2 \in D$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \|f(x_1(t), u_1(t), d_1(t)) - f(x_2(t), u_2(t), d_2(t))\|_p \\ & \leq L(\|x_1(t) - x_2(t)\|_p + \|u_1(t) - u_2(t)\|_\infty \\ & \quad + \|d_1(t) - d_2(t)\|_\infty) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \|f^m(x_1(t), u_1(t), d_1(t)) - f^m(x_2(t), u_2(t), d_2(t))\|_p \\ & \leq L(\|x_1(t) - x_2(t)\|_p + \|u_1(t) - u_2(t)\|_\infty \\ & \quad + \|d_1(t) - d_2(t)\|_\infty) \end{aligned} \quad (19)$$

(다) 어떤 $\beta \in (0, \infty)$ 가 존재하여 모든 $x(t) \in R^n, u \in U, d \in D$ 에 대하여

$$\begin{aligned} & \|f(x(t), u(t), d(t)) - f^m(x(t), u(t), d(t))\|_p \\ & \leq \beta(\|x(t)\|_p + \|u(t)\|_\infty + \|d(t)\|_\infty) \end{aligned} \quad (20)$$

을 만족한다. ■

시스템에 외란이 있는 경우는 2장과 같이 시스템을 모델할 때 발생하는 오차와 같은 것으로 외란을 고려하면 안정성의 결과를 얻을 수 없다. 왜냐하면 모델시의 오차가 작을 때는 그 오차가 시스템의 안정성에 영향을 미치지 않을 수 있으나 외란의 경우에는 외란의

크기가 아무리 작아도 시스템의 상태변수를 원점으로 수렴하게 할 수는 없기 때문이다. 따라서 외란의 크기에 따른 상태변수의 접근성을 분석할 필요가 있다. 우선 주어진 외란이 원점근방에서 비선형 시스템 (1)에 어떤 영향을 끼치는가를 분석하자. 이를 위하여 시스템 식(16)과 이의 모델 (17)을 원점 근방에서 선형화한 식을 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_L(t) &= f_x(0, 0, 0)x_L(t) + f_u(0, 0, 0)u(t) \\ &\quad + f_d(0, 0, 0)d(t) \\ \dot{x}^m(t) &= f_x^m(0, 0, 0)x^m(t) + f_u^m(0, 0, 0)u(t) \\ &\quad + f_d^m(0, 0, 0)d(t)\end{aligned}\quad (21)$$

여기에서 $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_u(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_d(\cdot, \cdot, \cdot)$ 와 $f_x^m(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_u^m(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_d^m(\cdot, \cdot, \cdot)$ 은 각각 x , u , d 에 대한 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 와 $f^m(\cdot, \cdot, \cdot)$ 의 미분치들이고 $f_x(0, 0, 0)$, $f_x^m(0, 0, 0) \in R^{n \times n}$, $f_u(0, 0, 0)$, $f_u^m(0, 0, 0) \in R^{n \times m}$, $f_d(0, 0, 0)$, $f_d^m(0, 0, 0) \in R^{n \times m}$ 이다. 우선 다음의 가정이 필요하다.

가정 4.2: 선형화된 시스템 식 (6)의 $(f_x(0, 0, 0), f_u(0, 0, 0))$ 와 $(f_x^m(0, 0, 0), f_u^m(0, 0, 0))$ 은 제어가능쌍이라고 가정한다. ■

가정 4.2는 가정 3.1의 경우와 같이 원점근방에서 외란이 없는 경우 시스템 (21)을 점근적으로 안정화시키는 선형귀환 제어입력이 존재함을 보장한다. 외란이 있는 경우 선형귀환입력으로 상태변수를 원점으로 수렴시킬 수는 없으나 외란의 크기에 따른 상태변수의 범위를 다음과 같이 구할 수 있다.

정리 4.3: 가정 4.1, 4.2를 만족한다고 가정하자. 그러면 임의의 symmetric positive definite 행렬 $P \in R^{n \times n}$ 에 대하여 어떤 $\rho, c_d > 0$ 와 귀환이득 $K \in R^{n \times m}$ 이 존재하여 시간 τ 에서 시스템의 상태변수 $x(t)$ 가 $B_\rho = \{z \in R^n \mid \|z\|_\rho \leq \rho\}$ 안에 존재할 때 시스템 (16)에 선형귀환 제어입력 $u(t) = -Kx(t) \in \Omega_u$, $t \geq \tau$, 을 적용하면 어떤 시간 $\Delta_{\min} \geq 0$ 이 있어 $\|d(t)\|_\infty \leq c_d$ 을 만족하는 모든 외란에 대하여 시스템의 상태변수 $x(t)$ 는 모든 $t \geq \tau + \Delta_{\min}$ 에 대하여 $x(t) \in B_{\rho/2}$ 를 만족한다.

(증명) 참고문헌 [17]의 정리4.1과 본 논문의 정리 3.2를 이용하면 임의의 $0 < \varepsilon < \lambda_{\min}^0 / \lambda_{\max}^0$ 에 대하여 어떤 $\bar{\rho}, \bar{c}_d > 0$ 가 존재하여 모든 $\rho \in (0, \bar{\rho})$ 에 대하여

$c_d \leq \min(\bar{c}_d, \varepsilon \rho / 6 \sqrt{m} \|f_d(0, 0, 0)\|_\rho \lambda_{\max}^0)$ 를 선택하면 위의 정리를 증명할 수 있다. 이때 시간 Δ_{\min} 은 $3 \ln 4 / \varepsilon$ 이 된다. ■

2장에서 제시하는 동적구간제어 알고리즘을 시스템 (16)과 (17)에 적용하여 이 알고리즘에 의한 시스템의 상태를 분석하자. 우선 가정 2.4와 마찬가지로 선형귀환 입력을 사용 시에도 최적제어문제의 제약조건들을 만족해야 하므로 다음의 가정이 필요하다.

가정 4.4: 상수들 $\varepsilon, \alpha, \bar{\rho}, \bar{c}_d$ 이 정리 4.3에서의 관계를 만족하고 임의의 $\rho \leq \bar{\rho}$ 에 대하여 $c_d \leq \min(\bar{c}_d, \varepsilon \rho / 6\alpha)$ 을 만족한다고 가정한다. 또한 시간 τ 에서 $\|x(t)\|_\rho \leq \rho$ 을 만족할 때 $\|d(t)\|_\infty \leq c_d$ 을 만족하는 모든 외란에 대하여 입력 $u(t) = -Kx(t)$, $t \geq \tau$,는 최적제어문제의 제약조건 $\phi^i(x, u) \leq 0$, $j = 1, \dots, l$,을 만족한다고 가정한다. ■

최적제어문제 (6)은 시스템의 모델식에 의하여 제어입력을 구한 것으로 이 입력을 실제 시스템에 적용할 때 외란 및 모델링 오차로 인하여 상태변수가 B_ρ 집합에 포함된다는 보장을 할 수 없다. 그러면 동적구간 제어알고리즘에서 선형귀환 제어입력을 적용할 수 없게 되고 결국 무한의 시간이 흘러도 선형귀환제어 입력을 적용할 수 없게 될지도 모른다. 또한 상태변수가 B_ρ 집합에 포함된다 해도 만약 시간구간 T_i 가 줄어들지 않으면 모든 샘플링 시간 t_i 에서 선형귀환제어 입력을 적용할 기회가 없게 될 수도 있다. 따라서 두가지 사항을 증명하여야 한다. 첫째는 최적제어문제의 해인 제어입력을 실제 시스템에 적용할 때 상태변수는 B_ρ 집합에 포함된다는 것이고 둘째는 한정된 샘플 후에 시스템의 상태변수는 B_ρ 집합에 포함되어 동적구간 제어 알고리즘의 단계3에 의하여 선형귀환 제어입력이 이용된다는 것이다. 이들의 증명은 아래의 정리에서 요약된다. 우선 수식을 간단히 하기 위해 시간 t_{i+1} 에서 시스템과 모델의 상태변수를 $x_{i+1}^p = x^p(t_{i+1})$, t_i, x_i^p, u, d , $x_{i+1}^m = x^m(t_{i+1}, t_i, x_i^p, u, 0)$, 최적제어문제 $P(x_{i+1}^p)$ 을 풀어 얻은 입력 $u_{[t_i, t_i+T_{i+1}]}$ 을 실제 시스템과 모델 시스템에 적용하였을 때 시간 $t = t_{i+1} + T_{i+1}$ 에서의 상태변수를 각각 $z_{i+1}^p = z^p(t_{i+1} + T_{i+1}, t_{i+1}, x_{i+1}^p, u_{i+1}, d)$ 그리고 $z_{i+1}^m = z^m(t_{i+1} + T_{i+1}, t_{i+1}, x_{i+1}^m, u_{i+1}, 0)$ 로 정의한다.

정리 4.5: 가정 4.1, 4.2, 4.4를 만족한다고 가정하자. 또한 상수들 $\varepsilon, \alpha, \bar{\rho}, \bar{c}_d$ 이 정리 4.3에서의 관계를

만족하는 값이라 하자. 그러면 임의의 $\rho \in (0, \bar{\rho}]$ 에 대하여 어떤 $c_d, \beta > 0$ 가 존재하여 $\|d(t)\|_\infty \leq c_d$ 를 만족하는 모든 외란에 대하여 가정 4.1 (다)가 만족될 때 최적제어문제의 해인 제어입력을 적용하면 시스템의 상태변수는 $t = t_i + T_i$ 에서 $x(t) \in B_\rho$ 을 만족하게 한다.

(증명) 주어진 동적구간제어 알고리즘은 모델시스템을 이용하는데 최적제어문제의 제약조건에 의하여 모델 시스템의 상태변수가 $\|z_{i+1}^m\|_\rho \leq \rho/2$ 를 만족하게 된다. 그러면 실제 시스템과 모델의 상태변수는 모든 $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$ 에 대하여 $z^m(t) = z^m(t, t_{i+1}, z_{i+1}^m, u_{i+1}, 0)$, $z^p(t) = z^p(t, t_{i+1}, z_{i+1}^p, u_{i+1}, d)$ 라 할 때 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \|z^m(t) - z^p(t)\|_\rho \\ & \leq \int_{t_{i+1}}^t \|f^m(z^m(\tau), u_{i+1}(\tau), 0) - f^m(z^p(\tau), u_{i+1}(\tau), d(\tau))\|_\rho d\tau \\ & \quad + \|z^m(t_{i+1}) - z^p(t_{i+1})\|_\rho \\ & \leq \int_{t_{i+1}}^t L(\|z^m(\tau) - z^p(\tau)\|_\rho + \|d(\tau)\|_\infty) d\tau \\ & \quad + \|z^m(t_{i+1}) - z^p(t_{i+1})\|_\rho \end{aligned}$$

그러면 Bellman-Gronwall 정리를 이용하면 다음이 만족된다.

$$\begin{aligned} & \|z^m(t) - z^p(t)\|_\rho \\ & \leq (\|z^m(t_{i+1}) - z^p(t_{i+1})\|_\rho + Lc_d T_{i+1}) e^{L(t-t_{i+1})} \quad (22) \\ & \leq (\|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\|_\rho + Lc_d T_{i+1}) e^{L T_{i+1}} \end{aligned}$$

상태변수 $x \in X$, X 는 compact 집합, 에 대한 최적 제어문제 $P(x)$ 의 해인 시간구간을 T_x 라 할 때 X 가 compact이므로 $\max_{x \in X} T_x = T_{\max}$ 는 한정된 값을 갖게 된다. 그러면 (22)은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \|z_{i+1}^m - z_{i+1}^p\|_\rho \\ & \leq (\|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\|_\rho + Lc_d T_{\max}) e^{L T_{\max}} \quad (23) \end{aligned}$$

또한 x_{i+1}^m 과 x_{i+1}^p 는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\|_\rho \\ & \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f^m(x^m(t), u_i(t), 0) - f(x(t), u_i(t), d(t))\|_\rho dt \\ & \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f^m(x^m(t), u_i(t), 0) - f(x^m(t), u_i(t), 0)\|_\rho \\ & \quad + \|f(x^m(t), u_i(t), 0) - f(x(t), u_i(t), d(t))\|_\rho dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta(\|x^m(t)\|_\rho + \|u_i(t)\|_\rho) \\ & \quad + L(\|x^m(t) - x(t)\|_\rho + \|d(t)\|_\infty) dt \end{aligned}$$

시스템의 상태변수는 초기값이 한정되어 있고 제어 입력도 compact 집합 내에 있고 더구나 최적제어문제에 의하여 얻어진 제어입력은 상태변수를 $B_{\rho/2}$ 내에 있게 하므로 모든 시간 $t \geq t_i$ 에 대하여 $\|x^m(t)\|_\rho \leq \bar{M}$, $\|u_i(t)\|_\rho \leq \bar{c}_u$ 를 만족하는 어떤 $\bar{M}, \bar{c}_u \in (0, \infty)$ 이 존재한다. 또한 $\|d(t)\|_\infty \leq c_d$ 이므로 위의 부등호에 Bellman-Gronwall 정리를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \|x_{i+1}^m - x_{i+1}^p\|_\rho \\ & \leq (\beta(\bar{M} + \bar{c}_u) + Lc_d)(t_{i+1} - t_i) e^{L(t_{i+1} - t_i)} \quad (24) \\ & = (\beta(\bar{M} + \bar{c}_u) + Lc_d)\Delta e^{L\Delta} \end{aligned}$$

여기에서 $\Delta = t_{i+1} - t_i$ 는 샘플링 시간이다. 수식 (23) 을 수식 (22)에 대입하면

$$\begin{aligned} & \|z_{i+1}^m - z_{i+1}^p\|_\rho \\ & \leq (\beta(\bar{M} + \bar{c}_u) + Lc_d)\Delta e^{L(T_{\max} + \Delta)} + Lc_d T_{\max} e^{L T_{\max}} \quad (25) \end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 임의의 $\rho \in (0, \bar{\rho}]$ 에 대하여 적절한 $\hat{\beta}$ 와 \hat{c}_d 를 선택하여 다음을 만족하게 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\hat{\beta}(\bar{M} + \bar{c}_u) + L\hat{c}_d)\Delta e^{L(T_{\max} + \Delta)} \\ & \quad + L\hat{c}_d T_{\max} e^{L T_{\max}} \leq \rho/2 \end{aligned}$$

그러면 임의의 $\beta \in [0, \hat{\beta}]$, $c_d \leq \min(\bar{c}_d, \hat{c}_d, \epsilon \rho/6\alpha)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} & \|z_{i+1}^p\|_\rho \leq \|z_{i+1}^p - z_{i+1}^m\|_\rho + \|z_{i+1}^m\|_\rho \\ & \leq \rho/2 + \rho/2 = \rho \end{aligned}$$

이 만족되므로 시스템의 상태변수는 시간 $t_{i+1} + T_{i+1}$ 에서 B_ρ 내에 존재하게 되어 정리가 증명된다. ■

정리 4.5에 의하면 $c_d \rightarrow 0$ 이면 어떤 $\beta_{\max} > 0$ 가 있어 모든 $\beta < \beta_{\max}$ 에 대하여 상태변수는 $t \rightarrow \infty$ 일 때 원점으로 수렴하게 된다.

정리 4.6: 가정 4.1, 4.2, 4.4가 만족된다고 가정한다. 상수 ρ, c_d 는 정리 4.5에서 처럼 정의됐다고 가정하자. 또한 Δ_{\min} 는 정리 4.3에서 처럼 정의됐다고 가정하자. 그러면 샘플구간 Δ 가 $\Delta > \Delta_{\min}$ 을 만족할 때 시스템 (16)에 동적구간 제어알고리즘을 적용하면 한정된

시간 내에 시스템의 상태변수는 B_ρ 집합 내에 있게 된다.

(증명) 각 샘플시간에서의 시스템 상태변수를 $\{x_j^i\}_{j=0}^\infty$ 라 할 때 한정된 반복 후에 $x_i^i \in B_\rho$ 임을 증명하면 이후의 입력은 선형귀환 제어입력이 되어 정리가 증명된다.

한정된 반복 후에 $x_i^i \in B_\rho$ 가 됨은 다음과 같이 증명한다. 시간 t_i 에서 측정된 상태변수 x_i^i 를 초기치로 하고 시간 t_{i+1} 까지 입력 $u_i(t)$ 을 모델 (17)에 적용하여 계산된 상태변수 x_{i+1}^m 를 이용하여 최적제어문제 $P(x_{i+1}^m)$ 를 풀어 얻은 최소 시간구간을 T_{i+1} , 입력을 $u_{i+1}(t)$, $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{i+1}]$, 그리고 이 구간의 마지막 순간의 상태변수를 z_{i+1}^m 라 하자. 반복되는 제어알고리즘의 단계 2에서 단계 5에 의하면 시간 t_{i+1} 에서 새로이 측정된 시스템의 상태변수 x_{i+1}^i 는 위에서 언급된 z_{i+1}^m 과는 오차가 있게 된다. x_{i+1}^i 를 초기치로 다시 같은 과정을 반복하면 시간구간 T_{i+2} , 입력 $u_{i+2}(\cdot)$, 그리고 z_{i+2}^m 를 얻게된다. 여기에서 z_{i+2}^m 은 x_{i+2}^m 을 초기치로 하여 모델(17)에 입력 $u_{i+2}(t)$, $t \in [t_{i+2}, t_{i+2} + T_{i+2}]$,를 적용하여 얻은 것이다. 만약 이 입력 대신 $u_{i+1}(t)$, $t \in [t_{i+2}, t_{i+1} + T_{i+1}]$,을 적용하면 정리 4.5에서 정의된 z_{i+1}^i 가 된다. 그러면 최적제어문제의 제약조건에 의하여 $z_{i+1}^m, z_{i+2}^m \in B_{\rho/2}$ 이 되며 정리 4.5, $\|z_{i+1}^m - z_{i+1}^i\|_\rho \leq \rho/2$,에 의하여 $z_{i+1}^i \in B_\rho$ 가 된다. 그러면 정리 4.3에 의하여 선형귀환 제어입력 $u(t) = -Kx^m(t)$ 를 적용하면 Δ_{\min} 시간 이내에 상태변수는 $B_{\rho/2}$ -ball 내에 있게 된다. 시간구간 T_{i+2} 는 상태변수 x_{i+2}^m 에서 최적제어문제를 풀어 얻은 위의 조건을 만족하게 하는 최소의 시간구간이므로 $\Delta + T_{i+2} \leq T_{i+1} + \Delta_{\min}$, 즉 $T_{i+2} \leq T_{i+1} + \Delta_{\min} - \Delta$ 을 만족한다. 여기에서 $\Delta > \Delta_{\min}$ 이므로 T_i 는 매번 최소한 $\Delta - \Delta_{\min} > 0$ 만큼 감소하게 된다. 또한 모든 $i \geq 0$ 에 대하여 $0 < T_i \leq T_{\max}$ 을 만족하므로 제어알고리즘의 최대 반복 횟수는 $T_{\max} / (\Delta - \Delta_{\min})$ 보다 큰 자연수 중에서 제일 작은 값이 된다. 따라서 어떤 $0 \leq i_0 < \infty$ 에서 $x_{i_0}^i \in B_\rho$ 를 만족하게 되므로 정리가 증명된다. ■

정리 4.5와 4.6에 의하여 동적구간제어 알고리즘은 시스템의 상태변수를 한정된 시간 내에 B_ρ 집합 내에 있게 하고 이후부터는 선형귀환 제어입력에 의하여 $\|d(t)\|_\infty \leq c_d$ 을 만족하는 모든 외란에 대하여 궁극적으로 상태변수가 $B_{\rho/2}$ 내에 존재하게 한다.

V. 결 론

본 연구에서는 계속적으로 최적제어문제를 풀어 제어입력을 얻는 동적구간 제어법이 모델링 오차가 있을 때나 외란이 있는 경우에도 시스템의 상태변수를 원점 근방으로 수렴하게 함을 입증하였다. 일반적인 동적구간제어법에서는 최적제어문제를 풀 때 걸리는 시간을 고려하지 않아 실질적인 제어입력을 적용할 때 오차가 계속적으로 발생하여 강인성의 문제뿐만 아니라 외란이 있는 경우 제어의 문제가 있을 수 있으나 본 논문에서는 이러한 계산 시간을 고려하여 이론적으로 강인성을 입증함으로써 여러 문제점을 해결하였다. 또한 각 시간구간을 가변으로 함으로써 시스템의 상태가 원점에 접근할수록 시간구간이 줄어들고 궁극적으로 시스템의 상태가 어떤 ρ -ball 안에 들어가면 선형귀환 제어 입력을 사용하여 보다 간편하게 알고리즘을 사용할 수 있게 하였다. 또한 외란의 크기에 따른 시스템 상태변수의 수렴구간을 수학적으로 수식화하여 외란에 따른 상태변수의 관계를 규명하였다.

참 고 문 헌

- [1] Y. Arkun, "Design of steady-state optimizing control structures for chemical processes," Ph.D Thesis, University of Minnesota, 1978.
- [2] J.S. Chang, B.K. Kin, and Z. Bien, "Predictive control of a plant with saturating actuators," Jour. of the Korean Institute of Telematics and Electronics, Vol. 29-B, No. 12, Dec. 1992.
- [3] C. C. Chen and L. Shaw, "On receding horizon feedback control," Automatica, Vol. 18, pp. 349-352, 1982.
- [4] D. W. Clarke, "Application of generalized predictive control to industrial processes," IEEE Control System Magazine, pp. 49-55, April, 1988.
- [5] D.W. Clarke, C.Mohtadi, and P.S.Tuffs, "Generalized predictive control. Part I: The basic algorithm," Automatica, Vol. 23, pp. 137-148, 1987.
- [6] D.W. Clarke, C.Mohtadi, and P.S. Tuffs,

- “Generalized predictive control. Part II: Extentions and interpretations,” *Automatica*, Vol. 23, pp. 149-160, 1987.
- [7] C.E. Garcia, D.M. Prett, and M. Morari, “Model predictive control: Theory and practice - a survey,” *Automatica*, Vol. 25, pp. 335-348, 1989.
- [8] W.H. Kwon and A.E. Pearson, “A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-22, No. 5, pp. 838-842, 1977.
- [9] W.H. Kwon, A.N. Bruckstein, and T. Kailath, “Stabilizing state feedback design via the moving horizon method,” *Int. J. Control*, Vol. 37, No. 3, pp. 631-643, 1983.
- [10] T.N. Matsko, “Internal model control for chemical recovery,” *Chem. Engng. Prog.*, Vol. 81, No. 12, pp. 46-51, 1985.
- [11] D.Q. Mayne and H. Michalska, “Receding horizon control of nonlinear systems,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 7, pp. 814-824, 1990.
- [12] H. Michalska and D.Q. Mayne, “Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-38, No. 11, pp. 1623-1633, November 1993.
- [13] J.R. Parrish and C.B. Brosilow, “Inferential control application,” *Automatica*, Vol. 21, pp. 527-538, 1985.
- [14] E. Polak and T.H. Yang, “Moving horizon control of linear system with input saturation and plant uncertainty: Part 1. Robustness,” *Int. J. Control* Vol. 58 No. 3, pp. 613-638 1993.
- [15] E. Polak and T.H. Yang, “Moving horizon control of linear system with input saturation and plane uncertainty: Part 2. Disturbance Rejection and Tracking,” *Int. J. Control* Vol. 58 No. 3 pp. 639-663, 1993.
- [16] D.M. Prett and R.D. Gillette, “Optimization and constrained multivariable control of catalytic cracking unit,” *AICHE. National Mtg.*, Houston, Texas, 1979.
- [17] T.H. Yang and E. Polak, “Moving horizon control of nonlinear systems with input saturation, disturbances, and plane uncertainty,” *Int. J. Control* Vol. 58 No. 4 pp. 875-903, 1993.
- [18] E. Zafiriou, “Robust model predictive control of processes with hard constraints,” *Computer Chem. Engng.* Vol. 14, No. 4/5, pp. 359-371, 1990.
- [19] Y. Lino and T. Shigemase, “A Model Predictive Controller with Nonlinear Observer Applied to a Gas Absorption Process,” *Proceeding of Int. Workshop on Predictive and Receding Horizon Control*, Seoul, Korea, pp. 58-65, Oct. 1995.
- [20] T. Yoon and D. Clarke, “Observer design in receding horizon predictive control,” *Int. J. Control*, Vol 61. No. 1, pp 171-191, 1995.
- [21] Y. Xi, “Satisfactory Control of Complex Industrial Process,” *Proceeding of Int. Workshop on Predictive and Receding Horizon Control*, Seoul, Korea, pp. 105-111, Oct. 1995.

 저 자 소 개

梁 玄 錫(正會員) 第 31卷 B編 第 9號 參照

 현재 홍익대학교 전자전기공학부
 조교수