

論文96-33B-9-4

삼각형 셀룰러 순열 네트워크에서의 단일 s-a-E 결함 허용

(Single S-a-E Fault Tolerance of the Triangular Cellular Permutation Networks)

金 宇 漢 *, 田 大 成 **, 尹 英 雨 **

(Woo-Han Kim, Dae-Seong Jeoune, and Young-Woo Yoon)

요 약

삼각형 셀룰러 순열 네트워크에서 단일 s-a-E 결함의 발생이 검출되었을 때, 경로를 재구성함으로써 고장을 허용하는 방안을 제시하고 그 가능성을 분석한다. 네트워크의 경로는 순열을 좌잉여류 또는 우잉여류로 반복 분해함으로써 구성된다. 오름차순의 사상이 경유하는 셀의 s-a-E 결함일 때는 분해 방식을 우잉여류에서 좌잉여류로 바꾸거나 좌잉여류에서 우잉여류로 바꾼다. 내림차순 사상이 경유하는 셀의 s-a-E 결함일 때는 우회경로를 구성한다. 네트워크에 내재한 연결성을 이용하여 경로를 재구성하는 방안은 입력단자수 $n=4$ 일 때 17%로부터 $n=40$ 일 때 90%의 순열을 허용한다. 입력단자 1과 n 을 교환하고 출력단자 1과 n 을 교환하면 우회 경로를 구성할 가능성이 높아져서 평균 99% 이상의 순열을 허용한다. 또한, 인접 셀의 입력단자들 및 출력단자들끼리 서로 교환하면 100%의 순열을 허용한다.

Abstract

In this paper, for the single s-a-E fault detected in a triangular cellular permutation network (TCPN), we propose a method which can tolerate a fault by reconfiguring the network and analyze the possibilities of the reconfiguration. The network is set up through iterative decomposition of a permutation into the right or left coset. For the s-a-E fault of a cell which is to be transpositioned for an increasing order mapping, we can reconfigure it merely by switching the decomposition scheme from right coset to left coset or vice versa. Also for a decreasing order mapping, we make a detour around the faulty cell. Reconfiguring with the redundant connectivity of a TCPN, we could realize from 17% to 90% of the permutation for the number of inputs from 4 to 40. Reconfiguration of the network by exchanging the first input with the last input and the first output with the last output resulted in more than 99% realization of the permutation. Also with the exchange of all inputs and outputs with neighboring cells, we could have 100% realization of the permutation.

I. 서 론

병렬 컴퓨터 내부에서 프로세서간의 통신을 담당하

* 正會員, 慶東專門大學 電子計算科

(Dept. of Computer Science, Kyungdong Junior College)

** 正會員, 嶺南大學校 電算工學科

(Dept. of Computer Engineering, Yeungnam University)

接受日字:1996年5月21日, 수정완료일:1996年8月26日

게 되는 것을 상호연결 네트워크(Interconnection Networks : IN)라고 한다. 이들 IN에는 여러 가지 종류가 있는데 이들중 재배열 가능(rearrangeable)하면서 언블러킹(non-blocking)인 네트워크에 셀룰러 순열 네트워크(Cellular Permutation Networks : CPN)가 있다^{1,2,3,4}. CPN은 스위치의 개수가 Benes^[5], Clos^[6] 네트워크와 같은 다른 IN에 비해 다소 많지만 자료 전달시간이 짧다는 장점이 있다. 또 셀의 사용으로 인하여 연결이 지역적이 되고, n 입력 CPN의 경로설정 시간 및 자료 전달지연이 $O(n)$ 으로 같으므로 자료의 전송이 순열

의 해독과 병행하여 행해질 수 있다. CPN중에서 특히 삼각형 배열은 $n(n-1)/2$ 개의 스위치로 구성되어 같은 CPN들중 스위치의 개수가 적은 편이며 인접 셀들끼리만 연결되는 배열 특성으로 인하여 VLSI 구현에도 매우 적합하다^[7]. 또 최근에는 이러한 삼각형 배열의 셀룰러 순열 네트워크(Triangular CPN : TCPN)를 위한 효율적인 경로 설정 및 제어 알고리즘^[8,9,10]도 제안된 바 있다.

지금까지 일반적인 다단계 상호연결 네트워크에 대한 신뢰도 분석 및 결합 허용에 관한 연구는 계속 행해져 왔다^[11,12]. 그러나 CPN은 내재된 여분 경로의 해석에 따른 어려움으로 인하여 이러한 연구가 제대로 수행된 바가 없다. 최근에 이루어진 CPN의 결합 진단에 관한 연구^[13]에 따르면 단일 결합에 대한 결합 검출은 네트워크의 크기에 관계없이 6번의 테스트로 가능하고, 결합 위치는 네트워크의 크기에 관계없이 7번의 테스트 후에 결정할 수 있다. 이러한 결합 검출에 관한 연구를 바탕으로한 결합 허용에 관한 연구는 현재까지 행해진 바가 없으므로 본 연구에서는 이에 주안점을 둔다.

본 논문은 TCPN에서 검출된 단일 결합중 s-a-E 결합을 최소의 비용으로 허용할 수 있는 방안에 관한 연구로서 2장에서는 TCPN의 구조, 제어 및 결합모델에 대해 설명하고, 3장에서는 TCPN에 내재된 여분의 연결성을 이용하여 경로를 재구성하는 방안을 설명하며, 4장에서는 입력단자 1과 n을 교환하고 출력단자 1과 n을 교환하여 경로 재구성 가능성을 높이는 방안과 인접한 셀의 입력과 출력단자들을 서로 교환함으로써 경로 재구성 가능성을 높이는 방법을 설명한다.

II. TCPN의 구조, 제어 및 결합모델

1. TCPN의 구조

CPN은 순열 셀(permutation cell)이라 불리는 기본 스위칭 소자들의 2차원 배열로 구성된다. 이 셀의 기본 상태는 그림 1에 나타난 바와 같이 두 가지로서, 각각 identity(E) 상태와 transposition(T) 상태이다. Identity 상태는 입력 x에서 출력 x로, 입력 y에서 출력 y로 연결된 상태이고, transposition 상태는 입력 x에서 출력 y로, 입력 y에서 출력 x로 연결된 상태이다.

기본 셀들의 2차원 배열로 삼각형, 정사각형, 친-정사각형(almost-square), 다이아몬드, 직사각형, 사다리

꼴, 평행사변형 등의 여러 가지 형태^[11]를 구성할 수 있는데, 본 연구에서는 Oruc의 제어 알고리즘^[9]이 적용되었고 단일 결합 검출에 대한 연구^[13]가 이루어진 바 있는 삼각형 배열만을 고려한다.

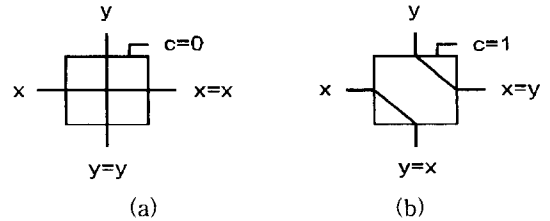


그림 1. 셀의 기본 상태

(a) identity(E) 상태 (b) transposition(T) 상태

Fig. 1. The states of a permutation cell.

(a) identity(E) state (b) transposition(T) state

삼각형 배열은 사각형 배열에서 대각선상의 스위치들을 제거하고 대각선에 대해 대칭으로 접은 것으로 볼 수 있다. 이 삼각형 배열 형태의 n-입력 CPN 제어 알고리즘을 Oruc이 제안하였는데, 이러한 삼각형 배열의 가장 큰 장점은 스위치의 수가 $n(n-1)/2$ 개로서 위에 언급한 다른 배열들보다 적은편이라는 것이다. $n = 8$ 인 삼각형 배열에서 순열 $P = (12345678)$ 을 Oruc의 제어 알고리즘을 적용하여 실행한 예를 그림 2에 나타낸다.

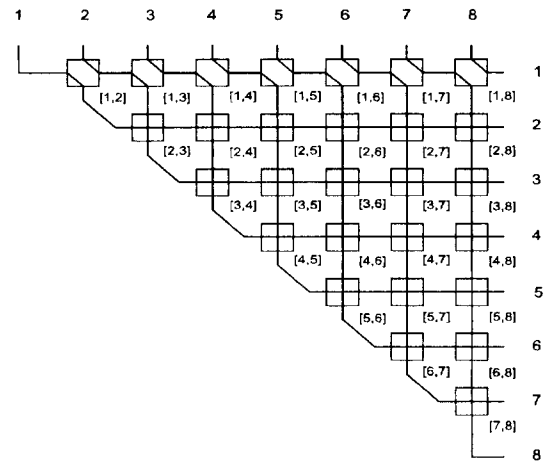


그림 2. Oruc의 제어 알고리즘을 적용한 삼각형 배열의 예

Fig. 2. The realization of the permutation $P = (12345678)$ with Oruc's algorithm.

2. TCPN의 제어

순열망(Σ, S, D, Σ)로 나타낼 수 있는데, S는 입력집

합을 뜻하는 기호이며 D는 출력집합을 뜻하는 기호이고 Σ 는 S의 D에 대한 사상의 집합을 뜻한다. 사상에만 관계되므로 입출력기호 S와 D를 위치 $(1, 2, \dots, n)$ 로 나타내기로 하고 $ij \in S, P \in \Sigma$ 에서 사상 P에 따라 i에서 j로의 연결을 $(i)P=j$ 로 나타내기로 한다. 순열을 사이클로 나타낼 때는 $P=(s_1 s_2 \dots s_n)$ 으로 나타내기로 한다.

$|S|=n$ 인 S에 대한 모든 순열의 집합을 Σ_n 로 나타내고 집합 Σ_n 에 대한 사상을 \circ 로 나타내기로 한다. ($\Sigma_n \circ$)은 群(group)의 특성을 가지므로 剩餘類(coset)^[14]로 분해할 수 있다. Σ_n 을 右剩餘類(right coset)와 左剩餘類(left coset)로 나타내면 각각 식(1)(2)와 같다. 여기에서 $(\Sigma_{n-1} \circ), (\Sigma_n \circ)$ 등은 모두 $(\Sigma_n \circ)$ 의 部分群들이며, 移項(transposition)^[15] $(1\ n), (2\ n), \dots, (1\ 2)$ 등은 모두 잉여류 선도이항(coset leader)들이다. $i < j$ 인 경우 이항을 $(i\ j)$ 로 표기하기로 한다.

$$\Sigma_n = \Sigma_{n-1}e + \Sigma_{n-1}(1\ n) + \Sigma_{n-1}(2\ n) + \dots + \Sigma_{n-1}(n-1\ n) \quad (1)$$

$$\Sigma_{n-1} = \Sigma_{n-2}e + \Sigma_{n-2}(1\ n-1) + \Sigma_{n-2}(2\ n-1) + \dots + \Sigma_{n-2}(n-2\ n-1)$$

:

$$\Sigma_3 = \Sigma_2e + \Sigma_2(1\ 3) + \Sigma_2(2\ 3)$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_1e + \Sigma_1(1\ 2) = (e, (1\ 2))$$

$$\Sigma_n = e\Sigma_{n-1} + (1\ n)\Sigma_{n-1} + (2\ n)\Sigma_{n-1} + \dots + (n-1\ n)\Sigma_{n-1} \quad (2)$$

$$\Sigma_{n-1} = e\Sigma_{n-2} + (1\ n-1)\Sigma_{n-2} + (2\ n-1)\Sigma_{n-2} + \dots + (n-2\ n-1)\Sigma_{n-2}$$

:

$$\Sigma_3 = e\Sigma_2 + (1\ 3)\Sigma_2 + (2\ 3)\Sigma_2$$

$$\Sigma_2 = e\Sigma_1 + (1\ 2)\Sigma_1 = (e, (1\ 2))$$

순열망의 제어에 관한 Oruc의 알고리즘^[9]은 주어진 순열에 대하여 좌잉여류 또는 우잉여류로 순환적으로 분해하는 것이다. 우잉여류로 분해할 때에는 가장 큰 기호부터 순환적으로 이항을 분리하기 시작한다. 우잉여류 분해과정에서 $\{1, \dots, k\}$ 에 대한 순열을 P'_k 라 하면, $P'_k = P'_{k-1} \circ ((k)P'_k\ k)$ 이므로 $P'_{k-1} = P'_k \circ ((k)P'_k\ k)$ 가 된다. 이러한 관계를 이용하여 분해하면 식 (3)과 같이 된다.

$$P'_{n-1} = P'_n \cdot ((n)P'_n\ n) \quad (3)$$

$$P'_{n-2} = P'_{n-1} \cdot ((n-1)P'_{n-1}\ n-1)$$

:

$$P'_2 = P'_3 \cdot ((3)P'_3\ 3)$$

$$P'_1 = P'_2 \cdot ((2)P'_2\ 2)$$

분해된 순열 $P' = P'_2 \cdot ((2)P'_2\ 2) \cdot ((3)P'_3\ 3) \dots ((n-1)P'_{n-1}\ n-1) \cdot ((n)P'_n\ n)$ 이 된다.

(예 1) $P = (1\ 4)(2\ 7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8)$ 에서 가장 큰수 9부터 시작

$$P_9 = P_8 \circ (P_9(9)\ 9)에서$$

$$P_8 = (1\ 4)(2\ 7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8)(2\ 9) = (1\ 4)(2\ 7)(3\ 6\ 5\ 8)$$

$$P_8 = P_7 \circ (P_8(8)\ 8)에서$$

$$P_7 = (1\ 4)(2\ 7)(3\ 6\ 5\ 8)(3\ 8) = (1\ 4)(2\ 7)(3\ 6\ 5)$$

$$P_7 = P_6 \circ (P_7(7)\ 7)에서$$

$$P_6 = (1\ 4)(2\ 7)(3\ 6\ 5)(2\ 7) = (1\ 4)(3\ 6\ 5)$$

$$P_6 = P_5 \circ (P_6(6)\ 6)에서$$

$$P_5 = (1\ 4)(3\ 6\ 5)(5\ 6) = (1\ 4)(3\ 5)$$

$$\therefore P' = (1\ 4)(3\ 5)(5\ 6)(2\ 7)(3\ 8)(2\ 9)$$

좌잉여류로 분해할 때에는 가장 작은 기호부터 순환적으로 이항을 분리하기 시작한다. 좌잉여류 분해과정에서 $\{k, \dots, n\}$ 에 대한 순열을 P'_k 라 하면, $P'_k = (k(k)P'_k\ k) \circ P'_{k+1}$ 이므로 $P'_{k+1} = (k(k)P'_k\ k) \circ P'_k$ 가 된다. 이러한 관계를 이용하여 분해하면 식(4)와 같이 된다.

$$P'_2 = (1\ (1)P'_1\ 1) \cdot P'_1 \quad (4)$$

$$P'_3 = (2\ (2)P'_2\ 2) \cdot P'_2$$

:

$$P'_{n-1} = (n-2\ (n-2)P'_{n-2}\ n-2) \cdot P'_{n-2}$$

$$P'_n = (n-1\ (n-1)P'_{n-1}\ n-1) \cdot P'_{n-1}$$

분해된 순열 $P' = (1\ (1)P'_1\ 1)(2\ (2)P'_2\ 2) \dots (n-2\ (n-2)P'_{n-2}\ n-2)(n-1\ (n-1)P'_{n-1}\ n-1) \cdot P'_{n-1}$ 이 된다.

(예 2) $P = (1\ 4)(2\ 7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8)$ 에서 가장 작은수 1부터 시작

$$P_1 = (1\ P_1^{-1}(1)) \circ P_2에서$$

$$P_2 = (1\ 4)(1\ 4)(2\ 7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8) = (2\ 7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8)$$

$$P_2 = (2\ P_2^{-1}(2)) \circ P_3에서$$

$$P_3 = (2\ 9)(2\ 7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8) = (7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8)$$

$$P_3 = (3\ P_3^{-1}(3)) \circ P_4에서$$

$$P_4 = (3\ 8)(7\ 9)(3\ 6\ 5\ 8) = (7\ 9)(6\ 5\ 8)$$

$$P_4 = (4\ P_4^{-1}(4)) \circ P_5에서$$

$$P_5 = (4\ 4)(7\ 9)(6\ 5\ 8) = (7\ 9)(6\ 5\ 8)$$

$$P_5 = (5\ P_5^{-1}(5)) \circ P_6에서$$

$$P_6 = (5\ 6)(7\ 9)(6\ 5\ 8) = (7\ 9)(6\ 8)$$

$$\therefore P' = (1\ 4)(2\ 9)(3\ 8)(5\ 6)(7\ 9)(6\ 8)$$

분해된 순열의 각 이항은 T상태로 되는 셀을 나타낸다. 예를 들어, 이항 (i j)가 있으면 j행 i열의 셀을 T상태로 한다. 그림 3에서 (예 1)과 (예 2)의 T상태로 되는 셀을 *로 나타낸다.

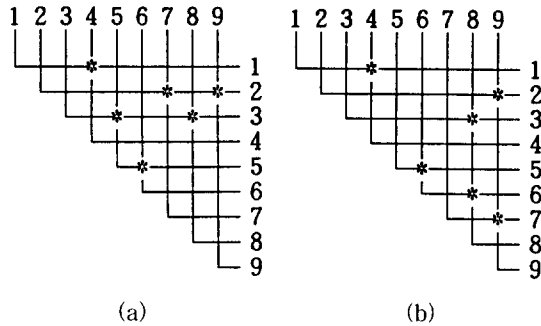


그림 3. 잉여류 분해를 이용한 CPN의 연결
 (a) 우잉여류에 의한 분해
 (b) 좌잉여류에 의한 분해
 Fig. 3. Setup of a CPN by decomposition with right/left coset.
 (a) Decomposition with right coset
 (b) Decomposition with left coset

3. 결합모델

순열 셀에서의 결합은 크게 입출력 링크에서의 결합과 제어선에서의 결합으로 나눌 수 있다. 이러한 형태의 결합을 stuck-at-0/1 결합 또는 s-a- α 라고 하며, 이는 스위치의 논리 레벨의 변화를 막는다. 본 논문에서는 이들 결합이 영구고정이라고 가정한다.

입출력 링크에서의 결합은 각각 입력단자나 출력단자가 0/1의 값으로 고정되어서 원래 입력된 값을 제대로 출력하지 못하는 것을 의미한다. 입력 링크에서의 고장은 스위치의 설정에 따라 다른 출력단으로 α 값을 출력하고, 출력 링크에서의 고장은 스위치의 설정과는 관계 없이 항상 같은 출력단으로 α 값을 출력한다.

제어선에서의 결합은 제어선이 α 값으로 고정되어 다른 순열을 수행할 수 없는 것이다. $\alpha=0$ 인 경우에는 셀이 E 상태로 고정되고, $\alpha=1$ 인 경우에는 T 상태로 고정된다. 본 논문에서는 이들 중 s-a-E 결합에 대해서만 고려하였다.

S-a- α 결합 검출에 대한 기본 전략은 α 값에 의존한 결합 결과를 얻기 위해서 네트워크의 각 입력측에 0과 1의 조합을 입력으로 주어 올바른 출력이 되었는지를 확인하는 것이다. 이때 사용하는 0과 1의 조합을 테스트 벡터라고 하는데 α 값이 0이나 1을 가지므로 01

과 1의 보수인 10을 테스트 벡터로 사용하는 것이 가장 효율적임을 알 수 있다. 이를 이용한 MIN의 효율적인 결합 진단 방법을 Feng와 Wu가 제안하였다^[11]. 본 논문에서 제안한 셀룰러 순열 네트워크의 내고장성의 향상 방안에서는 결합이 발생한 셀의 판단에 있어서 Feng와 Wu가 제안한 테스트 벡터를 이용하여 입출력 링크와 제어선에서의 단일 결합을 검출하고 결합 위치를 판별한 길장웅과 김성천의 셀룰러 순열 네트워크에 대한 결합 진단^[13] 결과를 이용한다.

III. CPN에 내재한 연결성을 이용한 경로 재구성

CPN에는 여분의 연결성이 존재하므로 셀의 결합에도 불구하고 연결가능한 순열이 있다. 어떤 셀이 고장났을 때 우잉여류로 분해한 이항 또는 좌잉여류로 분해한 이항중 어느 한쪽에만 나타날 때는 분해방법을 바꿈으로써 쉽게 경로를 재구성할 수 있다. 고장난 셀이 우잉여류로 분해한 순열과 좌잉여류로 분해한 순열에 공통으로 나타날 경우에도 연결가능한 순열이 존재한다.

1. 분해방법 변경에 의한 경로 재구성

순열 P중의 사상 $i \rightarrow j \in P$ 에서 $i > j$ 인 것을 내림차순 사상이라 하고 $i < j$ 인 것을 오름차순 사상이라 하자.

정리1. $\forall m, k$ such that $1 \leq m, k \leq n$, let cycle $P = (\dots m k \dots)$ and $m > k$

$$\Rightarrow (k m) \in T_R \text{ and } (k m) \in T_L$$

단, T^r : 우잉여류로 분해한 이항의 집합

T^l : 좌잉여류로 분해한 이항의 집합

(증명) 우잉여류에 의한 분해과정에서 분해될 잉여류

선도이항이 $(x m)$, $1 \leq x \leq m-1$ 일 때, 순열 P를

기호 P'_m 로 나타내고 $P'_m = (\dots i m k \dots)$ 면,

Oruc의 알고리즘에 의하여 $P'_m = P'_{m-1} \circ (k m)$

and $P'_{m-1} = (\dots i k \dots)$ 좌잉여류에 의한 분해과

정에서 분해될 잉여류 선도이항이 $(k x)$, $k+1 \leq$

$x \leq n$ 일 때, 순열 P를 기호 P'_k 로 나타내고

$P'_k = (\dots m k j \dots)$ 면, Oruc의 알고리즘에 의하여

$P'_k = (k m) \circ P'_{k+1}$ and $P'_{k+1} = (\dots m j \dots)$

$\therefore (k m) \in T^r$ and $(k m) \in T^l$ ■

정리1에 의하면 사이클중의 내림차순 사상에 관하여 분해된 이항은 우잉여류와 좌잉여류 분해에서 공통으

로 나타난다.

정리2. $\forall(x y) \in T^r$ such that $x < y$ and $y \rightarrow x \notin P \Rightarrow (x y) \in T^l$

and $\forall(x y) \in T^l$ such that $x < y$ and $y \rightarrow x \notin P \Rightarrow (x y) \in T^r$

(증명) let $P = (\dots m_{k+1} m_k \dots m_1 m k k_1 \dots k_j k_{j+1} \dots)$ such that $m_{k+1} < k$ and $k < m_k < \dots < m_1 < m$ and $m > k$ and $k < k_1 < \dots < k_j < m$, $k_{j+1} > m$ and $0 \leq i, j \leq n-2$

$P'_m = P'_{m1} \circ (k m)$ and $P'_{m1} = (\dots m_{k+1} m_k \dots m_1 k k_1 \dots k_j \dots)$

$P'_{m1} = P'_{m2} \circ (k m_1)$ and $P'_{m2} = (\dots m_{k+1} m_k \dots m_2 k k_1 \dots k_j \dots)$

\vdots
 $P'_{mi} = P'_{m'} \circ (k m_i)$ and $P'_{m'} = (\dots m_{k+1} k k_1 \dots k_j \dots)$

$\therefore \{(k m_1), \dots, (k m_i)\} \subseteq T^r$ and $(k_1 m) \notin T^r, \dots, (k_j m) \notin T^r$

$P'_k = (k m) \circ P'_{k1}$ and $P'_{k1} = (\dots m_k \dots m_1 m k_1 \dots k_j k_{j+1} \dots)$

$P'_{k1} = (k_1 m) \circ P'_{k2}$ and $P'_{k2} = (\dots m_k \dots m_1 m k_2 \dots k_j k_{j+1} \dots)$

\vdots
 $P'_{kj} = (k_j m) \circ P'_{k'}$ and $P'_{k'} = (\dots m_k \dots m_1 m k_{j+1} \dots)$

$\therefore \{(k_1 m), \dots, (k_j m)\} \subseteq T^l$ and $(k m_1) \notin T^l, \dots, (k m_k) \notin T^l$ ■

정리2에 의하면 사이클 중의 오름차순 사상은 좌우잉여류 분해에서 서로 배타적으로 나타난다. 즉, 정리1에 의해 사이클내에 내림차순이 아닌 사상에 대해 우잉여류와 좌잉여류로 분해된 이항의 집합은 각각 $T^r - (T^r \cap T^l)$ 와 $T^l - (T^r \cap T^l)$ 이므로, 두 집합은 서로 素(disjoint)이다.

(예 3) 예1의 $P = (1 4)(2 7 9)(3 6 5 8)$ 에서 $4 \rightarrow 1$, $9 \rightarrow 2$, $6 \rightarrow 5$, $8 \rightarrow 3$ 이 내림차순 사상이고, $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 7$, $7 \rightarrow 9$, $3 \rightarrow 6$, $5 \rightarrow 8$ 이 오름차순 사상이다.

$T^r = \{(1 4), (3 5), (5 6), (2 7), (3 8), (2 9)\}$
 $T^l = \{(1 4), (2 9), (3 8), (5 6), (7 9), (6 8)\}$
 $T^r \cap T^l = \{(1 4), (2 9), (3 8), (5 6)\}$

$\therefore T^r - (T^r \cap T^l) = \{(3 5), (2 7)\}$
 $T^l - (T^r \cap T^l) = \{(7 9), (6 8)\}$

2. 내림차순 사상의 경로 재구성

셀 (i, j) 에 결합이 생겼을 때 사상 $j \rightarrow i$ 가 있는 경우를 생각한다. 그림 4에서 $1 \leq k < i < j < m \leq n$, $j - i \in P$ and $m \rightarrow k \in P$ 인 순열 P에서 스위치 (i, j) 가 s-a-E 결합일 때, 셀 (k, j) , (k, m) , (i, m) 을 T상태로 하여 우회 경로를 구성할 수 있다.

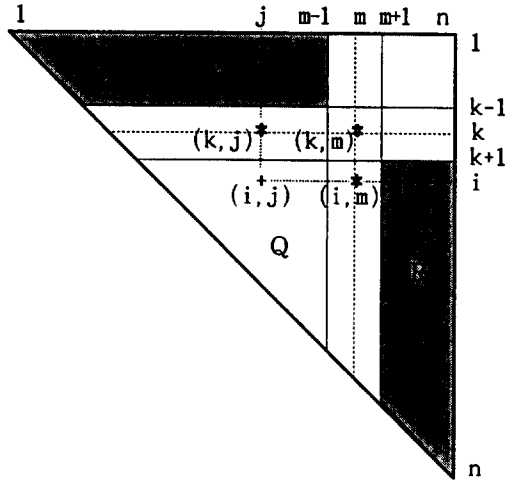


그림 4. (k, j) , (k, m) , (i, m) 셀에 의한 우회경로 구성
 Fig. 4. Making a detour with cells (k, j) , (k, m) and (i, m) .

순열은 이항의 곱으로 표시할 수 있으며, 두 이항 a와 b의 순서관계에서 이항 a가 이항 b의 왼쪽 또는 오른쪽에 위치할 경우 두 순열의 동일성을 보장할 수 없다. 역삼각형 KLW에서 신호는 위에서 아래로, 왼쪽에서 오른쪽으로 전달되므로 두 이항의 순서관계는 신호 전파에 영향을 준다. 따라서 이항 a가 이항 b의 왼쪽에 있을 때 'a는 b에 선행한다'고 정의하며 $a < b$ 로 나타낸다.

정리3. $1 \leq k < i < j < m \leq n$, $j - i \in P$ and $m \rightarrow k \in P$ 인 순열 P에서 이항 (k, j) , (k, m) , (i, m) 으로서 이항 (i, j) 를 대체할 수 있다.

(증명) 순열 P를 좌잉여류 및 우잉여류로 교대로 분해하면 $P = L \circ Q \circ R$ 로 분해될 수 있다.

단, $L: \forall x \rightarrow y \in L, x > y$ 에서 $1 \leq x < m$ and $1 \leq y < k$ 인 부분 순열

$R: \forall x \rightarrow y \in R, x > y$ 에서 $m < x \leq n$ and $k < y$

$\leq n$ 인 부분 순열

$Q : j \rightarrow i \in Q, m \rightarrow k \in Q$ 인 부분 순열

$$\forall (x \ y) \in T_L, (x \ y) \triangleleft (k \ j), \forall (x \ y) \in T_Q, (k \ j) \triangleleft (x \ y) \triangleleft (i \ m), \forall (x \ y) \in T_R, (i \ m) \triangleleft (x \ y)$$

단, $a < b : a$ 는 b 에 선행, $T_L, T_Q, T_R :$ 부분 순열 L, Q, R 의 이항집합

$1 \leq x < i < j < m \leq n, j \rightarrow i \in P$ and $m \rightarrow x \in P$ 인 x 중에서 가장 작은 기호가 k 일 때,

$$P = L \circ Q \circ R$$

$$= L \circ (k \ j)(k \ j) \circ Q \circ R$$

$\therefore (k \ j)(k \ j)$ 는 恒等元(identity element)

$(k \ j)$ 에서 $j \rightarrow k \therefore j \rightarrow i \notin (k \ j) \circ Q$

$1 \leq k < i < j < y \leq n, j \rightarrow i \in P$ and $y \rightarrow k \in P$ 인 y 중에서 가장 큰 기호가 m 일 때,

$$P = L \circ Q \circ (i \ m)(i \ m) \circ R$$

$\therefore (i \ m)(i \ m)$ 은 항등원

$(i \ m)$ 에서 $m \rightarrow i \therefore j \rightarrow i \notin Q \circ (i \ m)$

\therefore 이항 $(k \ j), (k \ m), (i \ m)$ 으로써 이항 $(i \ j)$ 를 대체할 수 있다. ■

(예 4) $P = (1 \ 4)(2 \ 7 \ 9)(3 \ 6 \ 5 \ 8)$ 에서

$$P^r = (1 \ 4)(3 \ 5)(5 \ 6)(2 \ 7)(3 \ 8)(2 \ 9)$$

$$P^l = (1 \ 4)(2 \ 9)(3 \ 8)(5 \ 6)(6 \ 8)(7 \ 9)$$

$$T^r \cap T^l = \{(1 \ 4), (2 \ 9), (5 \ 6), (3 \ 8)\}$$

(5 6)셀이 s-a-E로 될 경우 (3 6), (3 8), (5 8)을 경유한 우회 경로를 구성한다.

$$P = (1 \ 4)(\mathbf{2 \ 7 \ 9})(3 \ 6 \ 5 \ 8)$$

$$= (1 \ 4)(2 \ 7)(\mathbf{3 \ 6 \ 5 \ 8})(2 \ 9)$$

$$= (1 \ 4)(2 \ 7)(3 \ 6)(\mathbf{3 \ 6})(\mathbf{3 \ 6 \ 5 \ 8})(2 \ 9)$$

$$= (1 \ 4)(2 \ 7)(3 \ 6)(\mathbf{3 \ 5 \ 8})(2 \ 9)$$

$$= (1 \ 4)(2 \ 7)(\mathbf{3 \ 6})(\mathbf{3 \ 8})(\mathbf{5 \ 8})(2 \ 9)$$

그림 5는 (예 4)의 CPN 경로도이다.

3. 알고리즘

(i, j)셀에 s-a-E 결함이 발생한 경우의 CPN에 내재한 여분의 연결성을 이용하여 순열 P에 대한 경로를 재구성하는 알고리즘은 그림 6과 같다.

여기에서 $K(P, r, i, j)$ 는 순열 P의 기호 i부터 j까지를 우잉여류로 분해하고 $K(P, l, i, j)$ 는 순열 P의 기호 i부터 j까지를 좌잉여류로 분해하고 $K(P, r, *, *)$ 는 순열 P의 모든 원소를 우잉여류로 분해하는 KLR알고리즘이다. 알고리즘 K의 시간 복잡도가 $O(n)$ 이므로¹⁹⁾ 알고리즘 R

에 대한 시간 복잡도 또한 $O(n)$ 으로 나타난다.

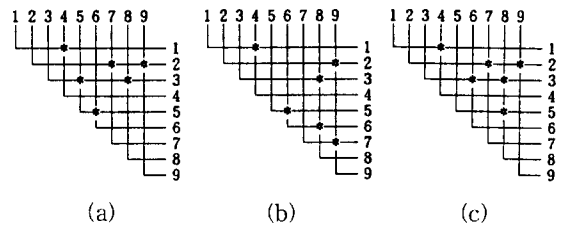


그림 5. (5 6)셀 s-a-E 경우의 우회 경로
(a) 우잉여류 Pr (b) 좌잉여류 Pl (c) 우회 경로

Fig. 5. A detour for faulty cell (5 6)
(a) Pr (b) Pl (c) A detour.

```

algorithm R(P,i,j)
begin
  if P[j]≠i then /* 결함 셀을 지나지 않는 사상 */
    begin
      P = K(P,r,*,*);
      if cell[i,j]=T /* 우잉여류 분해 결과 셀 (i,j)를 */
        then P = K(P,l,*,*) /* 지나므로 좌잉여류로 전환 */
      endif
    end
  end
  else if i≠1 and j≠n and ∃m→x∈P
    such that 1≤x<i<j<m≤n then
    begin /* 결함 셀을 지나는 셀 (x,m)은 우회 */
      k = min(x)
      L = K(P,l,i,k-1); R = K(P,r,m+1,n); Q = P[k..m];
      Q = K((k j) ∘ Q,r,*,*);
      TP={TL(k j),TQ,TR}
    end
  else
    failure
  endif
end
    
```

그림 6. CPN에 내재한 여분의 연결성을 이용한 경로 재구성 알고리즘

Fig. 6. A reconfiguration algorithm using CPN's redundant connectivity.

4. 경로 재발견 확률

어떤 셀에 결함이 생겼을 때, CPN에 내재한 연결성을 이용하여 경로를 재구성할 수 있는 확률을 구한다. 셀(i, j)가 s-a-E일 때 경로를 재구성할 수 없는 경우는 아래의 조건이 만족될 경우이다.

$$\text{조건} : j \rightarrow i \notin P \ \& \ (i=1 \mid j=n \mid \nexists m \rightarrow k \in P \text{ such that } 1 \leq k < i < j < m \leq n)$$

그림 7에서 A영역에 드는 셀(k,m)이 한 개라도 있으면 경로 재구성이 가능하며, 모든 셀(k,m)이 B영역에 들면 경로 재구성이 불가능하다.

$m=j+1$ 일 때, $i < k \leq n$ 일 확률은 $\frac{n-i}{n-1}$ 이며,

$m=j+1$ 일 때 $i < k \leq n$ 이고 $m=j+2$ 일 때 $i < k \leq n$ 일 확률은 $\frac{n-i-1}{n-2}$ 이다.

따라서 $j < m \leq n$ 인 $n-j$ 개의 사상이 모두 $k > i$ 일 확률은 $\prod_{k=1}^{n-j} \frac{n-i+1-k}{n-k}$ 이다.

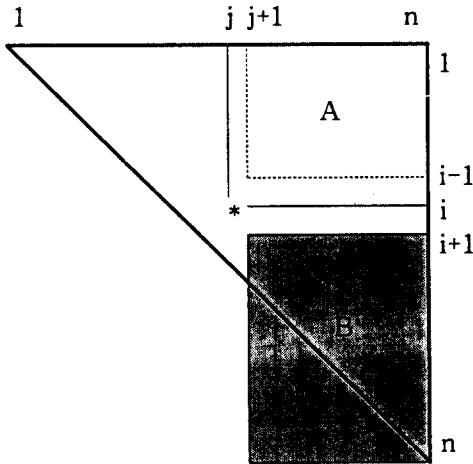


그림 7. 경로 재구성 불가능 영역
Fig. 7. Possible locations of cell (k,m).

\therefore 셀(i,j)가 s-a-E인 경우, $j-i \in P$ 일 확률이 $1/n$ 이므로 경로 재구성이 불가능할 확률은 $\frac{1}{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-j} \frac{n-i+1-k}{n-k}$ 이고, 경로 재구성이 가능할 확률은 $1 - \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-j} \frac{n-i+1-k}{n-k}$ 이다.

CPN내의 셀의 총 개수는 $n(n-1)/2$ 개이고 제1행 또는 제n열의 s-a-E는 경로 재구성이 불가능하므로 어떤 셀 한 개가 s-a-E 되었을 때 알고리즘이 경로를 재구성할 수 있을 확률 p는 다음과 같다.

$$p = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (1 - \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-j} \frac{n-i+1-k}{n-k})$$

표 1은 n의 값에 따른 경로 재구성 가능할 확률 p의 값이다. n이 작을 경우 확률이 매우 낮은 이유는 $i=1$ 이거나 $j=n$ 인 경우에는 경로 재구성이 안되기 때문이다.

표 1. 경로 재구성 가능할 확률
Table 1. The possibilities to make a detour.

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	평균
p	0.167	0.536	0.682	0.758	0.805	0.837	0.860	0.877	0.890	0.901	0.731

IV. 중복성을 추가한 경로 재구성

3장에서 제시한 알고리즘을 이용하여 경로를 재구성할 때 n이 작을 때는 물론이지만 n이 클 때도 성공할 확률이 비교적 낮다. 최소의 중복성을 추가하여 경로 재구성 가능성을 높일 수 있는 방법을 생각한다. 셀(i,j)에서 $i=1$ 또는 $j=n$ 일 때 경로 재구성이 불가능한 점을 해결하기 위하여 그림 8과 같이 입력단자 1과 n을 서로 교환하고 출력단자 1과 n을 서로 교환하여 CPN의 내부 순열을 바꾼다.

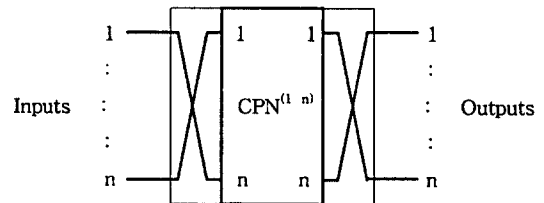


그림 8. 입출력 단자 1과 n의 교환
Fig. 8. The swapping of inputs and outputs 1 with n.

순열 P에서 $(1 \ n)(1 \ n)$ 은 항등원이므로 $P = (1 \ n)(1 \ n) \circ P \circ (1 \ n)(1 \ n)$ 이 성립한다. 식의 가장 왼쪽에 있는 이항 $(1 \ n)$ 은 입력의 단자 1과 n의 교환을 나타내고, 가장 오른쪽에 있는 이항 $(1 \ n)$ 은 출력의 단자 1과 n의 교환을 나타낸다.

1. 제1행 셀 또는 제n열 셀 s-a-E의 경로 재구성
입력 단자 1과 n을 서로 교환하고 출력 단자 1과 n을 서로 교환하면 3장에서 할 수 없었던 제1행 셀 또는 제n열 셀에 s-a-E 결합이 생겼을 때에 경로의 재구성이 가능하게 된다.

정리4. $j-i \in P, Q = (i \ j) \circ P \circ (i \ j) \Rightarrow Q = P^{(i \ j)}$
단, $P^{(i \ j)}$: P의 기호 i와 j를 서로 교환한 순열

(증명) $\exists k, m$ such that $i-k \in P, m-j \in P$

$$i-j \circ (j-i \in P) \circ i-j = i-j \in Q$$

$$j-i \circ (i-k \in P) = j-k \in Q$$

$$(m-j \in P) \circ j-i = m-i \in Q$$

정리5. let $Q = (1\ n) \circ P \circ (1\ n)$

- (1) $\exists i$ such that $1 < i < n, i \rightarrow 1 \in P \Rightarrow i \rightarrow 1 \notin Q$
 (증명) $(i \rightarrow 1 \in P) \circ 1 \rightarrow n = i \rightarrow n \in Q \therefore i \rightarrow 1 \notin Q$
- (2) $\exists j$ such that $1 < j < n, n \rightarrow j \in P \Rightarrow n \rightarrow j \notin Q$
 (증명) ① $\exists k$ such that $1 < k < n$ and $1 \rightarrow k \in P$
 $\Rightarrow n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow k \in P) = (n \rightarrow k \in Q)$
 and $k \neq j \therefore n \rightarrow j \notin Q$
 ② $1 \rightarrow n \in P \Rightarrow n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow n \in P) \circ n$
 $\rightarrow 1 = n \rightarrow 1 \in Q \therefore n \rightarrow j \notin Q$
 ③ $1 \rightarrow 1 \in P \Rightarrow n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow 1 \in P) \circ 1 \rightarrow$
 $n = n \rightarrow n \in Q \therefore n \rightarrow j \notin Q$
- (3) $n \rightarrow 1 \in P$ and $1 \rightarrow n \notin P \Rightarrow n \rightarrow 1 \notin Q$
 (증명) ① $\exists k$ such that $1 < k < n$ and $1 \rightarrow k \in P$
 $\Rightarrow n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow k \in P) = n \rightarrow k \in Q$
 $\therefore n \rightarrow 1 \notin Q$
 ② $\exists 1 \rightarrow 1 \in P \Rightarrow n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow 1 \in P) \circ 1$
 $\rightarrow n = n \rightarrow n \in Q \therefore n \rightarrow 1 \notin Q$ ■

정리5에 따라 순열에 이항 $(1\ n)$ 이 포함되어 있지 않은 경우, CPN의 제1행 또는 제n열의 셀에 s-a-E가 생겨도 경로 재구성성이 가능하다.

(예 5) $P = (1\ 6\ 2\ 7\ 8\ 3\ 5\ 4)$

$$P^r = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(4\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(3\ 8)$$

$$P^l = (1\ 4)(2\ 6)(3\ 8)(4\ 5)(5\ 8)(6\ 8)(7\ 8)$$

$$T^r \cap T^l = \{(1\ 4), (2\ 6), (3\ 8), (4\ 5)\}$$

$$P = (1\ 8)(1\ 8)(1\ 6\ 2\ 7\ 8\ 3\ 5\ 4)(1\ 8)(1\ 8)$$

$$= (1\ 8)(8\ 6\ 2\ 7\ 1\ 3\ 5\ 4)(1\ 8)$$

$$= (1\ 8)(1\ 2)(2\ 3)(2\ 4)(4\ 5)(2\ 6)(1\ 7)(6\ 8)(1\ 8)$$

8) : 우잉여류로 분해

$$= (1\ 8)(1\ 7)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 5)(5\ 7)(6\ 8)(7\ 8)(1\ 8)$$

8) : 좌잉여류로 분해

$$T^r \cap T^l = \{(1\ 7), (2\ 6), (4\ 5), (6\ 8)\}$$

또한 순열에 이항 $(1\ n)$ 이 포함되어 있으며 셀 $(1,n)$ 이 s-a-E인 경우에도 입력 또는 출력의 단자 1과 n을 교환하면 등기순열을 얻을 수 있다. 순열 P에서 $(1\ n)$ 은 항등원이므로 $P = (1\ n)(1\ n) \circ P$ 이 성립한다. 식의 가장 왼쪽에 있는 이항 $(1\ n)$ 은 입력의 단자 1과 n의 교환을 나타낸다.

정리6. let $Q = (1\ n) \circ P,$

$n \rightarrow 1 \in P$ and $1 \rightarrow n \in P \Rightarrow n \rightarrow 1 \notin Q$

(증명) $n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow n \in P) = n \rightarrow n \in Q \therefore n \rightarrow 1 \notin Q$ ■

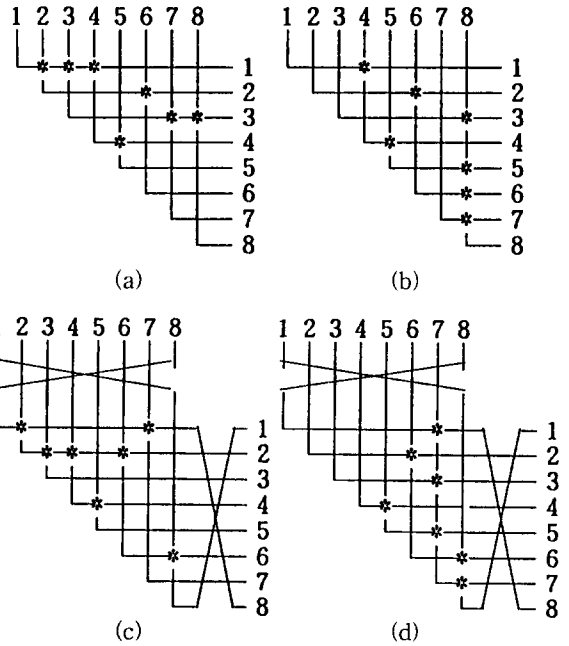


그림 9. $(1\ n)$ 입출력 단자 교환에 의한 경로 재구성 (a) 우잉여류로 분해 (b) 좌잉여류로 분해 (c) 입출력 단자 교환 및 우잉여류로 분해 (d) 입출력 단자 교환 및 좌잉여류로 분해

Fig. 9. Reconfiguration with swapping of inputs/outputs $(1\ n)$. (a) Decomposition with right coset (b) Decomposition with left coset (c) Swapping of inputs/outputs $(1\ n)$ and decomposition with right coset (d) Swapping of inputs/outputs $(1\ n)$ and decomposition with left coset

2. 우회 경로의 구성

입력과 출력의 단자 1과 n을 교환하면 3.2절 보다 우회경로를 얻을 가능성을 높일 수 있다.

정리7. let $Q = (1\ n) \circ P \circ (1\ n)$

- (1) $\exists m \rightarrow n \in P$ such that $1 < m < n \Rightarrow m \rightarrow 1 \in Q$
 (증명) $(m \rightarrow n \in P) \circ n \rightarrow 1 = m \rightarrow 1 \in Q$
- (2) $\exists 1 \rightarrow k \in P$ such that $1 < k < n \Rightarrow n \rightarrow k \in Q$
 (증명) $n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow k \in P) = n \rightarrow k \in Q$
- (3) $1 \rightarrow n \in P \Rightarrow n \rightarrow 1 \in Q$
 (증명) $n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow n \in P) \circ n \rightarrow 1 = n \rightarrow 1 \in Q$ ■

정리7에 의하면, 셀 (i,j) 가 s-a-E 되었을 때,

- (1) $\exists m$ such that $j < m < n$ & $m \rightarrow n \in P \Rightarrow m \rightarrow 1 \in Q$

- ∴ 셀(1,j),(1,m),(i,m)을 통한 우회경로 가능
- (2) $\exists k$ such that $1 < k < n$ & $1 \rightarrow k \in P \Rightarrow n \rightarrow k \in Q$
 ∴ 셀(k,j),(k,n),(i,n)을 통한 우회경로 가능
- (3) $1 \rightarrow n \in P \Rightarrow n \rightarrow 1 \in Q$
 ∴ 셀(1,j),(1,n),(i,n)을 통한 우회경로 가능

(예 6) $P = (8\ 6\ 4\ 2\ 1\ 7)$
 $P^r = (1\ 2)(2\ 4)(4\ 6)(6\ 7)(6\ 8)\ P^l = (1\ 2)(2\ 4)(4\ 6)(6\ 8)(7\ 8)$
 $T^r \cap T^l = \{(1\ 2), (2\ 4), (4\ 6), (6\ 8)\}$
 $P = (1\ 8)(1\ 8)(8\ 6\ 4\ 2\ 1\ 7)(1\ 8)(1\ 8)$
 $= (1\ 8)(1\ 6\ 4\ 2\ 8\ 7)(1\ 8)$
 셀(2,4)가 s-a-E : (1,4), (1,7), (2,7)을 경유
 $Q = (1\ 8)(8\ 6\ 4\ 2\ 1\ 7)(1\ 8)$
 $= (1\ 6\ 4\ 2\ 8\ 7)$
 $= (1\ 4)(1\ 4)(1\ 6\ 4\ 2\ 8\ 7)$
 $= (1\ 4)(1\ 2\ 7)(4\ 6)(7\ 8)$
 $= (1\ 4)(1\ 7)(1\ 7)(1\ 2\ 7)(4\ 6)(7\ 8)$
 $= (1\ 4)(1\ 7)(2\ 7)(4\ 6)(7\ 8)$

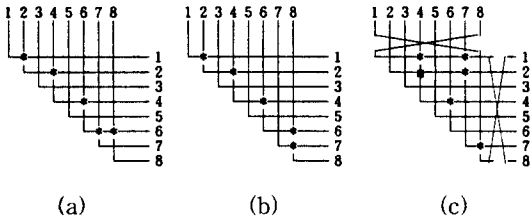


그림 10. $P=(864217)$ 에 대한 우회 경로 구성
 (a) P^r (b) P^l (c) (2,4) 셀 s-a-E
 Fig. 10. The detour of a permutation $P=(864217)$.
 (a) P^r (b) P^l (c) S-a-E of cell (2,4)

정리8. (1) $\exists 1 \rightarrow 1 \in P$ and $Q = (1\ n) \circ P \Rightarrow n \rightarrow 1 \in Q$
 (증명) $n \rightarrow 1 \circ (1 \rightarrow 1 \in P) = n \rightarrow 1 \in Q$
 (2) $\exists n \rightarrow n \in P$ and $Q = P \circ (1\ n) \Rightarrow n \rightarrow 1 \in Q$
 (증명) $(n \rightarrow n \in P) \circ n \rightarrow 1 = n \rightarrow 1 \in Q$ ■

정리8에 의하면, 셀(i,j)가 s-a-E 되었을 때,
 (1) $\exists 1 \rightarrow 1 \in P \Rightarrow (n \rightarrow 1 \in (1\ n)) \circ P \therefore$ 셀(1,j),(1,n),(i,n)을 통한 우회경로 가능
 (2) $\exists n \rightarrow n \in P \Rightarrow (n \rightarrow 1 \in P) \circ (1\ n) \therefore$ 셀(1,j),(1,n),(i,n)을 통한 우회경로 가능

3. 알고리즘

(i, j)셀에 s-a-E 결합이 발생한 경우의 CPN에 내재

한 여분의 연결성을 이용하거나 입력과 출력의 단자 1과 n을 교환하여 순열 P에 대한 경로를 재구성하는 알고리즘은 그림 11과 같다. 알고리즘 K의 시간 복잡도가 $O(n)$ 이므로 알고리즘 R의 시간 복잡도도 $O(n)$ 이다.

```

algorithm R(P; j)
begin if P(j)≠i then
    begin P = K(P,r,1,n);
        if cell(i,j)=T then P = K(P,l,1,n) end if
    end
else if  $\exists m \rightarrow x \in P$  such that  $1 \leq x < j < m \leq n$  then
    begin k = min(x); L = K(P,l,1,k-1); R = K(P,r,m+1,n);
        Q = K((k\ j) \circ P(k,m),r,*,*); Tr=(TL(k\ j),TQ,Tn)
    end
else if i=1 or j=n or (i=1 and j=n and  $1 \rightarrow n \notin P$ ) then
    begin exchange input port 1 with input port n;
        Q = Pl ∘ P; P = K(Q,r,1,n);
        exchange output port 1 with input port n
    end
else if i=1 and j=n and  $1 \rightarrow n \in P$  then
    begin exchange input port 1 with input port n;
        Q = (1\ n) ∘ P; P = K(Q,r,1,n);
    end
else if  $\exists m \rightarrow n \in P$  such that  $j < m < n$  then
    begin exchange input port 1 with input port n;
        Q = Pl ∘ P; R = K(Q,r,m+1,n);
        S = K((1\ j) \circ Q(1,m),r,*,*); TQ = {(1\ j),TS,Tn}
        exchange output port 1 with input port n
    end
else if  $\exists 1 \rightarrow k \in P$  such that  $1 < k < i$  then
    begin exchange input port 1 with input port n;
        Q = Pl ∘ P; L = K(Q,l,1,k-1);
        S = K(Q(k\ n) \circ (i\ n),r,*,*); TQ = {TL,TS(i\ n)}
        exchange output port 1 with input port n
    end
else if  $\exists 1 \rightarrow 1 \in P$  then
    begin exchange input port 1 with input port n;
        Q = (1\ j) \circ (1\ n) \circ P; S = K(Q,r,*,*); TQ = {(1\ j),TS}
    end
else if  $\exists n \rightarrow n \in P$  then
    begin Q = S \circ (i\ n) \circ (1\ n); S = K(Q,r,*,*); TQ = {TS(i\ n)}
        exchange output port 1 with output port n;
    end
else failure
end if
end
    
```

그림 11. CPN에 내재한 여분의 연결성을 이용하거나 입출력 단자 1과 n의 교환에 의한 경로 재구성 알고리즘

Fig. 11. A reconfiguration algorithm using CPN's redundant connectivity or by swapping inputs and outputs 1 with n.

4. 경로 재발견 확률

셀(i, j)가 s-a-E일 때 경로를 재구성할 수 없는 경우는 다음의 조건이 만족될 경우이다.

조건 : $j \rightarrow i \in P$ & $i \neq 1$ & $j \neq n$ & $\exists m \rightarrow k \in P$ such that $1 \leq k < i < j < m \leq n$

& $\exists m \rightarrow n \in P$ such that $j < m < n$ & $\exists l \rightarrow k \in P$
such that $1 < k < i$ & $\exists l \rightarrow n \in P$

그림 12에서 A, B, C 또는 D영역에 드는 셀(k,m)이 한 개라도 있으면 경로 재구성이 가능하며, 모든 셀(k,m)이 E 또는 F영역에 들면 경로 재구성이 불가능하다.

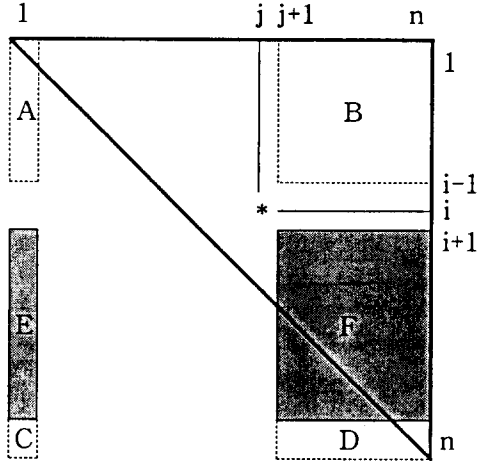


그림 12. 경로 재구성 가능 및 불가능 영역
Fig. 12. Possible locations of cell (k,m).

$i < k < n$ 인 $1 \rightarrow k \notin P$ 일 확률은 $\frac{n-i-1}{n-1}$ 이며 이 조건이 만족하지 않는 경우,

$m=j+1$ 일 때, $i < k < n$ 일 확률은 $\frac{n-i-2}{n-2}$ 이며 이 조건이 만족하지 않는 경우,

$m=j+2$ 일 때, $i < k < n$ 일 확률은 $\frac{n-i-3}{n-3}$ 이다.

따라서 $n-j+1$ 개의 조건이 모두 만족할 확률은 $\prod_{k=1}^{n-i+1} \frac{n-i-k}{n-k}$ 이다.

\therefore 셀(i,j)가 s-a-E인 경우, $j-i \in P$ 일 확률이 $1/n$ 이므로 경로 재구성이 불가능할 확률은 $\frac{1}{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-i+1} \frac{n-i-k}{n-k}$ 이고 경로 재구성이 가능할 확률은 이다.

CPN내의 셀의 총 개수는 $\frac{n(n-1)}{2}$ 이고 제1행 및 제n열의 s-a-E인 경우는 항상 경로 재구성이 가능하므로 어떤 셀 한 개가 s-a-E 되었을 때 알고리즘이 경로를 재구성 할 수 있을 확률 p는 다음과 같다.

$$p = \frac{2}{2(n-1)} \cdot (2n-3 + \sum_{j=2}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-i+1} \frac{n-i-k}{n-k}))$$

표 2는 n의 값에 따른 경로 재구성 가능할 확률 p의

값인데, n의 값에 큰 변화없이 거의 1에 가까운 수치를 보이고 있다.

표 2. 경로 재구성이 가능할 확률

Table 2. The possibilities to make a detour.

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	평균
p	1.000	0.983	0.994	0.985	0.986	0.997	0.997	0.998	0.998	0.998	0.996

5. 모든 입출력 단자의 교환

4.1절에서 입력 단자의 제1열과 제n열을 교환하고, 출력 단자의 제1행과 제n행을 교환하므로써 거의 100%의 경로 재구성이 가능하다. 그러나, 경로 재구성의 경우의 수가 많으므로 제어가 복잡해질 수 있다. 그림 13에 나타낸 것처럼 입력 단자의 모든 인접한 열과 출력 단자의 모든 인접한 행을 서로 교환하면 하드웨어는 복잡하지만 제어는 비교적 간단해질 수 있다.

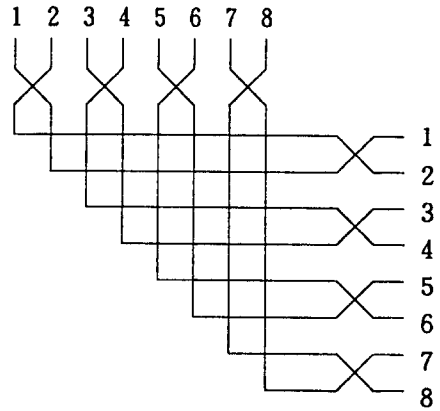


그림 13. 인접 입출력 단자의 교환

Fig. 13. Swapping of the neighboring I/O terminals.

셀(i,j)가 s-a-E인데 $j-i \in P$ 인 경우,

(1) j가 홀수인 경우, 입력 단자 j와 j+1을 교환하고 출력 단자 j와 j+1을 교환한다. 정리 4에서

$$j-i \notin (j+1) \circ P \circ (j+1).$$

(2) j가 짝수인 경우, 입력 단자 j-1과 j를 교환하고 출력 단자 j-1과 j를 교환한다. 정리 4에서

$$j-i \notin (j-1) \circ P \circ (j-1).$$

(예 7) $P = (8\ 6\ 4\ 2\ 1\ 7)$

$$P^2 = (1\ 2)(2\ 4)(4\ 6)(6\ 7)(6\ 8)$$

$$P^3 = (1\ 2)(2\ 4)(4\ 6)(6\ 8)(7\ 8)$$

$$T^r \cap T^l = \{(1\ 2), (2\ 4), (4\ 6), (6\ 8)\}$$

셀(2,4)가 s-a-E인 경우,

$$\begin{aligned} P &= (3\ 4)(3\ 4)(8\ 6\ 4\ 2\ 1\ 7)(3\ 4)(3\ 4) \\ &= (3\ 4)(2\ 1\ 7\ 8\ 6\ 3)(3\ 4) \\ 4 \rightarrow 2 &\notin (2\ 1\ 7\ 8\ 6\ 3) \end{aligned}$$

V. 결 론

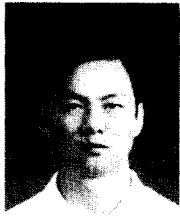
삼각형 셀룰러 순열 네트워크에서 단일 s-a-E 결합의 발생이 검출되었을 때, 경로를 재구성하는 방안을 제시하고 그 가능성을 분석하였다. 네트워크의 경로는 순열을 좌잉여류 또는 우잉여류로 반복 분해함으로써 구성된다. 오름차순의 사상이 경유하는 셀의 s-a-E 결합일 때는 분해방식을 우잉여류 또는 좌잉여류로 변경하므로써 경로를 재구성하고, 내림차순 사상이 경유하는 셀의 s-a-E 결합일 때에는 결합 셀을 피해 가는 우회경로를 구성한다. 결합 셀의 열 번호보다 크고, 행 번호보다 작은 셀 가운데 T상태로 되는 셀이 있는 경우에만 우회경로가 가능하며, 네트워크의 1행과 n열에 결합이 있는 경우에 우회경로를 구성할 수 없으므로, 4개에서 40개까지의 입출력 단자 수에 대해 17%로부터 90%까지의 순열을 허용한다. 입력 단자 1과 n을 교환하고, 출력 단자 1과 n을 교환하면, 네트워크의 1행과 n열에 결합이 있는 경우에도 우회경로를 구성할 수 있게 되고, 그렇지 않은 경우에도 우회경로를 구성할 가능성이 높아져서 평균 99% 이상의 순열을 허용한다. 또한 입력 단자의 모든 인접한 열과 출력 단자의 모든 인접한 행을 서로 교환하면 하드웨어는 복잡하지만 100%의 순열을 허용하고 제어도 단순해진다.

본 논문에서 제시된 방법을 이용함으로써 단일 s-a-E 결합에 대해 신뢰성 있는 삼각형 셀룰러 순열 네트워크를 구성할 수 있다. 또한 완전한 무결성을 지닌 네트워크를 구성하기 위해서는 다중 s-a-E 결합, 단일 및 다중 s-a-T 결합과 같은 여러가지 형태의 결합 허용에 대한 연구와 하드웨어 구현에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- [1] W. H. Kautz et al., "Cellular interconnection arrays," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-17, pp. 443-451, May 1968.
- [2] S. Bandyopadhyay, S. Basu, and K. Choudhury, "A Cellular Permutation Array," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-21, pp. 1116-1119, Oct. 1972.
- [3] J. Gecsei, "Interconnection Networks from Three-state Cells," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-26, pp. 705-711, Aug. 1977.
- [4] J. Gecsei and J. P. Brassard, "The Topology of Cellular Partitioning Networks," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-30, pp. 164-168, Feb. 1981.
- [5] V. E. Benes, "On Rearrangeable Three-stage Connecting Networks," *Bell System Technical Journal*, Vol. 42, No. 9, pp. 1481-1492, 1962.
- [6] C. Clos, "A Study of Nonblocking Switching Networks," *Bell System Technical Journal*, Vol. 32, No. 3, pp. 406-424, 1953.
- [7] A. Y. Oruc and A. Thirumalai, "A Systematic Design of Cellular Permutation Networks," *IEEE Trans. Comput.*, pp. 1447-1451, Oct. 1989.
- [8] A. Y. Oruc and D. Prakash, "Routing Algorithms for Cellular Interconnection Arrays," *IEEE Trans. Comput.*, pp. 939-942, Oct. 1984.
- [9] A. Y. Oruc and M. Y. Oruc, "Programming Cellular Permutation Arrays through Decomposition of Symmetric Groups," *IEEE Trans. Comput.*, pp. 802-809, July 1987.
- [10] A. Y. Oruc, "Designing Cellular Permutation Networks through Decompositions of Symmetric Groups," *Jour. of Paral. and Distr. Computing*, pp. 404-422, Aug. 1987.
- [11] T. Y. Feng and C. L. Wu, "Fault-diagnosis for a class of Multistage Interconnection Networks," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-30, pp. 753-758, Oct. 1981.
- [12] T. Y. Feng and W. Young, "Fault-diagnosis for a class of Rearrangeable Networks," *Jour. of Paral. and Distr. Computing*, pp. 23-47, 1986.
- [13] 길장웅, 김성천, "셀룰러 순열 네트워크에 대한 오류진단," *정보과학회 논문지*, Vol. 20, No. 1, pp. 113-124, Jan. 1993
- [14] Romualdas Skvarcius, W. B. Robinson, *Discrete Mathematics with Computer Science Applications*, pp. 326-328, The Benjamin/Cummings Pub. Co., 1986.
- [15] Frank Ayres, *Modern Algebra*, pp. 22-24, McGraw-Hill, 1985.

저 자 소 개



金宇漢(正會員)

1962년 10월 22일생. 1985년 2월 영남대학교 공과대학 전자공학과 졸업. 1987년 8월 영남대학교 대학원 전자공학과 공학석사(전자계산기). 1991년 8월 영남대학교 대학원 전자공학과 박사과정 수료. 1994년 3월 ~ 현재 경동전문대학 전자계산학과 전임강사. 관심분야는 컴퓨터 구조, 결합허용 시스템, 다단계 네트워크 등임



田大成(正會員)

1969년 12월 19일생. 1991년 2월 영남대학교 공과대학 전산공학과 졸업. 1996년 2월 영남대학교 대학원 전산공학과 공학석사(전산기시스템). 1995년 12월 ~ 현재 대산컴퓨터 재직. 1996년 3월 ~ 현재 경동전문대학 전자계산과 겸임전임강사. 관심분야는 컴퓨터 구조, 병렬처리



尹英雨(正會員)

1972년 2월 영남대학교 공과대학 전자공학과 졸업. 1984년 2월 영남대학교 대학원 전자공학과 공학석사(전자계산기). 1988년 2월 영남대학교 대학원 전자공학과 공학박사(전자계산기). 1988년 ~ 현재 영남대학교 공과대학 전산공학과 부교수. 관심분야는 컴퓨터 구조,