論文96-33B-5-5

Bounded real 전달함수의 이산모델 차수줄임

(Discrete model reduction of bounded real transfer functions)

吳 道 昌 *, 丁 銀 泰 *, 朴 烘 培 *

(Do Chang Oh, Eun Tae Jeung, and Hong Bae Park)

요 약

본 논문에서는 BR(bounded real) 전달함수의 이산모델 차수줄임방법을 제시한다. 이산 BRL(bounded real lemma)에서 두개의 리카티방정식을 얻고 이 방정식의 해를 균형화(balancing)하므로써 이산 BR-균형화를 정의한다. 이러한 이산 BR-균형화 시스템의 GSPA(generalized singular perturbation approximation)로부터 저차의 이산모델을 얻는다. 특히 GSPA의 자유매개변수가 ±1인 경우에는 저차의 이산모델이 최소성(minimality)과 안정성 및 BR과 BR-균형성을 그대로 유지함을 보인다. 또한 이러한 경우에 원래의 모델과 저차의 모델 사이에 ∞-노옴(norm) 오차의 한계치를 구한다. 마지막으로 예제를 통하여 제시한 BR 전달함수에 대한 이산모델 차수줄임방법의 타당성을 보인다.

Abstract

In this paper, we propose the discrete model reduction method of bounded real transfer functions. From the discrete bounded real lemma, we obtain the two Riccati equations and define the discrete bounded real balancing using solutions of these two Riccati equations. And we get the reduced order discrete model from the GSPA of full order model. Especially, when free parameter of GSPA is ±1, we show that the reduced order discrete model retains minimality, stability, and bounded real and BR-balancing properties. And we derive the ∞-norm error bound between full order model and reduced order model. Finally to illustrate the validity of proposed method, we give an example.

Ⅰ. 서 론

연속 및 이산시간에서 동적시스템의 차수를 줄이는 문제는 H^{∞}이론이 활성화되면서 더욱 많은 관심을 끌게 되었다.[1] 최근에는 H^{∞}에 속하는 연속 및 이산시스템에서 가제어성(controllability)과 가관측성(observability) gramian을 균형화하여 균형화시스템을 얻은 후 GSPA를 이용하여 저차의 모델을 얻는 방법들[2-4]이 제시되었다. Fernando[3]와 Liu[5]등은 연속 균형화시스템의 GSPA에서 자유매개변수가 무한대로 접근하거나 0인 경우에 얻어진 저차의 연속모델은 최소성과 안정성 및 균형성을 유지함을 밝히고, 자유매개변수가 무한대로 접근할 경우는 Fernebo[2]등이 제시한 DT(direct truncation)와 같음을 보였다. 여기서 DT에 의한 저차의 모델은 고주파수대역에서 원래의 모델과 비슷하며, 자유매개변수가 0인 경우의 GSPA에 의한 저차의 모델은 상대적으로 저주파수대역에서 오차가 작다.

Fernebo[2]등은 H^{∞}에 속하는 이산시스템의 균형화를 정의하였고 Fernando[4]와 Al-saggaf[6]등은 이러한 이산 균형화시스템에서 GSPA를 정의하고 이 GSPA의 자유매개변수가 ±1일 경우에 얻어진 저차의 이산모델이 최소성과 안정성 및 균형성을 유지함을 보였다. 여기서 Liu[5]등은 저차의 이산모델을 양선형사

* 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部

(School of Electronic & Electrical Engineering, Kyungpook Nat'l Univ.)

接受日字:1996年2月15日, 수정완료일:1996年4月23日

상(bilinear mapping)하여 저차의 연속모델을 얻고 이 저차의 연속모델과 양선형사상의 특성을 이용하여 저차의 이산모델이 갖는 특성을 규명하였다.

Opdenacker[7]등은 연속 BR 시스템에서 연속 BR-균형화를 정의하고 연속 BRL를 이용한 DT를 제시하였고, 얻어진 저차의 연속모델이 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성을 유지함을 보였다. 그리고 Muscato[8]등은 연속 BR 시스템에서 자유매개변수가 0인 경우의 GSPA를 이용하여 저차의 모델을 얻고, 연속 BR-균형화 시스템의 DT에 의한 저차의 모델이 가지는 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성을 그대로 유지함을 보였다.

본 논문에서는 BR 전달함수의 이산모델 차수줄임방법을 제시한다. 이산 BRL에서 두개의 리카티방정식을 얻고 이 방정식의 해를 균형화하므로써 이산 BR-균형화를 정의한다. 이러한 이산 BR-균형화 시스템의 DT와 GSPA로부터 저차의 이산모델을 얻는다. 특히 GSPA의 자유매개변수가 ±1인 경우에는 저차의 이산모델이 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성을 그대로 유지함을 보인다. 또한 이러한 경우에 원래의 모델과 저차의 모델 사이에 ∞-노옴 오차의 한계치를 구한다. 예제를 통하여 제안된 BR-균형화 시스템의 이산모델 차수줄임과 기존의 균형화시스템의 이산모델 차수줄임의 특성을 비교한다.

Ⅱ. 예비지식

이 장에서는 본 논문에 필요한 정의와 연속 및 이산 시스템에서의 BRL[7-9]에 대하여 알아본다.

1. RH^{∞} 및 RH_D^{∞}공간

전달함수 $G(s)$가 개우반부(open right half plane)에서 해석적이고 ∞-노옴 $\|G(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega))$이 유한한 실유리(real rational) Hardy공간을 연속 RH^{∞} 공간이라 정의한다. 여기서 $\mathbb{R}$은 실수공간이다.

전달함수 $F(z)$가 개단위원(open unit disc)의 바깥쪽에서 해석적이고 ∞-노옴 $\|F(z)\|_{\infty} \triangleq \sup_{\theta} \bar{\sigma}(F(\exp(j\theta)))$이 유한한 실유리 Hardy공간을 이산 RH_D^{∞} 공간이라 정의한다. 여기서 $0 \le \theta \le 2\pi$이다.

2. 연속 BRL

RH^{∞} 공간에 속하고 최소화구현을 가지는 선형시불변 연속시스템 $G(s)=(A,\ B,\ C,\ D)$가 실수영역에 속하는 모든 주파수에 대하여 $G^T(-j\omega)G(j\omega) \le 1$을 만족하면 BR 전달함수행렬이라 한다. $G(s)$가 BR일 필요충분조건은

$$
\begin{aligned}
&PA + A^TP + C^TC = -K_C^TK_C \\
&C^TD + PB = -K_C^TW_C \\
&I - D^TD = W_C^TW_C
\end{aligned}
\tag{1}
$$

을 만족하는 실수행렬 $P(>0)$, K_C, W_C가 존재하는 것이다. 만약 $\sigma_{\max}(D) < 1$이라면 식 (1)의 조건은

$$
\begin{aligned}
&A^TP + PA + C^TC + (PB + C^TD)R_C^{-1}(PB + C^TD)^T = 0, \\
&R_C = I - D^TD
\end{aligned}
\tag{2}
$$

를 만족하는 $P(>0)$가 존재한다는 것으로 변환된다. 모든 주파수에 대하여 $G(-j\omega)G^T(j\omega) \le 1$을 만족하는 조건으로부터 같은 방법으로 쌍대(dual)관계의 식

$$
\begin{aligned}
&AQ + QA^T + BB^T + (QC^T + BD^T)R_B^{-1}(QC^T + BD^T)^T = 0, \\
&R_B = I - DD^T
\end{aligned}
\tag{3}
$$

을 얻을 수 있으며 여기서 $Q > 0$이다.[8]

3. 이산 BRL

RH_D^{∞} 공간에 속하고 최소화구현을 가지는 선형시불변 이산시스템 $F(z)=(\Phi,\ \Gamma,\ H,\ E)$가 $0 \le \theta \le 2\pi$인 모든 θ에 대하여 $F^T(e^{-j\theta})F(e^{j\theta}) \le 1$을 만족하면 BR 이산 전달함수행렬이라 한다. $F(z)$가 BR일 필요충분조건은

$$
\begin{aligned}
&\Phi^TP_D\Phi - P_D + H^TH = -K_{DC}^TK_{DC} \\
&H^TE + \Phi^TP_D\Gamma = -K_{DC}^TW_{DC} \\
&I - E^TE - \Gamma^TP_D\Gamma = W_{DC}^TW_{DC}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

를 만족하는 실수행렬 $P_D(>0)$, K_{DC}, W_{DC}가 존재하는 것이다. 만약 $I - E^TE - \Gamma^TP_D\Gamma > 0$이라면 식 (4)의 조건은

$$
\begin{aligned}
&\Phi^TP_D\Phi - P_D + H^TH + (H^TE + \Phi^TP_D\Gamma)S_C^{-1}(H^TE + \Phi^TP_D\Gamma)^T = 0 \\
&S_C = (I - E^TE - \Gamma^TP_D\Gamma)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

을 만족하는 $P_D(>0)$가 존재한다는 것으로 변환된다. 모든 θ에 대하여 $F(e^{-j\theta})F^T(e^{j\theta}) \le 1$을 만족하는 조건으로부터 같은 방법으로 쌍대관계의 식

$$
\begin{aligned}
&\Phi Q_D\Phi^T - Q_D + \Gamma\Gamma^T + (\Gamma E^T + \Phi Q_DH^T)S_B^{-1}(\Gamma E^T + \Phi Q_DH^T)^T = 0 \\
&S_B = (I - EE^T - HQ_DH^T)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

을 얻을 수 있으며 여기서 $Q_D > 0$이다.[9]

III. 연속 및 이산시스템에서 균형화와 BR-균형화

기존에 제시된 바 있는 연속시스템의 BR-균형화에 대하여 간단히 알아보고, 이산시스템의 BR-균형화를 제시한다.

1. 연속시스템의 BR-균형화

식 (2)와 (3)을 만족하고 RH^{∞} 공간에 속하는 연속시스템 $G(s)$에 대하여 R_C와 R_B를 각각 $I-\hat{D}^T\hat{D}$, $I-\hat{D}\hat{D}^T$라 두면

$$\begin{aligned} &\hat{A}^TX+X\hat{A}+\hat{C}^T\hat{C}+(X\hat{B}+\hat{C}^T\hat{D})R_C^{-1}(X\hat{B}+\hat{C}^T\hat{D})^T=0 \\ &\hat{A}X+X\hat{A}^T+\hat{B}\hat{B}^T+(X\hat{C}^T+\hat{B}\hat{D}^T)R_B^{-1}(X\hat{C}^T+\hat{B}\hat{D}^T)^T=0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$X(>0)=\mathrm{diag}(X_1,\ X_2)=\mathrm{diag}(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r,\zeta_{r+1},\cdots,\zeta_n),\quad 1\geq\zeta_1 \tag{8}$$

을 만족하는 BR-균형화구현 $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$가 항상 존재하고, 이러한 BR 함수 $G(s)$는 BR-균형화되었다고 한다.[7]

2. 이산시스템의 BR-균형화

식 (5)와 (6)을 만족하고 RH_D^{∞} 공간에 속하는 이산 BR 함수 $F(z)$에 대하여 S_C와 S_B를 각각 $(I-\tilde{E}^T\tilde{E}-\tilde{\Gamma}^TY\tilde{\Gamma})$와 $(I-\tilde{E}\tilde{E}^T-\tilde{H}Y\tilde{H}^T)$로 가정하면

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}^TY\tilde{\Phi}-Y+\tilde{H}^T\tilde{H}+(\tilde{H}^T\tilde{E}+\tilde{\Phi}^TY\tilde{\Gamma})S_C^{-1}(\tilde{H}^T\tilde{E}+\tilde{\Phi}^TY\tilde{\Gamma})^T=0 \\ &\tilde{\Phi}Y\tilde{\Phi}^T-Y+\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}^T+(\tilde{\Gamma}\tilde{E}^T+\tilde{\Phi}Y\tilde{H}^T)S_B^{-1}(\tilde{\Gamma}\tilde{E}^T+\tilde{\Phi}Y\tilde{H}^T)^T=0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$Y(>0)=\mathrm{diag}(Y_1,\ Y_2)=\mathrm{diag}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n),\quad 1\geq\eta_1 \tag{10}$$

을 만족하는 $(\tilde{\Phi},\tilde{\Gamma},\tilde{H},\tilde{E})$를 이산 BR-균형화구현이라 하고, 이러한 이산 BR 함수 $F(z)$는 BR-균형화되었다고 한다.

정리 1

i) 식 (9), (10)를 만족하는 Y가 존재한다.

ii) $\Lambda=X=Y$인 Λ가 존재한다.

증명)

i) 식 (5)와 (6)의 이산 BRL로부터

$$\begin{aligned} &\Phi^TP_D\Phi-P_D+\begin{bmatrix} H \\ K_{DC}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} H \\ K_{DC}\end{bmatrix}=0 \\ &\Phi Q_D\Phi^T-Q_D+[\,\Gamma\ \ K_{DB}\,]\,[\,\Gamma\ \ K_{DB}\,]^T=0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &K_{DC}=-W_{DC}^{-T}(E^TH+\Gamma^TP_D\Phi), \quad I-E^TE-\Gamma^TP_D\Gamma=W_{DC}^TW_{DC}, \\ &K_{DB}=-(\Gamma E^T+\Phi Q_DH^T)W_{DB}^{-1}, \quad I-EE^T-HQ_DH^T=W_{DB}^TW_{DB} \end{aligned} \tag{12}$$

이고 이산시스템의 균형화이론[2]에 따르면 $T^TP_DT=T^{-1}Q_DT^{-T}=Y$를 만족시키므로써 $(\Phi,[\,\Gamma\ \ K_{DB}\,],\begin{bmatrix} H \\ K_{DC}\end{bmatrix})$을 균형화시키는 유사변환(similarity trans form) T가 존재하고 이러한 T로부터

$$\begin{aligned} &T^T\Phi^T\,T^{-T}T^TP_DTT^{-1}\Phi T-T^TP_DT+T^T\begin{bmatrix} H \\ K_{DC}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} H \\ K_{DC}\end{bmatrix}T \\ &=\tilde{\Phi}^TY\tilde{\Phi}-Y+\begin{bmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{K}_{DC}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{K}_{DC}\end{bmatrix}=0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &T^{-1}\Phi TT^{-1}Q_DT^{-T}T^T\Phi^TT^{-T}-T^{-1}Q_DT^{-T} \\ &+T^{-1}[\,\Gamma\ \ K_{DB}\,]\,[\,\Gamma\ \ K_{DB}\,]^TT^{-T} \\ &=\tilde{\Phi}Y\tilde{\Phi}^T-Y+[\,\tilde{\Gamma}\ \ \tilde{K}_{DB}\,]\,[\,\tilde{\Gamma}\ \ \tilde{K}_{DB}\,]^T=0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} I-E^TE-\Gamma^TP_D\Gamma&=I-E^TE-\Gamma^TT^{-T}T^TP_DTT^{-1}\Gamma \\ &=I-\tilde{E}^T\tilde{E}-\tilde{\Gamma}^TY\tilde{\Gamma}=\tilde{W}_{DC}^T\tilde{W}_{DC} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} I-EE^T-HQ_DH^T&=I-EE^T-HTT^{-1}Q_DT^{-T}T^TH^T \\ &=I-\tilde{E}\tilde{E}^T-\tilde{H}Y\tilde{H}^T=\tilde{W}_{DB}^T\tilde{W}_{DB} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{DC}=K_{DC}T&=-W_{DC}^{-T}(E^THT+\Gamma^TT^{-T}T^TP_DTT^{-1}\Phi T) \\ &=-\tilde{W}_{DC}^{-T}(\tilde{E}^T\tilde{H}+\tilde{\Gamma}^TY\tilde{\Phi}) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{DB}=T^{-1}K_{DB}&=-(T^{-1}\Gamma E^T+T^{-1}\Phi TT^{-1}Q_DT^{-T}T^TH^T)W_{DB}^{-1} \\ &=-(\tilde{\Gamma}\tilde{E}^T+\tilde{\Phi}Y\tilde{H}^T)\tilde{W}_{DB}^{-1} \end{aligned} \tag{18}$$

이다. 여기서 BR-균형화 시스템은 $(\tilde{\Phi},\tilde{\Gamma},\tilde{H},\tilde{E})=(T^{-1}\Phi T,\ T^{-1}\Gamma,\ HT,\ E)$이다. 따라서 식 (9)와 (10)를 만족시키는 T와 Y가 존재한다.

ii) 연속 BR-균형화 식 (7)의 윗식으로부터

$$\hat{A}^TX+X\hat{A}+\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{K}_C\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{K}_C\end{bmatrix}=0 \tag{19}$$

$$\hat{K}_C=-\hat{W}_C^{-T}(\hat{B}^TX+\hat{D}^T\hat{C}),\quad I-\hat{D}^T\hat{D}=\hat{W}_C^T\hat{W}_C \tag{20}$$

를 만족하는 X가 존재하고 $G(s)$와 $F(z)$가 $z=(1+s)/(1-s)$와 같은 양선형사상의 관계, 즉

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}&=(I+\hat{A})(I-\hat{A})^{-1} \\ \hat{\Gamma}&=\sqrt{2}(I-\hat{A})^{-1}\hat{B} \\ \hat{H}&=\sqrt{2}\,\hat{C}(I-\hat{A})^{-1} \\ \hat{E}&=\hat{D}+\hat{C}(I-\hat{A})^{-1}\hat{B} \end{aligned} \tag{21}$$

를 만족한다고 가정한다. 식 (19)의 앞뒤로 $(I+\tilde{\Phi})^T$와 $(I+\tilde{\Phi})$를 각각 곱하면

$$\begin{aligned} &(I+\tilde{\Phi})^T(\tilde{\Phi}-I)^T(I+\tilde{\Phi})^{-T}X(I+\tilde{\Phi})+(I+\tilde{\Phi})^T \\ &\times X(I+\tilde{\Phi})^{-1}(\tilde{\Phi}-I)(I+\tilde{\Phi})+2\tilde{H}^T\tilde{H}+(I+\tilde{\Phi})^T \\ &\hat{K}_C^T\hat{K}_C(I+\tilde{\Phi}) \\ &=(\tilde{\Phi}-I)^TX(I+\tilde{\Phi})+(I+\tilde{\Phi})^TX(\tilde{\Phi}-I)+2\tilde{H}^T\tilde{H} \end{aligned}$$

$$+(I+\widetilde{\Phi})^T\hat{K}_C^T\hat{K}_C(I+\widetilde{\Phi}) = \widetilde{\Phi}^TX\widetilde{\Phi} - X + \widetilde{H}^T\widetilde{H}$$

$$+\frac{1}{2}(I+\widetilde{\Phi})^T\hat{K}_C^T\hat{K}_C(I+\widetilde{\Phi}) = 0$$

이고 만약 $\hat{K}_C = \sqrt{2}\hat{K}_{DC}(I+\widetilde{\Phi})^{-1}$으로 둔다면

$$\widetilde{\Phi}^TX\widetilde{\Phi} - X + \widetilde{H}^T\widetilde{H} + \hat{K}_{DC}^T\hat{K}_{DC} = 0 \tag{22}$$

이다. 이것을 식 (13)의 형태와 비교하여 보면 $\Lambda = X = Y$인 Λ가 존재함을 알 수 있다. 식 (7)의 아래 식으로부터 쌍대의 경우에도 같은 방법으로 증명할 수 있다. 따라서 양선형사상의 관계를 나타내는 식 (21)이 만족될 때 $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$와 $(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{H}, \widetilde{E})$는 BR 및 BR-균형성을 그대로 유지한다.

보조정리 1

연속 및 이산 BR-균형화 시스템인 $G(s)$와 $F(z)$가 식 (21)의 양선형사상의 관계에 있을 때 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성, 그리고 ∞-노옴이 유지된다.

증명) 양선형사상은 개좌반면(OLHP)에서 개단위원의 내부로의 bijective mapping이므로 최소성과 안정성은 당연히 유지된다.[6] BR과 BR-균형성에 대한 증명은 3장 1절에 나타나 있다. 또한 참고논문 [10]에 따르면 ∞-노옴이 유지된다.

Ⅳ. BR의 성질을 유지하는 모델 차수줄임

이 장에서는 Opdenacker와 Muscato 등에 의해 제시된 연속 BR-균형화 시스템의 모델 차수줄임에 관해 간단히 살펴보고 이산 BR-균형화 시스템의 모델 차수줄임을 제시한다. 여기서 이산 BR-균형화 시스템의 GSPA에서 특수한 몇가지 경우에는 저차의 모델이 최소구현과 안정성 및 BR과 BR-균형성을 유지하는 것을 보인다.

1. 연속 BR-균형화 시스템의 일반적인 SPA(GSPA)

식 (7), (8)와 같은 연속 BR-균형화 시스템 $G(s) = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$를 diag$(X_1, X_2)$와 차원이 일치하도록 분리하고, i와 j가 각각 1 혹은 2일 때 그 부행렬을 각각 $\widetilde{A}_{ij}$, $\widetilde{B}_j$, $\widetilde{C}_i$라 두면 저차의 모델은 저차의 모델은

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_r(s_0) &= \widetilde{A}_{11}+\widetilde{A}_{12}(s_0I_{n-r}-\widetilde{A}_{22})^{-1}\widetilde{A}_{21}\\
\widetilde{B}_r(s_0) &= \widetilde{B}_1+\widetilde{A}_{12}(s_0I_{n-r}-\widetilde{A}_{22})^{-1}\widetilde{B}_2\\
\widetilde{C}_r(s_0) &= \widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2(s_0I_{n-r}-\widetilde{A}_{22})^{-1}\widetilde{A}_{21}\\
\widetilde{D}_r(s_0) &= \widetilde{D}+\widetilde{C}_2(s_0I_{n-r}-\widetilde{A}_{22})^{-1}\widetilde{B}_2
\end{aligned} \tag{23}$$

이고 전달함수는 $G_{br}(s) = (\widetilde{A}_r(s_0), \widetilde{B}_r(s_0), \widetilde{C}_r(s_0), \widetilde{D}_r(s_0))$이다. 연속 균형화시스템의 경우와 같이 X_1과 X_2는 공통요소가 없으며 저차의 연속모델은 $s=s_0$에서 원래의 연속모델 $G(s)$와 같은 응답을 가진다.

보조정리 2[7,8]

연속 BR-균형화 시스템에서 $s_0=0$와 $s_0\to\infty$인 경우 저차의 모델은 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성이 각각 보존되며 오차의 한계치는 $\|G(s)-G_{br}(s)\|_\infty \le 2\mathrm{Tr}(X_2)$이다. 여기서 $\mathrm{Tr}(X_2)$는 X_2의 trace이다.

2. 이산 BR-균형화 시스템의 GSPA

1절의 내용을 기초로 하여 본 논문에서 제시하는 이산 BR-균형화 시스템의 GSPA를 이용한 이산모델 차수줄임에 관하여 알아본다. 식 (9), (10)과 같은 이산 BR-균형화 시스템 $F(z) = (\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{H}, \widetilde{E})$을 diag$(Y_1, Y_2)$와 차원이 일치하도록 분리하고, i와 j가 각각 1 혹은 2일 때 그 부행렬을 각각 $\widetilde{\Phi}_{ij}$, $\widetilde{\Gamma}_j$, $\widetilde{H}_i$라 두면 저차의 모델은

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_r(z_0) &= \widetilde{\Phi}_{11}+\widetilde{\Phi}_{12}(z_0I_{n-r}-\widetilde{\Phi}_{22})^{-1}\widetilde{\Phi}_{21}\\
\widetilde{\Gamma}_r(z_0) &= \widetilde{\Gamma}_1+\widetilde{\Phi}_{12}(z_0I_{n-r}-\widetilde{\Phi}_{22})^{-1}\widetilde{\Gamma}_2\\
\widetilde{H}_r(z_0) &= \widetilde{H}_1+\widetilde{H}_2(z_0I_{n-r}-\widetilde{\Phi}_{22})^{-1}\widetilde{\Phi}_{21}\\
\widetilde{E}_r(z_0) &= \widetilde{E}+\widetilde{H}_2(z_0I_{n-r}-\widetilde{\Phi}_{22})^{-1}\widetilde{\Gamma}_2
\end{aligned} \tag{24}$$

이고 전달함수는 $F_{br}(s) = (\widetilde{\Phi}_r(z_0), \widetilde{\Gamma}_r(z_0), \widetilde{H}_r(z_0), \widetilde{E}_r(z_0))$이다. 이산 균형화시스템의 경우와 같이 이 저차의 이산모델은 $z=z_0$에서 원래의 이산모델과 같은 응답을 가진다.

정리 2

이산 BR-균형화 시스템에서 $z_0=\pm1$($z_0=\pm1$에서 SPA)인 경우 저차의 모델은 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성이 각각 보존되고 ∞-노옴 오차의 한계치는 $\|F(z)-F_{br}(z)\|_\infty \le 2\mathrm{Tr}(Y_2)$이다.

증명) 정리 1과 보조정리 1 및 2의 결과로부터 $(\widetilde{A}_r(s_0), \widetilde{B}_r(s_0), \widetilde{C}_r(s_0), \widetilde{D}_r(s_0))$과 $(\widetilde{\Phi}_r(z_0), \widetilde{\Gamma}_r(z_0), \widetilde{H}_r(z_0), \widetilde{E}_r(z_0))$이 복소영역에 속하는 모든 s_0와 z_0에 대하여 양선형사상의 관계가 있다는 것을 보이면 된다. 식 (21)과 (23)로부터

$$G_{br}(s) = \widetilde{C}\left(\begin{bmatrix} sI_r & 0 \\ 0 & s_0I_{n-r}\end{bmatrix} - \widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B}+\widetilde{D}$$

$$= \sqrt{2}\,\tilde{H}(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\left(\frac{z-1}{z+1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{(z+1)}{(z-1)}s_0 I_{n-r}\end{bmatrix} - (\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}(\tilde{\Phi}-I_n)\right)^{-1}$$

$$\times(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\tilde{\Gamma}\sqrt{2} + \hat{E} - \tilde{H}(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\tilde{\Gamma}$$

$$= \tilde{H}\left\{2(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\left(\frac{z-1}{z+1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{(z+1)}{(z-1)}s_0 I_{n-r}\end{bmatrix} - [\,I_n - 2(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}]\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\times(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1} - (\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\right\}\tilde{\Gamma} + \hat{E}$$

$$= \tilde{H}\left\{(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\left(\frac{z-1}{2(z+1)}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{(z+1)}{(z-1)}s_0 I_{n-r}\end{bmatrix} - \frac{I_n}{2} + (\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\times(\tilde{\Phi}+I_n)^{-1} - (\tilde{\Phi}+I_n)^{-1}\right\}\tilde{\Gamma} + \hat{E}$$

이다. 여기서 matrix inversion lemma를 이용하면

$$G_{br}(s) = \tilde{H}\left\{-\tilde{\Phi} - I_n - \left(\frac{z-1}{2(z+1)}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{(z+1)}{(z-1)}s_0 I_{n-r}\end{bmatrix} - \frac{I_n}{2}\right)^{-1}\right\}^{-1}$$

$$\times\tilde{\Gamma} + \hat{E}$$

이고 우변의 inverse항을 간단히 하면

$$\left(\frac{z-1}{2(z+1)}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{(z+1)}{(z-1)}s_0 I_{n-r}\end{bmatrix} - \frac{I_n}{2}\right)^{-1}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(z+1)}\right)\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{(z+1)}{(z-1)}s_0 I_{n-r}\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{(zs_0+s_0-z+1)}{2(z-1)}I_{n-r}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{(z+1)}I_r & 0 \\ 0 & \frac{(z+1)}{(z-1)}s_0 I_{n-r}\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{(z+1)}I_r & 0 \\ 0 & \frac{(s_0-1)}{2}I_{n-r}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -(z+1)I_r & 0 \\ 0 & \frac{2}{(s_0-1)}I_{n-r}\end{bmatrix}$$

이다. 또한 $z_0 = \dfrac{(1+s_0)}{(1-s_0)}$ 이므로

$$G_{br}(s) = \tilde{H}\left(-\tilde{\Phi} - I_n - \begin{bmatrix} -(z+1)I_r & 0 \\ 0 & \frac{2}{(s_0-1)}I_{n-r}\end{bmatrix}\right)^{-1}\tilde{\Gamma} + \hat{E}$$

$$= \tilde{H}\left(\begin{bmatrix} zI_r & 0 \\ 0 & \frac{(1+s_0)}{(1-s_0)}I_{n-r}\end{bmatrix} - \tilde{\Phi}\right)^{-1}\tilde{\Gamma} + \hat{E}$$

$$= \tilde{H}\left(\begin{bmatrix} zI_r & 0 \\ 0 & z_0 I_{n-r}\end{bmatrix} - \tilde{\Phi}\right)^{-1}\tilde{\Gamma} + \hat{E} = F_{br}(z)$$

이다. 양선형사상에 의한 연속시스템에서 $s_0 = 0$과 $s_0 \to \infty$인 경우는 각각 이산시스템에서 $z_0 = 1$과 $z_0 = -1$에 해당하므로 보조정리 1과 2의 결과로부터 정리 2가 만족된다.

따름정리 1

이산 BR-균형화 시스템에서 $z_0 \to \infty$(DT)인 GSPA의 경우 저차의 모델은 안정성과 오차의 한계치 $\|F(z) - F_{br}(z)\|_\infty \le 2\mathrm{Tr}(Y_2)$는 보존되지만 최소성과 BR 및 BR-균형성의 보존은 보장할 수 없다.

정리 2의 증명에서 보여진 것과 같이 이산 BR-균형화 시스템으로부터 양선형사상에 의해 등가인 연속 BR-균형화 시스템을 얻을 수 있다. 따라서 $s_0 = 1$ ($z \to \infty$)인 경우에 저차의 연속 BR-균형화 시스템에서 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성이 보존되고 오차의 한계치가 $\|G(s) - G_{br}(s)\|_\infty \le 2\mathrm{Tr}(X_2)$임을 보여야 한다. 그러나 $s_0 = 0$과 $s_0 \to \infty$의 경우를 제외한 어떤 실수값의 s_0에 대하여도 이러한 모든 성질들의 보존성이 증명되어있지 않다.[5] 현재 정리 1에 의해서 이산 BR-시스템의 Riccati방정식은 이산 Lyapunov 방정식으로 표현되므로 이산시스템의 DT에 관한 이론[2,11]을 이용하면 저차의 모델에 대하여 안정성은 보존하고 오차의 한계치는 $\|F(z) - F_{br}(z)\|_\infty \le 2\mathrm{Tr}(Y_2)$이지만, 최소성과 BR 및 BR-균형성의 보존은 보장할 수 없다.

V. 예 제

식 (25)과 같이 주어지는 이산시스템의 모델 차수줄임에 대해 알아본다.

$$F(z) = \frac{0.267z^4 + 1.064z^3 + 1.591z^2 + 1.057z + 0.2633}{z(z^3 + 1.985z^2 + 1.288z + 0.2727)} \qquad (25)$$

경우 1) 이산 균형화시스템의 모델 차수줄임[2,4-6,11]

위의 시스템을 기존의 방법을 이용하여 이산 균형화하였을 경우 grammian[2] 행렬은 diag (0.59491 0.14308 0.01546 0.00062)이고 DT($z_0 \to \infty$)[2,11] 및 GSPA($z_0 = \pm 1$)[4-6]의 경우에 오차의 한계치를 구하여 보면 2차로 줄여줄 경우는 0.00125이고 1차로 줄였을 경우는 0.31834이다. 이러한 1차의 저차모델들은 표 1에 주어져 있고, 1차의 저차모델과 그 오차의 주파수 응답을 그림 1, 2에 나타내었다.

본 예제에서는 표본화 시간이 T=10ms일 때 Tustin 방법[12]에 의하여 w-영역으로 사상하여 시뮬레이션

한다. 따라서 Nyquist 주파수(≈314rad/sec)이상의 영역에서는 무시하도록 한다.

표 1. 균형화시스템의 모델 차수줄임에 의한 저차의 모델

Table 1. Reduced order model by model reduction of the balanced system.

차수\방법	GSPA($z_0 = 1$)	GSPA($z_0 = -1$)	DT
1 차	$\frac{0.2597\,z + 0.5501}{z - 0.1324}$	$\frac{0.2866\,z + 0.2866}{z - 0.5182}$	$\frac{0.267\,z + 0.4876}{z - 0.2186}$

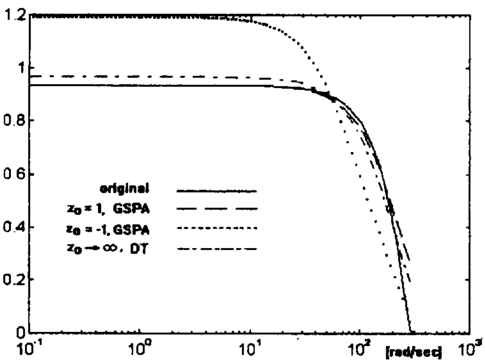

그림 1. 1차 이산시스템의 주파수응답

Fig. 1. Frequency response of 1st order discrete system.

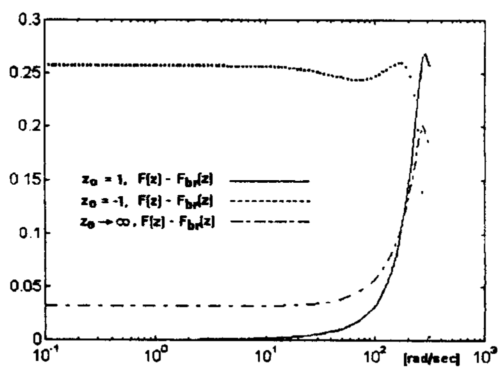

그림 2. 1차인 경우 오차의 주파수응답

Fig. 2. Frequency response of error for 1st order system.

경우 2) 이산 BR-균형화 시스템의 모델 차수줄임

식 (25)의 이산시스템을 이산 BR-균형화하였을 경우 식 (9)의 해는 $Y = \mathrm{diag}(0.76323\ 0.17689\ 0.01735\ 0.00066)$ 이고 DT($z_0 \to \infty$) 및 GSPA($z_0 = \pm 1$)의 경우에 오차의 한계치를 구하여 보면 2차로 줄여줄 경우는 0.00134이고 1차로 줄였을 경우는 0.38983이다. 이러한 1차의 저차모델들은 표 2에 주어져 있고, 1차의 저차모델과 그 오차의 주파수응답을 그림 3, 4에 나타내었다.

표 2. BR-균형화 시스템의 모델 차수줄임에 의한 저차의 모델

Table 2. Reduced order model by model reduction of the BR-balanced system.

차수\방법	GSPA($z_0 = 1$)	GSPA($z_0 = -1$)	DT
1 차	$\frac{0.2475\,z + 0.5922}{z - 0.1002}$	$\frac{0.3205\,z + 0.3205}{z\ \ 0.3356}$	$\frac{0.267\,z + 0.5219}{z - 0.1598}$

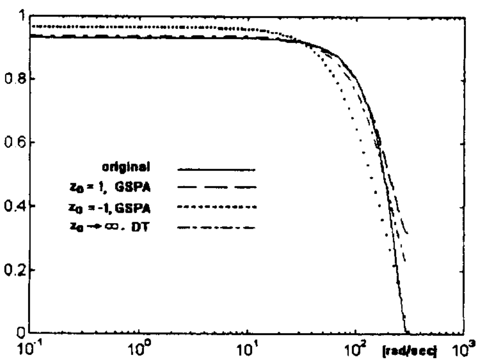

그림 3. 1차 이산시스템의 주파수응답

Fig. 3. Frequency response of 1st order discrete system.

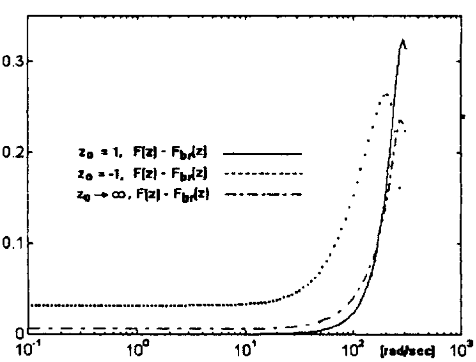

그림 4. 1차인 경우 오차의 주파수응답

Fig. 4. Frequency response of error for 1st order system.

그림 1과 3를 비교하면 BR-균형화 시스템에 z_0

= −1에서 GSPA를 취하였을 경우에는 BR이 여전히 보존됨을 알 수 있다. 또한 $z_0 = 1$일 때 오차는 그림 4의 고주파영역에서 다소 증가하였고 $z_0 = -1$일때는 전체적으로 개선되었음을 알 수 있다. DT인 경우도 전체적으로 개선되었음을 알 수 있다. 주어진 이산시스템을 2차와 3차로 줄였을 경우는 균형화시스템의 차수줄임과 BR-균형화 시스템의 차수줄임이 전체적으로 거의 비슷하게 되었으므로 여기서는 생략하였다.

Ⅵ. 결 론

본 논문에서는 BR 전달함수의 이산모델 차수줄임방법을 제시하였다. 이산 BRL로부터 두개의 리카티방정식을 얻고 이 방정식의 해를 균형화하므로써 이산 BR-균형화를 정의하였다. 이러한 이산 BR-균형화 시스템의 DT와 GSPA로부터 저차의 이산모델을 얻는다. 이 저차의 이산모델과 양선형사상의 관계에 있는 저차의 연속모델과 양선형사상의 특성을 이용하여 저차의 이산모델이 가질수 있는 특성을 규명하였다.

특히 이산 BR-균형화 시스템에서 GSPA의 자유매개변수가 ±1인 경우에는 저차의 이산모델이 최소성과 안정성 및 BR과 BR-균형성을 그대로 유지함을 보였다.

또한 이러한 경우에 원래의 모델과 저차의 모델 사이에 ∞-노옴 오차의 한계치를 구하였다. 앞으로는 일반적인 실수 및 복소값을 가지는 s_0와 z_0의 경우에 GSPA에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

[1] D. Enns, "Model reduction for control system design," Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics, Standford, CA, 1984.

[2] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 2, pp. 382-387, April 1982.

[3] K. V. Fernando and H. Nicholson, "Singular perturbational model reduction of balanced systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 2, pp. 466-468, April 1982.

[4] K. V. Fernando and H. Nicholson, "Singular perturbational approximations for discrete time balanced systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 2, pp. 240-242, Feb. 1983.

[5] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," *Int. J. Contr.*, vol. 50, no. 4, pp. 1379-1405, April 1989.

[6] U. M. Al-saggaf and G. F. Franklin, "Model reduction via balanced realizations: An extention and frequency weighting techniques," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 7, pp. 687-692, July 1988.

[7] P. C. Opdenacker and E. A. Jonckheere, "A contraction mapping preserving balanced reduction scheme and its infinity norm error bounds," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 184-189, Feb. 1988.

[8] G. Muscato, G. Nunnari, and L. Fortuna, "Singular perturbation approximation of bounded real and of positive real transfer matrices," in *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Baltimore, Maryland, June 1994.

[9] P. Agathoklis, E. I. Jury, and M. Mansour, "The discrete time strictly bounded real lemma and the computation of positive definite solutions to the 2-D Lyapunov equation," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 36, no. 6, pp. 830-837, June 1989.

[10] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, June 1984.

[11] U. M. Al-saggaf and G. F. Franklin, "An error bound for a discrete reduced order model of a linear multivariable system," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, no. 9, pp. 815-819, Sept. 1987.

[12] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1992.

저 자 소 개

吳 道 昌(正會員)

1967년 1월 16일생. 1991년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업. 1993년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 석사학위 취득. 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정. 주관심분야는 H_∞ 제어, 모델 및 제어기축소, 견실제어, 시간지연제어 등임.

丁 銀 泰(正會員)

1966년 1월 12일생. 1991년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업. 1993년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 석서학위 취득. 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정. 주관심분야는 시간지연제어, H_∞ 제어, 견실제어 등임.

朴 烘 培(正會員) 第 32卷 B編 第 2號 參照

현재 경북대학교 전자공학과 교수