

論文96-33B-5-2

견실성능 최적화를 위한 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기설계 알고리즘(Mixed  $H_2/H_\infty$  controller design algorithm for robust performance optimization)

金鍾海\*, 方敬皓\*, 朴烘培\*

(Jong Hae Kim, Kyeong Ho Bhang, and Hong Bae Park)

## 요 약

본 논문에서는 혼합  $H_2/H_\infty$  성능지수를 최소화하고 내부안정화(internal stabilization)를 피하는 제어기를 찾는 혼합  $H_2/H_\infty$  출력제어문제를 다룬다. 주어진 두개의 외부입력에 두개의 오차신호를 가지는 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  문제는 동일한 성능을 가지는 두개의 외부입력에 하나의 오차신호를 가지는 보조시스템으로 변형됨을 보인다. 따라서, 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  문제의 해는 존재하는 혼합  $H_2/H_\infty$  문제의 결과를 이용하므로써 얻는다.

## Abstract

In this paper, we consider a generalized mixed  $H_2/H_\infty$  output feedback problem. It is finding an internally stabilizing controller that minimizes a mixed  $H_2/H_\infty$  performance measure. We show that a generalized mixed  $H_2/H_\infty$  system with two exogenous inputs and two controlled signals is transformed into auxiliary system with two exogenous inputs and one controlled signal. The two systems have equivalent performance. Therefore, a complete solution of generalized mixed  $H_2/H_\infty$  output feedback problem is achieved by existing results of mixed  $H_2/H_\infty$  control theory

## I. 서 론

내외부의 불확실성을 가지는 시스템의 안정성을 보장하는 견실안정화문제를 해결하는  $H_\infty$  제어기 설계방법은 수학적으로 일반화된 해를 구할 수 있는 반면 견실안정화문제와 성능문제를 동시에 만족하지는 못한다. 기준입력의 추적이나 과도현상 등의 성능문제를 다루는 제어기 설계방식은 자승(quadratic)형태의 평가함수(cost function)를 최소화하는  $H_2$  설계가 효과적인 방법이다. 따라서 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기설계방법을 이용하면 견실안정화와 성능문제를 동시에 해결할 수 있다.

혼합  $H_2/H_\infty$  제어기설계방법은  $H_\infty$  노음 제약조건을 만족하는 해를 구한 후  $H_2$  제어기를 찾는 방법<sup>[1, 3, 6, 13]</sup>과  $H_2$ 와  $H_\infty$ 의 조건을 동시에 만족하는 제어기를 찾는 방법<sup>[11]</sup>으로 나눌 수 있는데, 대부분의 경우 외부입력이나 오차신호중 하나는 같다는 가정하에 문제에 접근하므로 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  문제에 대한 해를 구하는 방법은 없는 실정이다.

1989년 Bernstein 등<sup>[1]</sup>은  $H_\infty$  노음 제약조건하에  $H_2$  노음을 최소화하는 문제를 제시하여 혼합  $H_2/H_\infty$  문제의 해를 구하였고, 1991년 Zhou 등<sup>[13]</sup>은 두개의 외부입력과 하나의 오차신호에 대해서 보조평가함수를 이용하여 문제에 접근하였으며, 1991년 Khargonekar 등<sup>[6]</sup>은 하나의 외부입력에 두개의 오차신호로 접근하여 페루프 전달함수의  $H_\infty$  노음 부등제약조건하에 혼합  $H_2/H_\infty$  성능지수를 최소화하는 제어기를 찾았다. 1991년 Rotea 등<sup>[11]</sup>은 두개의 외부입력이나 두개의 오차신호 중 하나는 같아야 한다는 기존의 가정에서

\* 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部

(School of Electronic &amp; Electrical Engineering, Kyungpook National University)

\* 이 논문은 1994년도 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음

接受日字:1995年4月29日, 수정완료일:1996年4月20日

탈피해 먼저 하나의 페루프 전달함수의  $H_2$  노음을 최소화하는 상태궤환 제어기를 매개변수화한 후 다른 페루프 전달함수의 이미 정해진  $H_\infty$  노음 경계를 만족하는 제어기가 존재할 필요충분조건을 제시하였으나, 이는 상태궤환 시스템의 경우에서만 성립한다.

본 논문에서는 일반적인 출력궤환 시스템에서 일반적인 혼합  $H_2/H_\infty$  문제의 일반화된 해를 구하는 알고리즘을 제시한다. II장에서는 Rotea 등<sup>[11]</sup>이 제시한 이론을 보완한 일반적 상태궤환 시스템에서 혼합  $H_2/H_\infty$  문제의 해를 구하는 방법에 대하여 알아보고, III장에서는 주어진 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  시스템을 동일한 성능을 가지는 보조시스템으로 변형한 후, 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  출력궤환 시스템의 제어기를 구하는 과정을 제시한다. IV장에서 결론을 맺는다.

본 논문에서 사용되는 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  표준플랜트는

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w_1 + B_2 w_2 + B_3 u \\ z_1 &= C_1 x + D_{13} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{23} u \\ y &= C_3 x + D_{31} w_1 + D_{32} w_2 \end{aligned}$$

이고, 외부입력  $w_i (i=1,2)$ 에서 오차신호  $z_i (i=1,2)$  사이와, 제어입력  $u$ 와 측정되어지는 출력  $y$  사이에 연결요소가 없다고 가정한다. 또한, 플랜트와 제어기는 유한차원을 가지는 선형시불변시스템이다. 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기를 구하기 위한 표준플랜트에 대한 가정은 다음과 같다.

- ①  $(A, B_3)$ 는 안정가능(stabilizable)이고  $(C_3, A)$ 는 탐지가능(detactable)하다.
- ②  $D_{13} D_{13}, D_{23} D_{23}, D_{31} D_{31}, D_{32} D_{32}$ 는 full rank이다.
- ③ 모든  $\omega$ 에 대해  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_3 \\ C_1 & D_{13} \end{bmatrix}$ 는 full column rank이다.
- ④ 모든  $\omega$ 에 대해  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_3 \\ C_2 & D_{23} \end{bmatrix}$ 는 full column rank이다.
- ⑤ 모든  $\omega$ 에 대해  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_3 & D_{31} \end{bmatrix}$ 는 full row rank이다.
- ⑥ 모든  $\omega$ 에 대해  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_3 & D_{32} \end{bmatrix}$ 는 full row rank이다.

논문에서 사용되는 표기법은 다음과 같다.

- $\sigma_{\max}$  최대 특이치(largest singular value)
- $tr$  trace

- $M'$   $M$ 의 전치(transpose)
- $M^*$   $M$ 의 공액전치(conjugate transpose)
- $M^-$   $M$ 의 직교보(orthogonal complement)
- $\rho(M)$   $M$ 의 최대 고유치(largest eigenvalue)
- $Im(M)$   $M$ 의 image space
- $M^+$   $M$ 의 Moore-Penrose 역행렬(단,  $M=0$ 이면,  $M^+ = 0$ 으로 정의)
- $T_{zw}$   $w$ 에서  $z$ 까지의 전달행렬(transfer matrix function)

$$G(s) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} := C(sI - A)^{-1}B + D$$

(전달함수의 상태공간 표현)

$$G^-(s) := G(-s)$$

$$\|G(s)\|_2 := \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tr[ G^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max}[ G(j\omega)]$$

## II. 매개변수화를 이용한 혼합 $H_2/H_\infty$ 상태궤환

본장에서는  $H_2$ 와  $H_\infty$ 의 조건을 만족하는 상태궤환 제어기를 동시에 찾는 방법, 즉  $\inf \{ \|T_1(K)\|_2 : K \text{ 허용가능(admissible)} \}$ 을 만족하는 제어기 중에서  $\|T_2(K)\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 해를 찾는 방법에 대하여 알아본다.

### 1. $H_2$ 제어기들의 매개변수화

$$G := \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w_1 + B_2 w_2 + B_3 u \\ z_1 = C_1 x + D_{13} u \\ z_2 = C_2 x + D_{23} u \\ y = x \end{cases}$$

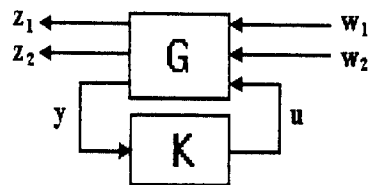


그림 1. 상태궤환에 대한 혼합  $H_2/H_\infty$  블록선도  
Fig. 1. Mixed  $H_2/H_\infty$  block diagram for state feedback.

$T_1 := T_{z_1 w_1}, T_2 := T_{z_2 w_2}$ 로 두면,  $\|T_1\|_2$ 을 최소화

하는 허용가능한 제어기중의 하나는  $K_o = F$ 이다. 여기서 상수행렬  $F$ 는

$$A'X_1 + X_1A + C_1' C_1 - (D_{13}' C_1 + B_3' X_1) (D_{13}' D_{13})^{-1} (D_{13}' C_1 + B_3' X_1) = 0$$

$$F = -(D_{13}' D_{13})^{-1} (D_{13}' C_1 + B_3' X_1) \quad (1)$$

으로 계산되고,  $\Pi_1 := I - B_1 B_1^+$ ,  $A_F := A + B_3 F$ ,  $C_{kF} := C_k + D_{k3} F$  ( $k=1, 2$ )으로 정의하고 전달행렬들의 집합은

$$S := \{ Q \in RH_\infty : Q = W \Pi_1 (sI - A_F), W \in RH_2 \} \quad (2)$$

으로 정의한다.

**정리 2.1** <sup>[11]</sup>

$$J := \begin{bmatrix} A_F & 0 & B_3 \\ 0 & F & I \\ -I & I & 0 \end{bmatrix}, \quad Q \in S$$

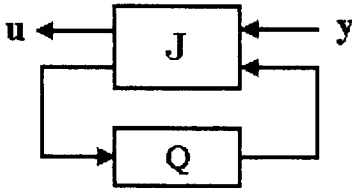


그림 2. 상태폐환제어기의 매개변수화

Fig. 2. Parameterization of state feedback controller.

제어기  $K$ 가  $\|T_1\|_2$ 을 최소화하기 위한 필요충분조건은  $K$ 가  $y$ 에서  $u$ 까지의 전달행렬과 동일하면 되고,  $K$ 는

$$K := J_{11} + J_{12} Q (I - J_{22} Q)^{-1} J_{21} = F + Q (I + N Q)^{-1} \quad (3)$$

이며, 여기서  $N := \begin{bmatrix} A_F & B_3 \\ I & 0 \end{bmatrix}$ 이다.

페루프시스템  $T_1$ 은 [8]에 의해 매개변수화되고, 식 (2)의  $W$ 는

$$W := \begin{bmatrix} A_w & B_w \\ C_w & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

로 둘 수 있고,  $W$ 는  $\|T_2\|_\infty$ 을 최소화하는 제어기(식 (12))이다. 식 (2)에 의해서

$$Q := \begin{bmatrix} A_w & A_w B_w \Pi_1 - B_w \Pi_1 A_F \\ C_w & C_w B_w \Pi_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이고, 식 (3)에 의해서

$$K := \begin{bmatrix} A_K & A_K B_w \Pi_1 - B_w \Pi_1 A_F \\ C_w & F + C_w B_w \Pi_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

이며, 이때  $A_K := A_w - B_w \Pi_1 B_3 C_w$ 이다.

2. 상태폐환제어기 설계

2.1절의 매개변수화된  $H_2$  제어기 중에서  $H_\infty$  노음을 만족하는 제어기가 존재할 필요충분조건은 다음과 같다.

$$1) \hat{A}' X_2 + X_2 \hat{A} + X_2 [ \gamma^{-2} B_2 B_2' - B_3 (D_{23}' D_{23})^{-1} B_3 ] X_2 + C_2' C_2 - C_2' D_{23} (D_{23}' D_{23})^{-1} D_{23} C_2 = 0 \quad (7)$$

여기서,  $\hat{A} := A - B_3 (D_{23}' D_{23})^{-1} D_{23}' C_2$ 이다.

$$2) Y_2 A_F + A_F Y_2 + \gamma^{-2} Y_2 C_{2F}' C_{2F} Y_2 + B_2 (I - V_2' V_2) B_2' = 0 \quad (8)$$

$$3) \rho(Y_2 X_2) < \gamma^2 \quad (9)$$

식 (7~9)는 부록 A의 알고리즘으로부터 얻어진다.

**보조정리 2.2**

아래의 세가지 조건

- 1) 식 (7)에서  $X_2 \geq 0$ 인 안정화하는 해를 가진다
- 2) 식 (8)에서  $Y_2 \geq 0$ 인 안정화하는 해를 가진다
- 3) 식 (9)를 만족한다

을 만족할때 상태폐환 제어기는

$$K := \begin{bmatrix} A_o & A_o \Sigma - \Sigma A_F \\ (D_{23}' D_{23})^{-1} (H - D_{23}' C_{2F}) & F + (D_{23}' D_{23})^{-1} (H - D_{23}' C_{2F}) \Sigma \end{bmatrix} \quad (10)$$

이고, 여기서 각 요소는

$$A_o := A_F - B_3 (D_{23}' D_{23})^{-1} D_{23}' C_{2F} + \gamma^{-2} (I - \Sigma) B_2 B_2' X_2 + (I - \Sigma) B_3 (D_{23}' D_{23})^{-1} H + \Sigma B_3 (D_{23}' D_{23})^{-1} D_{23}' C_{2F},$$

$$A_F := A + B_3 F, \quad C_{2F} := C_2 + D_{23} F, \quad V_2 := \Pi_1 B_2,$$

$$\Pi_1 := I - B_1 B_1^+, \quad \Sigma := Z_2 B_2 V_2^+ \Pi_1, \quad Z_2 := (I - \gamma^{-2} Y_2 X_2)^{-1},$$

$$H := -B_3 X_2, \quad F := -(D_{13}' D_{13})^{-1} (D_{13}' C_1 + B_3' X_1) \quad (11)$$

이다.

$W$ 는 부록 A의 알고리즘에 의하여

$$W = \begin{bmatrix} A_w & Z_2 B_2 V_2^+ \\ (D_{23} D_{23})^{-1} (H - D_2 C_{2F}) & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

이고, 여기서  $A_w$ 는

$$A_w := A + B_3 F + B_3 (D_{23} D_{23})^{-1} (H - D_{23} C_{2F}) + \gamma^{-2} (I - \Sigma) B_2 B_2^T X_2 \quad (13)$$

이며, 식 (10)에서 구한  $K$ 는 식 (4), (6), 및 (10)으로부터 나온다.

### III. 일반적 혼합 $H_2/H_\infty$ 출력궤환

본 장에서는  $T_{z_1 w_2}$ 의 전달함수의  $H_\infty$ -노음 제약조건 하에 혼합  $H_2/H_\infty$  성능지수를 최소화하는 내부안정화 제어를 찾는 방법을 제시한다. 우선 주어진 두개의 외부입력에 두개의 오차신호를 가지는 시스템을 동일한 성능을 가지도록 두개의 외부입력에 하나의 오차신호를 가지는 보조시스템으로 변형한다. 변형된 시스템에 대하여 기존의 존재하는 혼합  $H_2/H_\infty$  문제의 결과를 이용하므로써, 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  출력궤환 문제의 제어를 구할 수 있다.

$$G := \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w_1 + B_2 w_2 + B_3 u \\ z_1 = C_1 x + D_{13} u \\ z_2 = C_2 x + D_{23} u \\ y = C_3 x + D_{31} w_1 + D_{32} w_2 \end{cases}$$

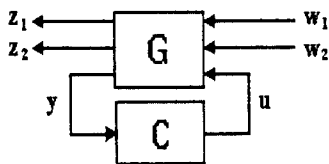


그림 3. 혼합  $H_2/H_\infty$  블록선도  
Fig. 3. Mixed  $H_2/H_\infty$  block diagram.

#### 정리 3.1

(i) 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  표준플랜트

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w_1 + B_2 w_2 + B_3 u \\ z_1 &= C_1 x + D_{13} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{23} u \\ y &= C_3 x + D_{31} w_1 + D_{32} w_2 \end{aligned} \quad (14)$$

(ii) 변형된 보조플랜트

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w_1 + B_2 w_2 + B_3 u \\ z &= \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} D_{13} \\ D_{23} \end{bmatrix} u := C_{au} x + D_{au} u \quad (15) \\ y &= C_3 x + D_{31} w_1 + D_{32} w_2 \end{aligned}$$

동일 제어기에 대해서  $\alpha$ 의 값을 정하므로써, 플랜트 (i)은 동일한 성능을 가지는 플랜트 (ii)로 변환된다. 따라서 (ii)의 해만 구하면 ‘일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  출력궤환문제’인 (i)이 풀려진다.

(증명) 제어를 식 (16)으로 정의하고,  $\psi := \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$ 라 두자.

$$\Sigma_F := \begin{cases} \dot{\xi} = \hat{A} \xi + \hat{B} y \\ u = \hat{C} \xi + \hat{D} y \end{cases} \quad (16)$$

제어기 식 (16)과 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  표준플랜트 식 (14)로 구성된 폐루프시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \begin{bmatrix} A & B_3 \hat{C} \\ \hat{A} & \hat{B} C_3 \end{bmatrix} \psi + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hat{B} D_{31} \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} B_2 \\ \hat{B} D_{32} \end{bmatrix} w_2 \\ &:= F \psi + G_1 w_1 + G_2 w_2 \\ z_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & D_{13} \hat{C} \end{bmatrix} \psi := H_1 \psi \\ z_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & D_{23} \hat{C} \end{bmatrix} \psi := H_2 \psi \end{aligned}$$

이고, 식 (14)에 대한 성능함수를

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty [ z_1^T z_1 + \alpha (z_2^T z_2 - w_2^T w_2) ] dt \quad (17)$$

와 같이 두면, 식 (14)를 안정화하는 해는

$$F P + P F + (\alpha)^{-1} P G_2 G_2^T P + H_1^T H_1 + \alpha H_2^T H_2 = 0 \quad (18)$$

으로부터 구해지고, 식 (14)에 대한 혼합  $H_2/H_\infty$  성능지수는

$$\inf_\alpha \{ \text{tr} (G_1^T P(\alpha) G_1) \} \quad (19)$$

이며, 여기서  $P(\alpha)$ 는 식 (18)의 해인  $P$ 가  $\alpha$ 에 관한 함수인 것을 의미한다. 제어기 식 (16)과 변형된 보조플랜트 식 (15)로 구성된 폐루프시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \begin{bmatrix} A & B_3 \hat{C} \\ \hat{A} & \hat{B} C_3 \end{bmatrix} \psi + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hat{B} D_{31} \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} B_2 \\ \hat{B} D_{32} \end{bmatrix} w_2 \\ &:= F \psi + G_1 w_1 + G_2 w_2 \\ z &= \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma} C_1 & \sqrt{\sigma} D_{13} \hat{C} \\ C_2 & D_{23} \hat{C} \end{bmatrix} \psi := H \psi \end{aligned}$$

이고, 식 (15)에 대한 성능함수는  $H_\infty$  이론에서와 같이

$$J_b = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z' z - \gamma^2 w_2' w_2) dt \quad (20)$$

로 둘 수 있다. 식 (15)를 안정화하는 해는

$$F'Q + QF + (\beta)^{-1} QG_2 G_2' Q + H'H = 0 \quad (21)$$

이며, 여기서  $\beta = \gamma^2$ 이고 식 (15)에 대한 혼합  $H_2/H_\infty$  성능지수는

$$\inf_{\beta} \{ \text{tr}(G_1' Q(\beta) G_1) \} \quad (22)$$

이며, 여기서  $Q(\beta)$ 는 식 (21)의 해인  $Q$ 가  $\beta$ 에 관한 함수인 것을 나타낸다. 식 (18)과 식 (21)에서  $\alpha = \beta$ 로 잡으면  $P=Q$ 가 되어 두식은 동일하게 된다. 따라서, 식 (14)와 식 (15)에 대한 혼합 성능지수인 식 (19)과 식 (22)는 동일한 문제가 된다.  $\square$

정리 3.1을 통하여 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  표준플랜트가 보조시스템으로 변형되어도 동일성능을 가짐을 보였다. 따라서 변형된 보조플랜트인 식 (15)에 대하여 두개의 외부입력에 하나의 오차신호에 대해서 평가함수를 이용해 문제에 접근하는 존재하는 혼합  $H_2/H_\infty$ 의 결과<sup>[3],[14]</sup>를 이용하면 아래의 결과를 얻을 수 있다. 물론 변형된 시스템에 대한 가정은 Zhou 등<sup>[31],[14]</sup>과 동일하다. 주어진  $\gamma > 0$ 에 대하여, 식 (15)에 대한 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기가 존재할 충분조건은 다음과 같다.

$$1) \quad (A - B_3 D_{au}' C_{au})' X_\infty + X_\infty (A - B_3 D_{au}' C_{au}) + X_\infty (\alpha^{-1} B_2 B_2' - B_3 B_3') X_\infty + C_{au}' D_{au} (D_{au})' C_{au} = 0 \quad (23)$$

2) 다음의 방정식을 만족하는  $L, Y$ , 그리고  $X$ 가 존재한다.

$$i) \quad Y(LD_{31} D_{31}' + B_1 D_{31}' + X C_3' + \alpha^{-1} X X_\infty B_2 D_{32}' + \alpha^{-1} X Y L D_{32} D_{32}' + \alpha^{-1} X Y B_2 D_{32}') = 0 \quad (24)$$

$$ii) \quad Y A_1 + A_1' Y + \alpha^{-1} Y (B_2 + L D_{32}) (B_2 + L D_{32})' Y + F_\infty' F_\infty = 0 \quad (25)$$

여기서,  $Y \geq 0$ 이고  $A_1 + \alpha^{-1} (B_2 + L D_{32}) (B_2 + L D_{32})' Y$ 는 안정이다.

$$iii) \quad \begin{bmatrix} A_1 + \alpha^{-1} (B_2 + L D_{32}) (B_2 + L D_{32})' Y & X \\ X' & A_1 + \alpha^{-1} (B_2 + L D_{32}) (B_2 + L D_{32})' Y \\ + (B_1 + L D_{31}) (B_1 + L D_{31})' & = 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서, 각 변수는

$$\begin{aligned} A_1 &= A + \alpha^{-1} B_2 B_2' X_\infty + L (C_3 + \alpha^{-1} D_{32} B_2' X_\infty) \\ F_\infty &= - (D_{au}' C_{au} + B_3' X_\infty) \end{aligned} \quad (27)$$

으로 정의한다.

식 (23~26)은 [3]과 [14]로부터 얻어진다.

### 보조정리 3.2

아래의 조건

1) 식 (23)에서  $X_\infty \geq 0$ 인 안정화하는 해를 가진다

2) 식 (24~26)을 만족하는  $L, Y$ , 그리고  $X$ 가 존재한다

을 만족할때 출력제한 제어기는

$$K := \begin{bmatrix} A_1 + B_3 F_\infty & -L \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix}$$

으로 주어진다.  $\square$

정리 3.1의 방법은 여러가지 알고리즘에 응용하여 사용할 수 있다. 다음의 참조들은 정리 3.1을 이용하여 얻을 수 있는 결과를 나타낸다.

### 참조 3.3

정리 3.1과 볼록형 최적화(convex optimization) 접근방법<sup>[6]</sup>을 이용하면 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  시스템에 대한 성능지수를 최적화하는 추정이득(estimation gain)을 구할수가 있다.

### 참조 3.4

일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  문제를 동일성능을 가지도록 정리 3.1과 쌍대(dual)관계인 하나의 외부입력에 두개의 오차신호를 가지는 보조시스템으로도 변형가능하며 [1], [6] 등을 이용하면 제어기를 구할 수가 있다.

## IV. 결론

출력제한 시스템에 대한 견실안정화와 성능문제를 동시에 만족하는 일반적 혼합  $H_2/H_\infty$  문제, 즉 두개의 외부입력에 두개의 오차신호를 가지는 시스템에 대한 제어기 설계 알고리즘을 제시하였다. 주어진 문제를 동일성능을 가지는 보조시스템으로 변환한 후, 존재하는 혼합  $H_2/H_\infty$  문제의 결과를 이용하므로써 일반적 출력제한문제에 대한 제어기를 구성하였다.

본 논문에서 제시한 알고리즘은 실제 시스템에서 문제가 되는 내외부 불확실성에 대한 안정화, 과도응답과 추적성능문제, 및 측정잡음의 영향감소 등을 동시에 해결할 수 있다. 앞으로의 연구과제는 Rotea 등<sup>[11]</sup>이

제시한 방법처럼  $H_2$ 와  $H_\infty$ 의 조건을 동시에 만족하는 출력제한 제어기를 찾는 방법이다.

참 고 문 헌

[1] D. S. Bernstein and W. M. Haddad, "LQG control with an  $H_\infty$  performance bound: A Riccati equation approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 3, pp. 293-305, Mar. 1989.

[2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug. 1989.

[3] J. C. Doyle, K. Zhou, and B. Bodenheimer, "Optimal control with mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives," *ACC*, vol. 3, pp. 2065-2070, June 1989.

[4] B. A. Francis, *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88, New York: Springer-Verlag, 1987.

[5] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity," *Syst. & Contr. Lett.*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.

[6] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, "Mixed  $H_2/H_\infty$  control: A convex optimization approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, pp. 824-837, 1991.

[7] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice Hall, 1970.

[8] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison Welsley, 1989.

[9] D. Mustafa, "Combined  $H_\infty$ /LQG control via the optimal projection equations: On minimizing the LQG cost bound," *Int. J. of Robust and Nonlinear Cont.*, vol. 1, pp. 99-109, 1991.

[10] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex Function*, Academic Press, 1973.

[11] M. A. Rotea and P. P. Khargonekar, " $H_2$ -optimal control with an  $H_\infty$ -constraint:

The state feedback case," *Automatica*, vol. 27, no. 2, pp. 307-316, 1991.

[12] K. Zhou, "Comparison between  $H_2$  and  $H_\infty$  controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 8, Aug. 1992.

[13] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, and B. Bodenheimer, "Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  control," *IEEE Proc. ACC*, San Diego, CA, pp. 2502-2507, 1990.

[14] J. C. Doyle, K. Zhou, K. Glover, and B. Bodenheimer, "Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives II: Optimal control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 8, pp. 1575-1587, Aug. 1992.

부 록 A

Glover와 Doyle<sup>[5]</sup>에 의해 제시된 표준  $H_\infty$  문제의 수정된 이론을 제시한다.

$$P := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 \\ C_2 & D_2 & 0 \end{bmatrix}$$

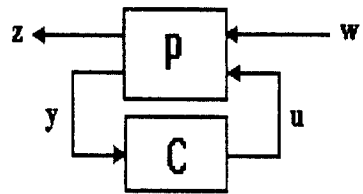


그림 A1. 폐환 시스템에 대한 블록선도  
Fig. A1. Block diagram for feedback system.

플랜트  $P$ 는 위와 같고, 다음 가정들을 만족한다.

- ①  $(A, B_2)$ 는 안정가능하고  $(C_2, A)$ 는 탐지가능하다.
- ②  $D_1$ 는 full column rank이고,  $D_2$ 는 full row rank이다.
- ③ 모든  $\omega$ 에 대해  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$  이 full column rank이다.
- ④ 모든  $\omega$ 에 대해  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$  이 full row rank이다.

안정화하는 해를 구하기 위한 두가지 ARE(algebraic Riccati equation)는

$$A_1 X + X A_1 + (\gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 (D_1 D_1')^{-1} B_2') X + C_1' (I - D_1 (D_1 D_1')^{-1} D_1) C_1 = 0 \quad (A.1)$$

$$A_2 Y + Y A_2 + Y (\gamma^{-2} C_1' C_1 - C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2) Y + B_1 (I - D_2 (D_2 D_2')^{-1} D_2) B_1 = 0 \quad (A.2)$$

이고, 각 변수는

$$\begin{aligned} A_1 &:= A - B_2 (D_1 D_1')^{-1} D_1' C_1 \\ A_2 &:= A - B_1 D_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 \end{aligned} \quad (A.3)$$

로 정의한다.

**보조정리 A.1**  $\|T(C)\|_\infty < \gamma$ 인 허용가능한 제어기가 존재할 필요충분조건은 아래와 같다.

1) 식 (A.1) ARE는  $X \geq 0$ 인 안정화하는 해를 가진다.

2) 식 (A.2) ARE는  $Y \geq 0$ 인 안정화하는 해를 가진다.

3)  $\rho(YX) < \gamma^2$

이러한 조건을 만족할 때 제어기는

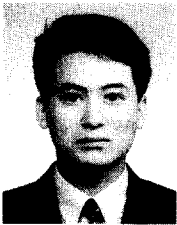
$$C := \begin{bmatrix} A_F + \gamma^{-2} (B_1 + Z L D_2') B_1' X + Z L C_2 & -Z L \\ F & 0 \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

이고 여기서 각 요소는

$$\begin{aligned} L &= -(Y C_2' + B_1 D_2') (D_2 D_2')^{-1} \\ F &= -(D_1 D_1')^{-1} (B_2' X + D_1' C_1) \\ A_F &= A + B_2 F \\ Z &= (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \end{aligned} \quad (A.5)$$

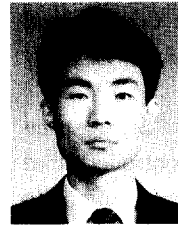
이다.

— 저 자 소 개 —



金鍾海(正會員)

1970년 1월 10일생. 1993년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업. 1995년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 석사학위 취득. 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정. 주관심분야는 파라미터 불확실성 시스템의 견실  $H_\infty$  제어, 시간지연시스템의  $H_\infty$  제어, 혼합  $H_2/H_\infty$  제어, 압연기 시스템의 제어기 설계 등임



方敬皓(正會員)

1968년 5월 27일생. 1991년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업. 1993년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 석사학위 취득. 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정. 주관심분야는 견실제어,  $H_\infty$  제어,  $\mu$ -synthesis, 혼합  $H_2/H_\infty$  제어, 유도항법제어 등임

朴 烘 培(正會員) 第 32卷 B編 2號 取得

현재 경북대학교 전자전기공학부