

論文96-33B-3-2

# 비최소 위상 플랜트에서 LQ-servo 방법 (LQ-servo Method for Non-minimum Phase Plants)

徐 丙 高 \*, 張 台 愚 \*

(Byung-Suhl Suh and Taewoo Chang)

## 요 약

LQ-servo는 LQR의 구조를 기초로 하여 안정도-강인성을 보장하고, 출력 제어를 포함시켜 명령 추종의 성능을 이룰 수 있도록 고안된 다변수 제어기 설계 방법이다. 본 연구에서는 비최소 위상 플랜트에서 LQ-servo의 성능 개선을 위해 특이값 선도를 이용한 주파수역 설계에서 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 의 저주파 부분 이득을 증가시킬 수 있도록 성능 지수의 상태 가중 행렬의 저주파 부분에 가중치를 도입하였다.

## Abstract

LQ-servo is a robustness guaranteed multivariable controller design method based on the LQR structure to improve command following with output feedback. In this paper we introduce a weighting factor on the low frequency part of the state weighting matrix in the performance index in order to increase the low frequency gain of loop transfer function matrix  $T(s)$  in the loop shaping design method.

## I. 서 론

최근에 활발히 연구되어 온 제어기 설계 이론의 가장 큰 특징은 모델링 오차에 의한 시스템의 불확실성을 고려한 강인성(robustness)의 개념을 도입한 것이라 할 수 있다. 그 대표적인 방법으로 LQG/LTR(Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery)과  $H_\infty$  등을 들 수 있다.

그런데 이 방법들은 최소 위상 플랜트(minimum phase plant)에서는 강인성을 보장할 수 있는 최적 제어기 설계 이론이 될 수 있지만, 비최소 위상 플랜트(non-minimum phase plant)에 대해서는 직접적인

이론 적용이 어렵다. 이러한 비최소 위상 플랜트의 문제점을 해결하기 위해 LQG/LTR의 경우 Stein과 Athans<sup>[1]</sup>, Zhang과 Freudenberg<sup>[2]</sup>, Suh<sup>[3]</sup>, Moore와 Xia<sup>[4]</sup>, 그리고 Saberi, Chen과 Sannuti<sup>[5]</sup> 등에 의한 시도가 있었다. Stein과 Athans이 제시한 근사화 방법은 근사화로 발생하는 곱셈형 오차(multiplicative error)가 주파수의 증가와 함께 커지므로 아주 낮은 주파수 영역에서만 효과적으로 사용할 수 있는 문제점을 갖고 있다. Zhang과 Freudenberg에 의해서는 비최소 위상 영점의 위치에 따라 루프 전달 회복(loop transfer recovery, LTR)의 정도를 결정할 수 있다는 해석적인 연구는 되었으나 그에 대한 구체적인 설계 방법은 제시하지 못하고 Stein과 Athans가 제시한 방법을 그대로 이용하였다. Suh에 의해서는 Stein과 Athans의 방법보다 더 넓은 주파수 영역에서 오차를 줄일 수 있도록 덧셈형 오차(additive error)에 기초한 근사화 방법이 제시되었으나 덧셈형 오차를 임의로 선정하여야 하는 문제와 설계된 보상기가 고차(high order)가 될 수 있는 문

\* 正會員, 漢陽大學校 電子通信學科

(Dept. of Elec. Comm. Eng., Hanyang Univ.)

※ 1994년 한양대학교 교내 연구비와 1995년도 한국 과학재단 핵심전문연구과제(951-0914-092-1)지원에 의해 이루어진 것임.

接受日字:1995年1月7日, 수정완료일:1995年10月23日

제가 있다. 그리고 비최소 위상 플랜트에 대해 루프 전달 회복을 시키고자 하는 노력의 일환으로 Moore와 Xia에 의해 소개된 방법은 비최소 위상 플랜트를 최소 위상 플랜트와 비최소 위상 영점을 포함하는 전역 통과 인수(all pass factor)로 분해(factorization)하고 최소 위상 플랜트의 상태만 부분적(partial loop)으로 루프 전달 회복을 이루려는 시도로 전역 통과 인수가 루프 전달 회복에서 제외되었으며 회복된 루프 전달 함수의 강인성을 보장시킬 수 없는 결정적인 문제를 갖고 있다. 또한 Saberri 등은 고유 구조(eigen structure)를 이용하여 설계의 자유도를 크게 함으로써 비최소 위상 플랜트에서 루프 전달 회복이 가능하도록 하였으나 이 방법 역시 최적 제어의 결여와 회복된 루프 전달 함수가 강인성을 잃어버리는 문제점이 지적될 수 있다. H<sub>∞</sub>에서도 Doyle이<sup>[6]</sup> 제시한 방법을 보면 비최소 위상 플랜트에 대한 improper의 Q 퍼라미터를 선정하고, 이 함수가 proper가 되도록 하기 위해 임의의 차수(order)인 식을 곱하기 때문에 오차가 되는 문제점을 갖고 있다.

이와 같이 비최소 위상 플랜트에 대해 강인성을 보장시킬 수 있는 제어기 설계 방법에 대한 노력에도 불구하고 명확하고 이론적 근거에 의해 체계적으로 성립되는 제어기 설계 방법이 아직 개발되지 못했다. 그래서 본 연구에서는 LQR(Linear Quadratic Regulator)의 구조를 기초로 하여 안정도-강인성(stability-robustness)은 보장받고 출력 궤환으로 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 갖는 LQ-servo(Linear Quadratic servo) 방법으로<sup>[7]</sup> 비최소 위상 플랜트에서 명령 추종 및 외란 제거의 성능 문제를 다루고자 한다. 전형적인 최적 제어기인 LQR은 모든 상태(full state)가 궤환(feedback)되면 Kalman 주파수역 증가식에 의해 안정도-강인성이 완전히 보장된다. 그러나 LQR은 출력 궤환이 없기 때문에 제어 시스템의 수행 목표인 명령 추종을 이룰 수 없다. 그래서 출력 궤환을 포함하는 LQ-servo 구조를 이용하여 LQR에서 결여된 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 향상시킬 수 있고, LQR과 같이 모든 상태가 궤환되므로 안정도-강인성은 자동적으로 보장받게 된다.

본 연구에서는 LQ-servo 설계시 성능 지수(performance index)의 상태 가중 행렬을 결정하는 설계 퍼라미터의 저주파 부분이 가중치를 도입하였다. 이 때 가중치를 크게 하여 감도 함수 행렬과 반비례 관계인

루프 전달 함수 행렬 T(s)의 고주파 부분 특이값은 변화시키지 않고 저주파 부분 특이값을 증가시켜 비최소 위상 플랜트의 명령 추종 및 외란 제거의 성능이 향상 되도록 하였다.

## II. LQ-servo

### 1. LQ-servo의 구조

LQ-servo는 LQR을 서보 시스템으로 사용하고자 개선한 방법으로, 출력 변수를 플랜트의 상태 변수에 포함시키고 정상 상태 오차를 제거하기 위해 오차에 대한 적분 요소의 상태를 플랜트의 상태 변수에 추가한(augmented) 구조로 다음의 그림 1과 같다.<sup>[7]</sup>

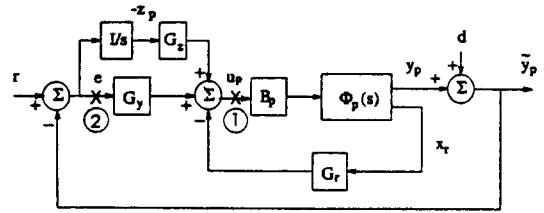


그림 1. LQ-servo의 구조  
Fig. 1. The structure of LQ-servo.

출력 변수가 상태 변수의 일부가 되도록 n차원인 플랜트의 상태 변수  $x_p(t)$ 에서 처음 m차원을 출력 변수  $y_p(t)$ 로 하고, 나머지 n-m차원을(n>m) 부분 상태 궤환으로 한다. 그리고 정상 상태 오차를 제거하기 위한 오차의 적분 요소에 대한 상태  $z_p(t)$ 를 플랜트의 상태에 추가시키면, 전체 상태  $x(t)$ 는 (1)식과 같이 표현되고 이에 대한 상태 공간식은 (2)식으로 표현된다. 이 때 기준 입력 벡터  $r(t)$ , 출력 벡터  $y_p(t)$ , 오차 벡터  $e(t)$ , 그리고 제어 입력 벡터  $u(t)$ 의 차원은 m으로 같다고 가정한다.

$$x(t) = [ z_p(t) \ x_p(t) ]^T, \quad x(t) \in R^{m+n} \tag{1}$$

여기서,  $x_p(t) = [ y_p(t) \ x_r(t) ]^T, \quad x_p(t) \in R^n$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_p(t)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t), \quad x_r(t) = D_p x_p(t) \tag{2}$$

$$\dot{z}_p(t) = I y_p(t)$$

여기서,  $A = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, \quad A \in R^{(m+n) \times (m+n)}$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix}, \quad B \in R^{(m+n) \times m}$$

$$C_p = [ I_{m \times m} \ 0_{m \times (n-m)} ]$$

$$D_p = [ 0_{(n-m) \times m} \ I_{(n-m) \times (n-m)} ]$$

LQ-servo는 (2)식의 구속 조건을 아래서 다음 (3)식의 성능 지수 J를 최소화하는 LQR의 문제로 다룰 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} [ x^T(t)Qx(t) + u_p^T(t)Ru_p(t) ] dt \quad (3)$$

여기서,  $Q = N^T N$ ,  $R = \rho$

이 때  $[A, B]$ 가 안정가능하고  $[N, A]$ 가 검출가능하다고 가정하면, 제어 대수 Riccati 방정식(Control Algebraic Riccati Equation, CARE)인 (4)식에 의해 유일한 해 K가 구해지고, 제어이득 행렬은 (5)식이 되며, 이 때 최적 제어 법칙은 (6)식으로 표현할 수 있다.

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K = 0 \quad (4)$$

$$G = R^{-1}B^T K, G \in R^{m \times (m+n)} \quad (5)$$

$$G = [ G_z \ G_y \ G_r ]$$

$$u_p(t) = -Gx(t) \\ = -G_z z_p(t) - G_y y_p(t) - G_r x_r(t) \quad (6)$$

LQ-servo의 안정도-강인성을 알기 위해서는 그림 1에 표시된 플랜트 입력 측의 ①점에서 절단한 (7)식의 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 로 고려해야 한다. 이 때 ①점에서 절단한 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 는 LQR에서와 같은 식이 되므로 LQ-servo역시 LQR과 같이 모든 주파수에서 설계시 정한 최대 오차  $\sigma_{max} [E(s)]$ 보다 작은 곱셈형 오차에 대해 안정도-강인성이 보장된다.

$$G_{LQ}(s) = G(sI - A)^{-1}B \quad (7)$$

그리고 그림 1에 표시된 플랜트 출력이 반영된 ②점에서 절단한 (8)식의 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 를 사용하여 LQ-servo의 감도 함수 행렬과 페루프 전달 함수 행렬을 구하고, 이를 이용하여 LQ-servo의 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 조사할 수 있다.

$$T(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p (G_y + \frac{1}{s} G_z) \quad (8)$$

위의 (7)식과 (8)식에서 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 와  $T(s)$ 는 같지 않으므로 주파수역에서 LQ-servo의 안정도-강인성은  $G_{LQ}(s)$ 를 가지고 알 수 있고, 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 이루기 위해서는 특이값 선도에서 저주파와 고주파 부분에서  $T(s)$ 를 가지고 특이값을 일치시킬 수 있어야 한다. 그러나  $T(s)$ 의

최대 최소 특이값을 저주파와 고주파 부분에서 특이값 선도에 일치시키는 것이 불가능하여  $G_{LQ}(s)$ 로 설계하는 방법이 다음과 같이 제시되었다.<sup>17)</sup>

## 2. LQ-servo의 설계

적분 제어 요소를 포함한 LQ-servo는 저주파 및 고주파 부분에서  $G_{LQ}(s)$ 의 특이값을 일치시킬 수 있도록 설계 파라미터를 선정할 수 있다. 먼저 CARE로 유도되는 주파수역 등가식으로부터 LQ-servo의 주파수역 특성을 나타내는 (9)식을 구할 수 있다. 또한, (9)식은  $\rho \ll 1$ 인 경우 (10)식과 같이 근사된다.

$$\sigma_i [ I + G_{LQ}(s) ] = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2 [ N(sI - A)^{-1}B ]} \quad (9)$$

$$\sigma_i [ G_{LQ}(s) ] \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sigma_i [ N(sI - A)^{-1}B ] \quad (10)$$

저주파 및 고주파 부분에서의 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 의 근사값을 구하기 위해 (10)식의  $N(sI - A)^{-1}B$ 에서 설계 파라미터 N을 저주파 성분  $N_L$ 과 고주파 성분  $N_H$ 로 나누고  $N = [N_L \ N_H]$ 을 (10)식의  $N(sI - A)^{-1}B$ 에 대입하면  $N(sI - A)^{-1}B$ 는 다음 (11)식과 같이  $N_L$ 과  $N_H$ 의 항으로 나누어 표현할 수 있다.

$$N(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s} N_L C_p (sI - A_p)^{-1} B_p + N_H (sI - A_p)^{-1} B_p \quad (11)$$

위의 (11)식으로부터 저주파와 고주파 부분에서  $N(sI - A)^{-1}B$ 의 극한값을 구하면 (12)식이 된다.

$$s \rightarrow 0 \text{일때 } N(sI - A)^{-1}B \rightarrow \frac{1}{s} N_L C_p (-A_p)^{-1} B_p \quad (12)$$

$$s \rightarrow \infty \text{일때 } N(sI - A)^{-1}B \rightarrow \frac{1}{s} N_H B_p$$

특이값 선도에서 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 의 최대 최소의 특이값을 일치시키기 위해 저주파 및 고주파 부분에서  $\sigma_i [ N(sI - A)^{-1}B ]$ 의 극한값의 크기가 1이 되도록 하면  $N_L$ 과  $N_H$ 는 다음 (13)식과 같이 결정된다.

$$N_L = (C_p (-A_p)^{-1} B_p)^{-1} \quad (13)$$

$$N_H = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T$$

그리고, 저주파 및 고주파 부분에서의 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 는 (14)식으로 근사된다.

$$s \rightarrow 0 \text{일때 } \sigma_i [ G_{LQ}(s) ] \rightarrow \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \quad (14)$$

$$s \rightarrow \infty \text{일때 } \sigma_i [ G_{LQ}(s) ] \rightarrow \frac{1}{s\sqrt{\rho}}$$

이 때, 고주파 부분에서의 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 의 특이값 중에서 최대값의 대역폭을 결정하는 교차주파수  $\omega_{c,max}$ 를 구하면 (15)식이 된다.

$$\sigma_{\max}[G_{LQ}(j\omega_{c,max})] = 1 \rightarrow \omega_{c,max} \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (15)$$

위와 같은 방법으로 설계 파라미터  $N_L$ 과  $N_H$ 를 선정하여 그림 2와 같이 루프 전달 함수  $G_{LQ}(s)$ 의 특이값 형상을 얻고, 설계 파라미터  $\rho$ 를 결정하여 (14)식으로 저주파 부분의 이득  $\sigma_1[G_{LQ}(0)]$ 과 (15)식으로 교차주파수  $\omega_c$ 를 결정한다. 이 때  $G_{LQ}(s)$ 의 특이값 형상이 저주파 부분에서는 이득을 크게 하여 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 갖고, 고주파 부분에서는 이득을 작게 하여 센서 잡음에 영향을 받지 않도록 설계 파라미터  $\rho$ 를 정해야 한다. 위에서 선정된  $Q=N^T N$ 과  $R=\rho I$ 에 대해 CARE (4)식의 해  $K$ 를 구하고, (5)식에 대입하여 제어 이득 행렬  $G$ 를 구한다. 그리고 (6)식으로 최적 제어 입력  $u_p(t)$ 를 얻으면 LQ-servo의 주파수역 설계가 된다.

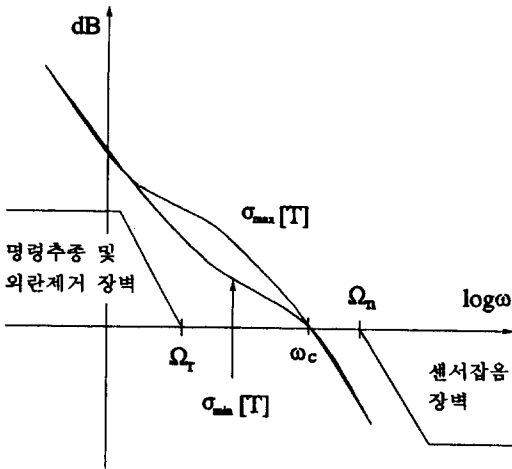


그림 2. 주파 및 고주파 부분에서 특이값을 일치시킨 LQ-servo의 특이값 형상

Fig. 2. Loop Shaping of LQ-servo with singular values matching in low and high frequencies.

### III. 비최소 위상 플랜트를 위한 LQ-servo 설계

비최소 위상 플랜트는 감도 함수 행렬의 특이값의 크기가 1보다 큰 주파수 영역이 존재하며<sup>18)</sup> 이 주파

수 영역이 제어 시스템의 대역폭보다 낮은 주파수 영역에 있게 되면 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 저하시킨다는 것은 이미 잘 알려진 사실이다.<sup>18)</sup> 이를 개선하기 위해서는 감도 함수 행렬의 특이값의 크기가 1보다 작은 주파수 영역을 가능한 크게 설계해야 한다. II장에서 설명한 방법으로 설계하면  $\rho$ 를 작게 해서 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 의 특이값을 크게 하는 방법을 생각할 수 있다. 그러나 이 방법은 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 의 특이값이 모든 주파수에서 커지므로 제어 시스템의 대역폭 역시 커지게 된다. 이로 인해 센서 잡음에 대해 민감하게 영향을 받게 되어 이 방법만으로는 비최소 위상 플랜트에 적용하여 명령 추종 및 외란 제거에 대한 성능의 향상을 바랄 수 없다. 그리고 루프 전달 함수 행렬  $G_{LQ}(s)$ 는 항상 최소 위상 플랜트가 되어  $G_{LQ}(s)$ 로 특이값을 일치시키면 비최소 위상 영점으로 인한 플랜트의 특성을 알 수 없는 문제가 있다. 그러므로 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 향상시키려면 플랜트 출력이 반영된 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 를 고려한 설계 파라미터로 주파수역 설계가 되어야 한다.

그래서 본 연구에서는 LQ-servo 방법에서 상태 가중 행렬을 결정하는 설계 파라미터  $N$ 의 저주파 성분  $N_L$ 과 고주파 성분  $N_H$  중에서 저주파 설계 파라미터  $N_L$ 에 가중치(weighting factor)  $\alpha$ 를 도입하였다. 가중치  $\alpha$ 를 크게 하면 적분 요소에 대한 제어 이득 행렬  $G_z$ 가 커지고 결과적으로 그림 1의 ②점에서의 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 의 특이값 선도에서 고주파 부분의 특이값은 변화되지 않고 저주파 부분의 특이값만 증가된다. 이를 확인하기 위해서 가중치  $\alpha$ 를 도입하였을 때 제어 이득 행렬  $G$ 의 변화와 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 의 관계를 살펴보면 다음과 같다.

설계 파라미터  $N$ 이  $[\alpha N_L, N_H]$ 가 되므로 상태 가중 행렬  $Q$ 가 변하고 (5)식의 CARE는 새로운 해  $K$ 를 갖게 된다. 이 때 새로운 상태 가중 행렬  $Q$ 를 설계 파라미터  $N = [\alpha N_L, N_H]$ 에 따라 분해하고  $A, B, R$ 과, CARE의 새로운 해  $K$ 를 분해된  $Q$ 의 차원에 맞게 같이 분해하여 CARE를 다시 쓰면 (16)식이 된다.

$$K \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_p^T & A_p^T \end{bmatrix} K + \begin{bmatrix} \alpha^2 N_L^T N_L & \alpha N_L^T N_H \\ \alpha N_H^T N_L & N_H^T N_H \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho} K \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_p^T \end{bmatrix} K = 0 \quad (16)$$

$$\text{여기서, } Q = N^T N = \begin{bmatrix} \alpha^2 N_L^T N_L & \alpha N_L^T N_H \\ \alpha N_H^T N_L & N_H^T N_H \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

그리고  $\rho \ll 1$ 인 경우 (16)식은 극한 거동식  $\lim_{\rho \rightarrow 0} K = 0$ 을 고려하면<sup>[9]</sup> CARE는 (17)식과 같은 근사식으로 생각할 수 있다.

$$Q - \frac{1}{\rho} K B B^T K = \begin{bmatrix} \alpha^2 N_L^T N_L & \alpha N_L^T N_H \\ \alpha N_H^T N_L & N_H^T N_H \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} K_{12} B_p B_p^T K_{21} & K_{12} B_p B_p^T K_{22} \\ K_{22} B_p B_p^T K_{21} & K_{22} B_p B_p^T K_{22} \end{bmatrix} \approx 0 \quad (17)$$

여기에서 행렬의 대각선 부분(diagonal term)을 대응시켜  $K_{21}$ 과  $K_{22}$ 를 각각  $N_L$ 과  $N_H$ 로 나타내면 다음 (18)식과 같은 관계식으로 표현할 수 있다.

$$(B_p^T K_{21})^T (B_p^T K_{21}) = (\alpha \sqrt{\rho} N_L)^T (\alpha \sqrt{\rho} N_L) \quad (18)$$

$$(B^T K_{22})^T (B_p^T K_{22}) = (\sqrt{\rho} N_H)^T (\sqrt{\rho} N_H)$$

그리고 제어 이득 행렬  $G$ 를 (16)식의 분해한 CARE의 해  $K$ 로 나타내면 다음 (19)식과 같다.

$$G = R^{-1} B^T K = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & B_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} B_p^T K_{21} & \frac{1}{\rho} B_p^T K_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$= [G_z \ G_x]$$

여기서,  $G_x = [G_y \ G_r]$

(18)식과 (19)식을 비교하면 적분 요소에 대한 제어 이득 행렬  $G_z$ 와 출력을 포함한 상태에 대한 제어 이득 행렬  $G_x$ 는 각각 다음의 (20)식으로 표현된다.

$$G_z^T G_z = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} N_L\right)^T \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} N_L\right) \quad (20)$$

$$G_x^T G_x = \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} N_H\right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} N_H\right)$$

위 (20)식 형태의 선형 대수 방정식은 (21)식과 같은 해가 존재한다.<sup>[10]</sup>

$$X^T X = M^T M \text{ 이면, } X = W M \quad (21)$$

여기서,  $W$ 는  $W^T W = I$ 인 일원 행렬(unitary matrix)이다. 그러므로 (21)식은 각각 다음의 (22)식과 같은 해가 존재한다.

$$G_z = W_1 \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} N_L \quad (22)$$

$$G_x = W_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} N_H$$

이 때  $N_L, N_H$ 는 설계 파라미터이므로  $W_i$ 를 단위 행렬이 되게 하는  $\bar{N}_L, \bar{N}_H$ 가 존재한다. 그러므로 (22)식은 각각 다음의 (23)식과 같이 정리된다.

$$G_z = \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \bar{N}_L \quad (23)$$

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \bar{N}_H$$

위의 (23)식에서 적분 요소에 대한 제어 이득 행렬  $G_z$ 는 가중치  $\alpha$ 를 도입함으로써 해서 가중치를 두지 않은 경우보다  $\alpha$ 배가 되고 출력을 포함한 상태에 대한 제어 이득 행렬  $G_x = [G_y \ G_r]$ 는 가중치  $\alpha$ 를 도입하여도 아무런 변화가 생기지 않았다.

이제 (8)식의 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 에 대해  $s \rightarrow 0$ 인 저주파 부분과  $s \rightarrow \infty$ 인 고주파 부분에서 근사식을 생각해 보면, 저주파 부분에서 적분 요소에 대한 제어 이득 행렬  $G_z$ 가 출력에 대한 제어 이득 행렬  $G_y$ 보다 지배적인 항이 되고, 고주파 부분에서는  $G_y$ 가  $G_z$ 보다 지배적인 항이 된다. 그래서 (23)식의 제어 이득 행렬을 각각 (8)식에 대입하여 저주파 영역 및 고주파 영역에서 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 의 근사식은 (24)식과 같이된다.

$$s \rightarrow 0 \text{일때, } T(s) \approx \frac{1}{s} C_p (sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p G_z \quad (24)$$

$$s \rightarrow \infty \text{일때, } T(s) \approx C_p (sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p G_y$$

위의 (24)식에서  $\alpha$ 를 도입한 결과, CARE가 (17)식으로 근사화 되기 위하여 설계 파라미터  $\rho \rightarrow 0$ 으로 LQ-servo를 설계하면, 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 의 고주파 부분의 특이값과 교차 주파수는 변화시키지 않고,  $G_z$ 의 영향으로 저주파 부분의 특이값 만을 변화시킬 수 있음을 확인할 수 있다.

그러므로, II장에서 설명한 바와 같이 설계 파라미터  $\rho$ 를 결정하여 루프 전달 함수 행렬의 저주파 부분의 이득과 교차 주파수  $\omega_c$ 가 주어진 조건에 맞도록 LQ-servo를 설계하였으나, 새로운 설계 파라미터인 가중치  $\alpha$ 를 이용하여  $\alpha$ 를 1보다 큰 값으로 설계하면, 교차주파수는 변화시키지 않고,  $\alpha$ 배 된 제어 이득 행렬  $G_z$ 의 영향으로 루프 전달 함수 행렬  $T(s)$ 의 저주파 부분의 특이값을 크게할 수 있다. 이로인해 루프 전달 함수 행렬과 반비례 관계인 감도 함수 행렬의 특이값이 저주파 영역에서 작아지고 이는 감도 함수 행렬의 특이값이 1보다 작은 저주파 영역을 넓게하여, 비최소 위상 플랜트에 대한 명령 추종 및 외란 제거의 성능을

향상시킬 수 있다.

IV. 예 제

본 연구에서 제시한 설계 파라미터  $\alpha$ 를 LQ-servo의 성능 지수에서 상태 가중 행렬을 결정하는 설계 파라미터 N의 저주파 부분 성분  $N_L$ 에 도입하여 비최소 위상 플랜트의 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 향상시킬 수 있음을 다음의 잘 알려진 예제를 통하여 확인한다.

(예제. 1) X-29 항공기<sup>[7]</sup> (SISO)

플랜트의 입출력 관계는 다음 식이고  $s=35$ 에 비최소 영점을 갖는다.

$$G(s) = \frac{20(s-35)(s+3)}{(s-6)(s+10)(s+20)(s+35)}$$

⊙ 설계 사양

1. 안정도-강인성 :  $E_{max}^{-1} = 100/\omega$
2. 성능-강인성 : 명령추종 및 외란제거 장벽의 경계값,  $\Omega_r=10(\text{rad/sec})$   
 센서잡음 장벽의 경계값,  $\Omega_n=100(\text{rad/sec})$

위의 설계 사양으로  $\rho=0.0001$ 로 정하고 비최소 위상 플랜트인 X-29 항공기에 대해 가중치를 고려하지 않은 기존의 방법과 가중치를 도입하여  $\alpha=2.5$ 로 설계한 경우를 비교하였다.

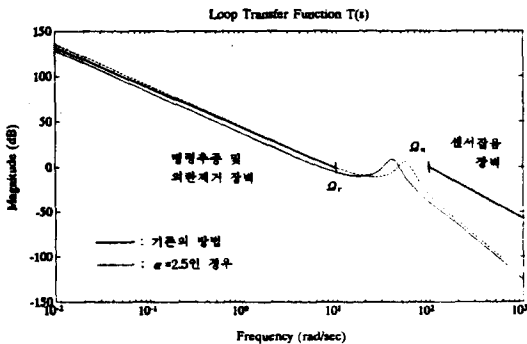


그림 3. 예제 1에 대한 루프 전달 함수 T(s)의 보드 선도  
 Fig. 3. Bode plot of the Loop Transfer Function T(s) for example 1.

그림 3에서 루프 전달 함수 행렬 T(s)는 가중치  $\alpha$

=2.5를 도입하여 설계한 경우 보드 선도의 저주파 부분에서 루프 전달 함수 행렬 T(s)의 이득이 커지고 명령 추종 및 외란 제거의 성능이 향상됨을 알 수 있다. 그리고 그림 4에서는 가중치를 도입한 설계 방법이 단위 계단 함수의 입력에 대한 시간 응답이 빨라짐을 확인할 수 있다.

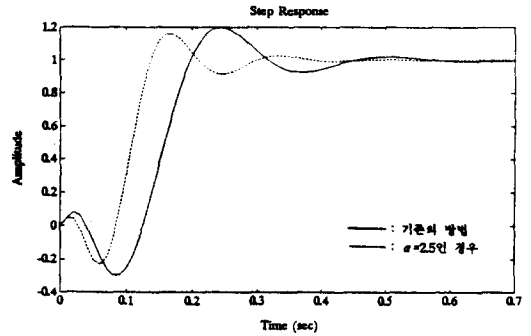


그림 4. 예제 1에 대한 단위 시간 응답  
 Fig. 4. Unit Step Response for example 1.

(예제. 2) F-8 항공기 엔진<sup>[7]</sup> (MIMO)

F-8 항공기 엔진의 각 입력에 약 0.25초의 시간 지연이 있다고 가정하면  $s=8$ 의 비최소 위상 영점을 갖고 상태 공간식은 다음과 같다.

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.0006 & 12 & 0 \\ 0 & -0.014 & -16.64 & -32.2 \\ 1 & -0.0001 & -1.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} -19 & -3 \\ -0.66 & -0.5 \\ -0.16 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

⊙ 설계 사양

1. 안정도-강인성 :  $E_{max}^{-1} = 20/\omega$
2. 성능-강인성 : 명령추종 및 외란제거 장벽의 경계값,  $\Omega_r=0.5(\text{rad/sec})$   
 센서잡음 장벽의 경계값,  $\Omega_n=100(\text{rad/sec})$

위의 설계 사양으로  $\rho=0.02$ 로 정하고 비최소 위상 플랜트인 F-8 항공기 엔진에 대해 가중치를 고려하지 않은 기존의 방법과 가중치를 도입하여  $\alpha=2.5$ 로 설계한 경우를 비교하였다. 그림 5에서 루프 전달 함수 행렬 T(s)는 가중치  $\alpha=2.5$ 를 도입하여 설계한 경우 특이값 선도의 저주파에서 루프 전달 함수 행렬 T(s)의 최소 특이값이 커져 명령 추종 및 외란 제거의 성

능이 향상됨을 알 수 있다. 그리고 그림 6에서는 가중치를 도입한 설계 방법이 단위 계단 함수인 각 입력에 대한 시간 응답이 빨라짐을 확인할 수 있다. 예제 2는  $\rho=0.02$ 로 하여  $\rho$ 를 예제 1의  $\rho=0.0001$ 보다 큰 값으로 설계하였기 때문에  $\alpha$ 를 도입한 결과 고주파 부분의 루프 전달 함수 행렬의 특이값이 커지지만, 센서 잡음 장벽을 넘지 않으므로 주어진 조건의 안정도-강인성은 보장 받을 수 있는 설계가 된다.

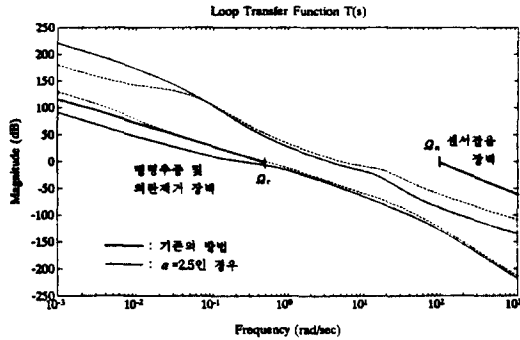


그림 5. 예제 2에 대한 루프 전달 함수 행렬 T(s)의 특이값 선도  
Fig. 5. Singular value plot of the Loop Transfer Function Matrix T(s) for example 2.

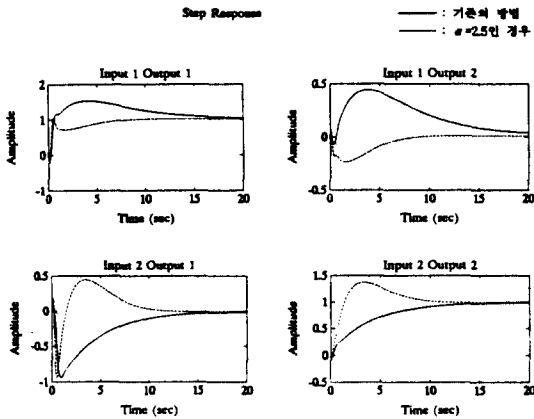


그림 6. 예제 2에 대한 단위 시간 응답  
Fig. 6. Unit Step Response for example 2.

V. 결론

비최소 위상 플랜트의 성능을 향상시키기 위해서 LQ-servo 설계시 성능 지수의 상태 가중 행렬 Q를 결정하는 설계 파라미터 N의 저주파 부분  $N_L$ 에 가중

치  $\alpha$ 를 도입하였다. 이 가중치  $\alpha$ 를 1보다 크게 하면 시스템의 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 결정하는 루프 전달 함수 행렬 T(s)의 저주파 부분 특이값이 크게 되고, 이는 루프 전달 함수 행렬 T(s)와 반비례 관계인 감도 함수 행렬의 특이값을 작게하므로 비최소 위상 플랜트에서 감도 함수 행렬의 특이값이 1보다 작은 주파수 영역을 넓게 하여 명령 추종 및 외란 제거의 성능이 향상됨을 이론적으로나 예제를 통하여 확인하였다. 또한 LQ-servo는 LQR의 구조에 기초한 설계 방법이므로 안정도-강인성을 보장받기 위해 루프 전달 함수의 특이값 형상에서 고주파 부분이 센서잡음 장벽을 넘지 않도록 설계 파라미터  $\rho$ 와 새로운 설계 파라미터  $\alpha$ 를 시행착오적인 방법으로 결정하였으나, 앞으로 Boyd<sup>[11]</sup> 등이 제시한 convex optimization 방법을 통해 설계 파라미터를 조직적인 방법으로 구할 수 있는 연구를 하고자 한다.

참고 문헌

- [1] G. Stein, and M. Athans, "LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback", *IEEE Trans. on AC*, Vol. AC-32 No. 2, Feb. 1987
- [2] Z. Zhang, and J. S. Freudenberg, "Loop Transfer Recovery for Nonminimum Phase Plants" *IEEE Trans. on AC*, Vol. AC-30 No. 2, Jun. 1985
- [3] B. S. Suh, "A Study on the LQG/LTR Method for Non-minimum Phase Plants" *Proc. of MTNS*, 1991
- [4] J. B. Moore, and L. Xia, "Loop Recovery and Robust State Estimate Feedback Designs", *IEEE Trans. on AC*, Vol. AC-32 No. 6, Jun. 1987
- [5] A. Saberi, B. M. Chen, and P. Sannuti, "Theory of LTR for non-minimum phase systems, recoverable target loops, and recovery in a subspace Part I and II", *Int. J. Control*, Vol 53, No. 5, 1991
- [6] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum, "Feedback Control Theory" Macmillan Publishing Company, 1992
- [7] M. Athans, *Lecture Notes on Multi-*

- variable Control Systems II*, MIT, 1992
- [8] J. S. Freudenberg, and D. P. Looze, "Right Half Plane Poles and Zeros and Design Trade-Offs in Feedback Systems" *IEEE Trans. on AC*, Vol. AC-30 No. 2, Jun. 1985
- [9] H. Kwakernaak, and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1972
- [10] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications* 3rd ed., Harcourt Brace Jovanovich Inc., 1988
- [11] S. Boyd, C. Barratt, and S. Norman, "Linear Controller Design : Limits of Performance via Convex Optimization", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 78, No. 3, Mar. 1990

---

 저 자 소 개
 

---

徐丙高(正會員) 第21卷 B編 第3號 參照

현재 한양대학교 전자통신공학과 교수



張台愚(正會員)

1965년 4월 22일생. 1983년 3월 ~ 1987년 2월 한양대학교 공과대학 전자통신공학과(학사). 1993년 3월 ~ 1995년 2월 한양대학교 대학원 전자통신공학과(석사). 1995년 3월 ~ 한양대학교 대학원 전자통신공학과 박사과정(재학). 1995년 2월 ~ 한국전력공사 전력연구원(일반연구원). 주요 관심분야는 최적제어, 제어기기설계