論文96-33B-2-4

# 샘플링시간에 대한 근사 샘플치 비선형 관측기

# (On Time-wise Approximate Nonlinear Observer for Sampled-data Nonlinear Systems)

鄭 善 太 *

(Sun-Tae Chung)

요 약

주어진 비선형 시스템의 내재적 구조적 특성을 이용하면, 샘플링시간에 대해 개선된 근사 샘플치 비선형 관측기 설계가 가능하다. 본 논문에서는 개선된 근사 샘플치 비선형 관측기 설계가 가능한 구조적 특성를 밝히고, 이 구조적 특성을 특징짓는 필요 충분조건을 구하였다. 특히, 시스템의 차원이 2인 경우, 샘플링시간에 대해 3차 이상의 근사 샘플치 비선형 관측기 설계가 가능한 시스템은 국소적으로 가관측 쌍선형 시스템과 등가인 시스템임을 보였다. 이는 실제적으로 고차 근사 샘플치 비선형 관측기를 구하는 것이 매우 제약적이다는 것을 암시한다

**Abstract**

By utilizing the intrinsic structure of the underlying continuous-time nonlinear systems, one can design an approximate sampled-data observer improved with respect to the sampling-time for the systems. In this paper, we characterize the conditions for the solvability of the improved approximate sampled-data nonlinear observer design problem. In particular, it is shown that when the dimension of the state space is two, the nonlinear systems for which it is possible to design 3rd or higher order approximate sampled-data nonlinear observer are locally state-equivalent to an observable bilinear system. The practical implication is that seeking higher order approximate sampled-data nonlinear observer for nonlinear systems is very restricted.

## I. 서 론

고도의 정밀성을 요구하는 현대의 제어시스템을 위해서 지난 15여 년간 개발되어 온 비선형 시스템 이론은 모든 상태변수가 직접 측정할 수 있는 것으로 가정하고 있다[1,2]. 그러나, 우리는 시스템에 주어진 물리적, 경제적 등의 여러가지 제약으로 인해, 이것이 항상 가능한 것이 아니라는 것을 잘 알고 있다. 이러한 경우 상태변수를 관측하는 (비선형) 관측기가 필요하게 된다[3,4,5,6].

주어진 비선형 시스템에 관측기를 설계하는 한가지 방법은 동작점 근방에서 비선형 시스템을 선형화하여 얻어진 선형 시스템에 선형 제어 이론을 이용하여 설계하는 것이다. 그러나, 주어진 비선형 시스템이 어떤 고유의 비선형 구조를 가지고 있어 이것을 이용하여 더 나은 성능의 비선형 관측기를 설계할 수 있으면 좋

* 正會員, 崇實大學校 電子工學科

(Department of Electronic Engineering, Soong Sil University)

※ 본 논문은 1995년 숭실대학교 교내학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

接受日字:1995年12月14日, 수정완료일:1996年1月12日

을 것이다[3,4,5,6]. 그런데, 이것이 가능하더라도 비선형 관측기의 구현은 복잡하므로, 컴퓨터에 의한 디지탈 구현을 고려하게 된다. 또한, 디지탈 컴퓨터의 상대적으로 저렴한 가격, 제어기 실현의 용이성, 유지의 편이성 등의 이유가 디지탈 제어의 사용을 더욱 더 소용되게 한다.

디지탈 비선형 관측기의 설계는 보통 두 가지의 방법을 생각할 수 있다.

첫 번째는 연속시간 비선형 시스템에 기반 하여 설계된 비선형 관측기를 빠른 샘플링을 통하여 디지탈로 구현하는 방법이다. 두 번째는 연속시간 비선형 시스템을 이산화하여 얻어진 샘플치 비선형 시스템에 대해 디지탈 관측기를 설계하는 것이다. 후자의 방법은 샘플링의 영향을 직접 다룰 수 있기 때문에 전자에 비해 바람직한 방법이다. 그런데, 우리가 원래의 연속시간 비선형 시스템을 이산화하여 얻어진 샘플치 비선형 시스템에 대해 디지탈 제어 기법을 고려할 때, 우리는 샘플링에 의해 야기될 수 있는 설계 기법 상의 문제점들을 고려하지 않으면 안된다. 따라서, 연속시간 시스템을 기반으로 하여 얻어진 관측기 설계 기법이 샘플치 시스템에도 적용될 수 있는가는 샘플치 비선형 관측기를 설계하는 데 중요한 문제가 될 것이다.

[7]에서는 비선형 관측기의 인기 있는 설계 기법인 '관측기 에러 선형화' (이하, O.E.L. 로 표기) 기법[3,4,6]이 샘플링에 대하여 보존되지 않음이 보여졌다. 즉, 원래의 연속시간 비선형 시스템에 '관측기 에러 선형화' 기법에 의해 비선형 관측기가 설계 가능했더라도 샘플치 시스템에는 '관측기 에러 선형화' 기법에 의한 비선형 관측기 제작이 보장되지 않는다는 것이다. 이러한 사실은 선형 시스템의 경우와는 달리, 비선형 시스템에서는 샘플치 시스템에 제어기 설계시 주의를 해야 한다는 것을 알려준다.

이 경우, 샘플치 시스템에 대한 비선형 관측기의 설계는 전자의 방법, 즉 원래의 연속 시간 시스템에 기반하여 설계된 연속 시간 비선형 관측기를 이산화하여 얻는 방법이 고려될 수 있다. 그런데, 이렇게 얻어진 샘플치 비선형 관측기는 단지 샘플링시간에 대해 1차 근사화에 불과하다는 것을 알 수있다. 그러므로, 직접 샘플치 비선형 시스템에 대해 샘플링 시간에 대해 1차 근사화 보다 개선된 '근사 샘플치 비선형 관측기' (이하, A.S.N.O. 로 표기) 설계가 가능할 것인가에 대한 연구의 필요성이 존재한다. 본 논문에서는, 개선된 A.S.N.O. 설계가 가능한 경우, 주어진 비선형 시스템은 어떠한 구조적 특성을 가져야 하는 지, 그리고 이러한 구조적 특성을 특징짓는 필요 충분조건은 무엇인지 등을 조사하고자 한다. 특히, 고차 A.S.N.O. 설계가 가능한 비선형 시스템의 크기는 어느 정도이며, 따라서, 어느 정도의 고차 A.S.N.O. 설계를 구하는 것이 실질적인가의 문제 등을 연구하고자 한다.

이제, 서론의 나머지에 있어서, 본 논문에서 자주 사용되는 수학적 개념과 기호에 대해 간략히 설명한다[1,8]. $h:R^n \to R$ 이 $C^\infty$ 함수일 때, $dh$ 는 $h$ 의 미분, 즉 $dh(x)=(\partial h(x)/\partial x_1,\cdots,\partial h(x)/\partial x_n)$ (등가적으로 $dh(x)=\sum_{i=1}^{n}(\partial h(x)/\partial x_i)dx_i$)을 나타낸다. $f:R^n \to R^n$ 이 $C^\infty$ 벡터장 일 때, $L_f h$ 는 함수 $h$ 의 $f$ 방향의 도함수를 의미한다. 즉, $L_f h(x)=\sum_{i=1}^{n}(\partial h(x)/\partial x_i)f_i(x)$ (여기서, $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))'$). 이때, $L_f h:R^n \to R$ 이므로, 고차의 방향도함수가 $L_f^{k+1}h=L_f(L_f^k h)$ 로 반복적으로 정의될 수 있다.

$g:R^n \to R^n$ 이 또 다른 $C^\infty$ 벡터장 일 때, $f$ 와 $g$ 의 리 브라켓(Lie bracket) $[f,g]$ 는 다음의 새로운 벡터장을 의미한다. $[f,g](x)=\frac{\partial g(x)}{\partial x}f(x)-\frac{\partial f(x)}{\partial x}g(x)$. 또, $[f,g]$ 는 고차의 리 브라켓을 편리하게 정의하기 위해, 연산자 표기형태 $ad_f g$ 로 나타내기도 한다. 즉 $ad_f g=[f,g]$. 이때, 고차의 리 브라켓은 다음과 같이 $ad_f^{k+1}g(x)=[f,ad_f^k g](x)$ 로 반복적으로 정의된다.

서론을 마치기 전에, 본 논문과 유사한 방향의 연구가 궤환 선형화의 근사 해에 대해 [9]에 보고되어 있음을 언급한다.

## II. 개선된 근사 샘플치 비선형 관측기 설계를 위한 필요조건

다음의 비선형 시스템 $\Sigma$ 를 고려하자.

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x} &= f(x)+g(x)u\\ y &= h(x)\end{cases}$$

(여기서, $x\in R^n$, $y\in R$, $u\in R$ 이며, $f$, $g$ 와 $h$ 는 $x$ 의 해석적(analytic) 함수들이다.)

비선형 시스템 $\Sigma$ 를 다음의 관측기형 시스템 $\Sigma'$ 으로

$$\Sigma':\begin{cases}\dot{z} &= Az+\beta(y,u)\\ y &= Cz\end{cases}\qquad (A,C)\ \text{가관측}$$

변환하는 (국소) 비선형 좌표변환 $z = \Phi(x)$가 존재한다면, 변환된 좌표계에서 비선형 관측기는 다음과 같이 설계할 수있다.

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(y,u) - G(y - C\hat{z}) \tag{1}$$

(*주의 : 좌표변환 $z = \Phi(x)$ 아래, 시스템 $\Sigma'$의 $\beta(y,u)$는 사실상 $\gamma(y)+\alpha(y)u$ 형태이다.*)

그런데, 원래의 연속시간 시스템 $\Sigma$ 에 기반하여 설계된 연속시간 비선형 관측기 (1)을 이산화하여 얻은 샘플치 비선형 관측기는 단지 샘플링시간에 대해 1차 근사화에 불과하다는 것을 쉽게 알 수있다. 그러면, 샘플링시간에 대해서 좀 더 개선된 A.S.N.O. 설계는 가능할까? 만약 가능하다면, 주어진 비선형 시스템 $\Sigma$ 는 어떠한 내재적 구조를 가져야 하며, 이러한 구조를 갖기 위해 주어진 비선형 시스템은 어떤 특성 조건을 만족해야 할까?

다음의 정리 2.2는 O.E.L.방법에 의하여 샘플링시간에 대해 1차 이상의 A.S.N.O.의 설계가 가능하기 위하여서는, 원래의 연속시간 시스템 $\Sigma$ 에 대해 O.E.L. 기법에 의한 완전한 (exact) 비선형 관측기 설계가 가능해야 하는 것이 필요하다는 것을 보여준다. 먼저, 추후의 논의를 위해 필요한 사항 및 정의를 기술한다.

주어진 비선형 시스템 $\Sigma$ 를 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템을 $\Sigma_d(T)$ 라 하자.

또, 샘플치 시스템에서, 샘플링시간에 대한 '선형 + 입·출력 투입(input · output injection)'의 $p$차근사적 형태 (앞으로는 이를 '$p$차 근사 관측기형' 이라 칭한다) 를 $\Sigma_o^p(T)$이라 하자. 즉,

$$\Sigma_o^p(T) : \begin{cases} z(k+1) = A_T z(k) + a_T(y(k),u(k)) + O(T^{p+1}, z(k), u(k)) \\ y(k) = C_T z(k) + O(T^{p+1}, z(k)) \end{cases} \tag{2}$$

( $A_T$와 $C_T$는 샘플링시간 $T$에 의존하는 행렬 및 행벡터로써. $(A_T, C_T)$는 가관측이며, $a_T(y,u)$는 y, $u$ 와 T에 대해 각각 해석적인 함수이다. 또, $O(T^{p+1}, z, u)$는 $\lim_{T \to 0} \frac{O(T^{p+1}, z, u)}{T^p} = 0$, $O(T^{p+1}, z=0, u=0) = 0$ 을 만족하고, $T$와 $z$, $u$ 에 대해 해석적인 함수들을 표시한다. 또한, $O(T^{p+1}, z)$ 에 대해서도 마찬가지로 정의된다.)

물론, (2)의 관심은, 정확한 비선형 관측기 설계에서와 마찬가지로, 다음과 같이 샘플링시간 $T$에 대해 $p$차 A.S.N.O. 를 설계할 수 있다는 데 있다.

$$\hat{z}(k+1) = A_T\hat{z}(k) + a_T(y(k),u(k)) - G_T(y(k) - C_T\hat{z}(k))$$

이때, 관측기 에러 $e := z - \hat{z}$ 는 다음을 만족한다.

$$e(k+1) = (A_T + G_T C_T)e(k) + O(T^{p+1}, z(k), u(k)).$$

그러므로, $G_T$가 적절하게 선택되고, 초기 상태, 초기 에러 와 입력 $u$가 충분히 작으면, $k \to \infty$에 따라, $\hat{z}(k) \simeq z(k)$ 을 기대할 수 있다(물론, 샘플링시간 $T$가 충분히 작다는 가정아래서). 따라서, $z$-좌표계가 원래의 $x$-좌표계와 $z = \Phi_T(x)$의 관계이면, $k \to \infty$ 일 때, 역시 $\hat{x}(k) := \Phi_T^{-1}(\hat{z}(k)) \simeq x(k)$을 기대할 수 있다.

***정의 2.1*** *: 시스템 $\Sigma$ 는 다음을 만족하는 양실수 $T^*$ 가 존재하면, 'p차 근사 샘플치 비선형 관측기 설계가능' 이라 한다.*

*모든 $T \in (0, T^*)$에 대해, $\Sigma$ 를 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템 $\Sigma_d(T)$ 가 어떤 국소 좌표 변환 $z = \Phi_T(x)$ ( $\Phi_T(x)$는 $T$에 대해 해석적) 에 의해 샘플치 시스템 $\Sigma_o^p(T)$ 로 변환가능하다.*

[7]로부터, 시스템 $\Sigma$ 가 어떤 국소 좌표변환 $z = \Phi(x)$에 의해 관측기형 시스템 $\Sigma'$ 으로 변환 가능할 때, 시스템 $\Sigma$ 는 '관측기 에러 선형화가능' 이라 하였음을 기억하자('관측기 에러 선형화가능'의 필요 충분 조건에 대해서는 [3]을 참조).

***정리 2.2*** *: 시스템 $\Sigma$ 가 'p차 근사 샘플치 비선형 관측기 설계가능' 이면, 시스템 $\Sigma$ 는 '관측기 에러 선형화가능' 이다.*

(증명) $\Sigma_d(T)$를 $\Sigma_o^p(T)$ 로 변환하는 좌표변환을 $z = \Phi_T(x)$라 하자. 이를 테일러급수 전개하여 다음과 같이 표기하기로 하자.

$$z = \phi^0(x) + T\phi^1(x) + O(T^2)$$

또 역변환을 $x = \Psi_T(z)$라 표현하고, 이를 테일러급수 전개하여 다음과 같이 표시하자.

$$x = \psi^0(z) + T\psi^1(z) + O(T^2)$$

이때 $z = \Phi_T \circ \Psi_T(z)$ ( $\Phi_T \circ \Psi_T(z)$는 $\Phi_T(\Psi_T(z))$을 의미한다)를 테일러급수 전개하면,

$$z = \Phi_T \circ \Psi_T(z) = \phi^0(\psi^0(z)) + T\{\frac{\partial \phi^0}{\partial x}(\psi^0(z))\psi^1(z) + \phi^1(\psi^0(z))\} + O(T^2) \tag{3}$$

그런데 $z = \Phi_T \circ \Psi_T(z) = z$ 이므로, 이를 (3)과 비교하면, 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\phi^0(\psi^0(z))=z, \quad \frac{\partial\phi^0}{\partial x}(\psi^0(z))\psi^1(z)+\phi^1(\psi^0(z))=0 \tag{4}$$

또, $x = \Psi_T \circ \Phi_T(x) = x$ 에 대해, 테일러급수 전개를 하고, 마찬가지의 논의를 통해 $\psi^0(\phi^0(x))=x$ 가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 이 사실과 (4)의 첫 번째 관계식으로부터

$$\psi^0(z)=(\phi^0)^{-1}(z) \tag{5}$$

이제, $\Sigma$ 의 샘플치 모델 표현 $\Sigma_d(T)$ 을 테일러급수 전개하면,

$$\Sigma_d(T):\begin{cases} x(k+1) &= x(k) + T\{f(x(k))+g(x(k))u(k)\} + O(T^2) \\ y(k) &= h(x(k)) \end{cases}$$

좌표변환 $z = \Phi_T(x)$에 의해 $\Sigma_d(T)$ 는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} z(k+1) = {} & \phi^0(\psi^0(z)) + T[\frac{\partial\phi^0}{\partial x}(\psi^0(z))\psi^1(z)+\frac{\partial\phi^0}{\partial x}(\psi^0(z))f(\psi^0(z)) \\ & +\frac{\partial\phi^0}{\partial x}(\psi^0(z))g(\psi^0(z))u+\phi^1(\psi^0(z))] + O(T^2) \end{aligned} \tag{6}$$

$$y = h(\psi^0(z))+T\frac{\partial h}{\partial x}\psi^1(z)+O(T^2) \tag{7}$$

(표기의 편의를 위해, $z(k)$, $u(k)$ 등을 각각 $z$, $u$ 등으로 표시하였다. 이후, 필요시에 이와 같은 간략화된 표기방법을 사용할 것이다.)

관계식 (4) 와 (5) 를 이용하면, (6)은 다음과 같이 정리된다.

$$z(k+1) = z + T(\ \phi^0_* f\,|_{(\phi^0)^{-1}(z)} + u\phi^0_* g\,|_{(\phi^0)^{-1}(z)}) + O(T^2) \tag{8}$$

(여기서, $\phi^0_* f\,|_{(\phi^0)^{-1}(z)}$ 와 $\phi^0_* g\,|_{(\phi^0)^{-1}(z)}$ 는 $\frac{\partial\phi^0}{\partial x}(\psi^0(z)) f(\psi^0(z))$ 와 $\frac{\partial\phi^0}{\partial x}(\psi^0(z))g(\psi^0(z))$를 의미한다.)

(8)은 $z(k+1)=A_T z + a_T(y,u) + O(T^2)$ 로 표현되어야 하므로, 어떤 행렬 $A$와 함수 $\alpha(y)$, $\gamma(y)$에 대해 다음이 성립한다.

$$(\phi^0)_* f\,|_{(\phi^0)^{-1}(z)} = Az + \alpha(y), \quad (\phi^0)_* g\,|_{(\phi^0)^{-1}(z)} = \gamma(y) \tag{9}$$

또, (7) 은 $y=C_T z+O(T^2)$ 로 표현되어야 하므로, 어떤 행렬 $C$에 대해 다음이 성립한다.

$$h(\psi^0(z))=h((\phi^0)^{-1}(z)) = Cz \tag{10}$$

(4)의 첫 번째식으로 부터, $\phi^0(\psi^0(z)) = z$가 성립하므로, $\frac{\partial\phi^0}{\partial x}(x)\frac{\partial\psi^0}{\partial z} = I$ (항등 행렬). 그러므로 $det\frac{\partial\phi^0}{\partial x}(x)\neq 0$. 즉, $z = \phi^0(x)$는 (비선형) 국소 좌표변환이다.

또 $(A_T, C_T)$는 가관측이고, 가관측성은 좌표변환에 대해 보존되므로, 샘플치 시스템 $\Sigma_d(T)$ 가 가관측이며, 또한 가관측성은 샘플링에 대해 보존되므로[7], 시스템 $\Sigma$ 는 가관측이다. 또, 좌표변환에서 가관측성은 보존되므로 $(A, C)$는 가관측이다. 그러므로, 이 사실과 관계식 (9)와 (10)으로 부터, 이 시스템 $\Sigma$ 는 국소 좌표변환 $z = \phi^0(x)$에 의해 관측기형 시스템 $\Sigma'$으로 변환되므로, $\Sigma$ 는 관측기 선형 에러 선형화가능임을 알 수있다.

## Ⅲ. 개선된 근사 샘플치 비선형 관측기 설계 가능 시스템의 특성

제2절에서는, 개선된 A.S.N.O. 설계가 가능하기 위하여서는 원래의 연속시간 비선형 시스템이 '관측기 에러 선형화' 기법에 의하여 정확한 비선형 관측기 설계가 가능해야 함이 보여졌다. 이 절에서는 샘플링시간에 대해 개선된 A.S.N.O. 설계가 가능하게 하기 위하여, 원래의 연속시간 비선형 시스템이 더 가져야 할 구조적 특성을 조사하고, 이 구조적 특성을 결정짓는 필요충분조건을 구하게 된다. 또한, 고차의 A.S.N.O. 설계가 가능한 비선형 시스템의 크기는 어느 정도이며, 따라서, 어느 정도의 고차 A.S.N.O. 설계를 구하는 것이 실제적인 가의 문제 등을 살피게 될 것이다.

이 절에서는 비선형 시스템 $\Sigma$가 이미, 다음의 표준 관측기형 $\Sigma_s'$으로 주어짐을 가정할 것이다.

$$\Sigma_s' : \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 &=& x_2+r_1(x_1)+g_1(x_1)u \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{n-1} &=& x_n+r_{n-1}(x_1)+g_{n-1}(x_1)u \\ \dot{x}_n &=& r_n(x_1)+g_n(x_1)u \\ y &=& x_1 \end{array} \right.$$

이는 이미 제 2절 정리 2.2 에서, 주어진 비선형 시스템 $\Sigma$ 에 샘플링시간에 대해 개선된 A.S.N.O. 설계가 가능하기 위해서 시스템 $\Sigma$ 가 O.E.L.에 의해 정확한 비선형 관측기 설계가 가능해야 함이 보여졌기 때문에, 이미 시스템 $\Sigma$ 가 관측기형으로 주어졌다고 가정해도 문제가 없으며, 또한 관측기형은 항상 표준 관측기형 $\Sigma_s'$ 으로 변환 가능하기 때문이다.

이제, 다음의 논의를 통해 시스템 $\Sigma$ 에 O.E.L.에 의해 2차 이상 A.S.N.O.가 설계 가능하기 위하여, 시

스템 $\Sigma$ 가 표준 관측기형 $\Sigma_s'$ 으로 표현되었을 때, $r_1(x_1)$과 $g_k(x_1)\,(k=1,2,\cdots,n)$이 $x_1$에 대해 선형, 즉 어떤 실수 $a$와 $b_k, c_k$에 대해 $r_1(x_1)=ax_1$, $g_k(x_1)=(b_k+c_kx_1)$ 으로 표시되어야 한다는 것을 보이고자 한다.

시스템 $\Sigma_s'$을 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템을 $\Sigma_d'(T)$ 라 하자. 샘플치 시스템 $\Sigma_d'(T)$는 1차 근사 관측기형임을 쉽게 알 수 있다. 이제, 샘플치 시스템 $\Sigma_d'(T)$ 을 2차 근사 관측기형으로 변환하는 (국소) 좌표변환을 $z=\Phi_T(x)$ 라 하고, 이를 테일러급수 전개하여 다음과 같이 표시하자.

$z=\phi^0(x)+T\,\phi^1(x)+O(T^2)$. 변환된 $z$-좌표계에서 샘플치 시스템은 2차 근사 관측기형이므로, 좌표변환 $z=\Phi_T(x)$ 는 샘플치 시스템 $\Sigma_d'(T)$ 의 1차 근사 관측기형은 보존해야 한다. 따라서, $z=\phi^0(x)$는 관측기형을 보존하여야 한다. 그런데, 관측기형을 여전히 보전하는 좌표변환은 선형 변환밖에 없으므로, 어떤 행렬 B ( $det\,B\neq 0$)에 대해 $\phi^0(x)=Bx$의 형태이어야 한다. 이 경우, $B^{-1}\Phi_T(x)$ 역시 샘플치 시스템 $\Sigma_d'(T)$ 을 2차 근사 관측기 형태로 변환해 주는 좌표변환이므로, 샘플치 시스템 $\Sigma_d'(T)$ 을 2차 근사 관측기형으로 변환하는 좌표변환 $z=\Phi_T(x)$ 에는 $z=x+T\varphi(x)+O(T^2)$ 형태를 갖는 좌표변환이 반드시 존재한다. 이제, $z=\Phi_T(x)$ 가 $z=x+T\varphi(x)+O(T^2)$ 의 형태를 갖는다고 하자. 그리고, $\varphi(x)$의 i번째 성분을 $\varphi_i(x)$로 표기하기로 한다. 좌표변환 $z=x+T\varphi(x)+O(T^2)$ 를 취한 후, 샘플치 시스템 $\Sigma_d'(T)$ 은 $z$-좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
z_1(k+1) &= z_1(k) + T\{z_2+r_1(z_1)+g_1(z_1)u\}+\frac{T^2}{2!}[\ \{z_3+r_2(z_1) \\
&+ \frac{\partial r_1}{\partial z_1}(z_2+r_1)+2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}(z_2+r_1)+\cdots+2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_n}r_n-2(\varphi_2(z) \\
&+ \frac{\partial r_1}{\partial z_1}\varphi_1))\}+\{g_2(z_1)+\frac{\partial r_1}{\partial z_1}g_1+\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(z_2+r_1)+2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}g_1 \\
&+ \cdots+2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_n}g_n-2\frac{\partial g_1}{\partial z_1}\varphi_1\}u+\frac{\partial g_1}{\partial z_1}g_1u^2]+O(T^3)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2(k+1) &= z_2(k) + T\{z_3+r_2(z_1)+g_2(z_1)u\}+\frac{T^2}{2}[\ \{z_4+r_3(z_1) \\
&+ \frac{\partial r_2}{\partial z_1}(z_2+r_1)+2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1}(z_2+r_1)+\cdots+2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_n}r_n-2(\varphi_3(z) \\
&+ \frac{\partial r_2}{\partial z_1}\varphi_1))\}+\{g_3(z_1)+\frac{\partial g_2}{\partial z_1}(z_2+r_1)+\frac{\partial r_2}{\partial z_1}g_1+2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1}g_1 \\
&+ \cdots+2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_n}g_n-2\frac{\partial g_2}{\partial z_1}\varphi_1\}u+\frac{\partial g_2}{\partial z_1}g_1u^2]+O(T^3) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
z_n(k+1) &= z_n(k) + T\{r_n(z_1)+g_n(z_1)u\}+\frac{T^2}{2}[\ \{\frac{\partial r_n}{\partial z_1}(z_2+r_1) \\
&+ 2\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_1}(z_2+r_1)+\cdots+2\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_n}r_n-2\frac{\partial r_n}{\partial z_1}\varphi_1\}+\frac{\partial g_n}{\partial z_1}(z_2+r_1) \\
&+ \frac{\partial r_n}{\partial z_1}g_1+2\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_1}g_1+\cdots+2\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_n}g_n-2\frac{\partial g_n}{\partial z_1}\varphi_1\}u+\frac{\partial g_n}{\partial z_1}g_1u^2] \\
&+ O(T^3)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
y = z_1-T\varphi_1(z)+T^2\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}\varphi_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_n}\varphi_n\}+O(T^3) \tag{14}
$$

식 (11)-(14)가 2차 근사 관측기형 $\Sigma_o^p(T)$ $(p=2)$의 형태가 되어야 하므로, (14)에서, $\varphi_1(z)=0$ 이어야 함을 알 수 있다. 이제, $\varphi_1(z)=0$ 을 식 (11)-(13)에 대입한 후, 먼저, 식 (11)에서, $T^2/2$의 계수 가운데, $u$에 대한 1차항들을 보자. 식 (11)-(14)이 2차 근사 관측기형 $\Sigma_o^p(T)$ $(p=2)$ 의 형태가 되어야 하므로, 이 항들이 $z_1$ 만의 함수가 되어야 한다. 따라서, $\frac{\partial g_1}{\partial z_1}$이 상수이어야 함을 알 수 있다. 마찬가지로, 식 (12)-(13)에서, $T^2/2$의 계수 가운데, $u$에 대한 1차항에 대한, 같은 논의를 통해, 결국 $\frac{\partial g_k}{\partial z_1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$이 상수이어야 함을 알 수 있다. 이제, $\frac{\partial r_1}{\partial z_1}$이 상수이어야 함을 보인다. (11)-(13)에서, $T^2/2$의 계수 가운데, $u$에 대한 상수항들을 살펴보자. 만약, $\frac{\partial r_1}{\partial z_1}$이 상수가 아니고, $z_1$의 함수라면 (11)에서, 이 항들이 '선형 + $z_1$만의 함수' 형태가 되어야 하므로, $\varphi_2(z)$는 $\varphi_2(z)=f_2(z_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial z_1}z_2+d_{22}z_2+\cdots+d_{n2}z_n$ $(d_{22},\cdots,d_{n2}$ ; 실수) 의 형태이어야만 한다. 식 (12)에 대해서도 $T^2/2$의 계수 가운데, $u$에 대한 상수항들에 같은 제약조건을 통한 논의에서, $\varphi_3(z)$가

$$
\varphi_3(z)=f_3(z_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial z_1^2}z_2^2+g_3(z_1)z_2+\frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial z_1}z_3+d_{23}z_2
$$

$+\cdots+d_{n3}z_n$ $(d_{23},\cdots,d_{n3}$ ; 실수) 형태이어야 함을 알 수 있다. 식(11)-(13)에서, $T^2/2$의 계수 가운데, $u$에 대한 상수항들을 대한 마찬가지의 추론에 의하면, $\varphi_4$는 $\frac{\partial^2 r_1}{\partial z_1^2}z_2z_3$의 항을 포함한다. 계속적인 추론으로부터, $\varphi_n$는 $\frac{\partial^2 r_1}{\partial z_1^2}z_2z_{n-1}$의 항을 포함한다. 따라서, 식(13)에서 $T^2/2$의 계수 가운데, $u$에 대한 상수항들을 중에는 $\frac{\partial^2 r_1}{\partial z_1^2}z_2z_n$의 항을 포함하게 된다. 그런데, 이와 같은 항은 $T^2/2$의 계수 가운데, $u$에 대한 상수항들 중 다른 항들로부터 소거될 수없어서, 식 (13)에서 $T^2/2$의 계

수가 '선형 + 입·출력만의 항'의 형태로 묶여질 수가 없다. 그러므로 식 (11)-(14)이 2차 근사 관측기형 $\Sigma_o^p(T)$ ($p=2$) 의 형태가 되려면, 반드시 $\frac{\partial r_1}{\partial z_1}$이 상수가 되어야 한다. 즉 어떤 실수 $a$에 대해 $r_1 = az_1$이 성립해야만 한다.

다음의 보조 정리는 위 논의 결과의 역도 역시 성립함을 보인다. 즉 샘플링시간에 대해 O.E.L.에 의한 2차 이상의 A.S.N.O. 설계가 가능하기 위해서는, 반드시 원래의 연속시간 시스템 $\Sigma$ 가 다음의 시스템 $\Sigma''$ 으로 변환되는 비선형 좌표변환이 존재해야 한다는 것이다.

$$\Sigma'' : \left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_1 & = x_2 + ax_1 + (b_1 + c_1 x_1)u \\ \dot{x}_2 & = x_3 + r_2(x_1) + (b_2 + c_2 x_1)u \\ \vdots & \\ \dot{x}_n & = r_n(x_1) + (b_n + c_n x_1)u \\ y & = x_1 \end{array} \right.$$

***<u>보조정리 3.1</u>*** *: 비선형 시스템 $\Sigma$ 에 샘플링시간에 대해 2차 이상의 A.S.N.O. 설계가 가능하기 위한 필요 충분조건은 시스템 $\Sigma$ 가 $\Sigma''$ 의 형태로 국소 좌표변환 가능해야 한다는 것이다.*

(증명) 필요조건은 이미 앞에서 보였으므로 충분조건만 증명하면 된다.

시스템 $\Sigma''$ 의 샘플치 모델 표현 $\Sigma_d''(T)$ 에 대해, 다음과 같은 좌표변환을 취한 다음,

$$z_1 = x_1,\ z_2 = x_2 - \frac{T}{2} r_2(x_1),\ \cdots,\ z_n = x_n - \frac{T}{2} r_n(x_1)$$

변환된 $z$-좌표계에서의 식 (11)-(14)를 관찰하면, 샘플치 시스템은 2차 근사 관측기형으로 표현됨을 어렵지 않게 알아 볼 수있다. 따라서, 2차 A.S.N.O. 설계가 가능하게 된다.

이제 1차 근사화 이상의 2차 근사화가 가능하게 하기 위해서 가져야 할 시스템의 구조에 대해서 알아보았다. 다음은, 그러면 언제 주어진 시스템의 $\Sigma$ 가 $\Sigma''$ 의 형태로 변환 가능할 것인가를 밝혀 내는 것이 될 것이다. 다음 정리는 이를 특징짓는 필요 충분조건의 기술이다.

***<u>정리 3.2</u>*** *: 시스템 $\Sigma$ 가 샘플링시간에 대해 2차 A.S.N.O.를 설계 가능하기 위한 필요 충분조건은 다음과 같다.*

*i)* $rank\{dh, dL_f h, \cdots, dL_f^{n-1}h\} = n$ (평형점(동작점) 근방에서)

$$L_g L_f^k h = \left\{ \begin{array}{l} 0 : 0 \le k \le n-2 \\ 1 : k = n-1 \end{array} \right. \tag{15}$$

을 만족하는 $g_0$에 대해

*ii)* $[\ ad_f^i g_o,\ ad_f^j g_o] = 0\ (\ 0 \le i,\ j \le n-1\ )$

*iii)* $dLg_0 L_f^n h = 0$

*iv)* $[\ ad_f^i g_0\ ,\ g] = 0\ \ (\ 0 \le i \le n-2\ )$

*v)* $[\ ad_f^{n-1} g_0\ ,\ [\ ad_f^{n-1} g_0\ ,\ g]\ ] = 0$

(증명) 필요조건은 어렵지 않게 증명되므로, 충분조건만 증명한다.

조건 *i*)과 *ii*) 는 $\frac{\partial}{\partial z_1} = ad_f^{n-1} g_0, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n} = g_0$ , 벡터장 $f$ 는

$$f(z) = \begin{pmatrix} z_2 + r_1(z_1) \\ z_3 + r_2(z_1) \\ \vdots \\ z_n + r_{n-1}(z_1) \\ r_n(z_1) \end{pmatrix} \tag{16}$$

로, $y$ 는 $y = z_1$ 으로 표시되는 $z$-좌표계가 존재함을 보장한다[3].

조건 *iii*) 은 $g_0$가 (15)를 만족하므로 $L_{ad_f^n g_0} h$가 상수라는 조건과 동치이다. 조건 i)과 ii)에 의해 $\{g_0, ad_f g_0, \cdots, ad_f^{n-1} g_0\}$은 좌표 벡터장을 구성하므로, $ad_f^n g_0$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$ad_f^n g_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) ad_f^i g_0 \quad (a_i(x)\ (i = 1, 2, \cdots, n) : \text{어떤 미분 가능 함수}) \tag{17}$$

또한, (15)는

$$L_{ad_f^n g} h = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ;\ 0 \le k \le n-2 \\ (-1)^{n-1} & ;\ k = n-1 \end{array} \right. \tag{18}$$

과 동치이고, (17), (18) 과 조건 *iii*) 으로부터, $L_{ad_f^n g} h = a_{n-1}(x)(-1)^{n-1} =$ 상수. 즉, $a_{n-1}(x) = a$ ( $a$ : 상수). 이제,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_1} &= [\ f,\ ad_f^{n-1} g] = ad_f^n g = a_{n-1}(x) ad_f^{n-1} g \\ &+ a_{n-2}(x) ad_f^{n-2} g + \cdots + a_0(x) g = a \frac{\partial}{\partial z_1} \\ &+ a_{n-2}(x) \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + a_0(x) \frac{\partial}{\partial z_n} \end{aligned}$$

따라서, $\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = a$. 이는 (16) 에서 $r_1(z_1)$이 $r_1(z_1) = az_1$ 임을 의미한다.

조건 *iv*) 로 부터, $[\ ad_f^i g_0,\ g] = \frac{\partial g}{\partial z_{n-i}} = 0\ (\ 0 \le i \le n-2\ )$. 따라서, $g$는 $z_1$만의 함수를 의미한다. 조건 *v*)는 $[\ ad_f^{n-1} g_0\ ,\ [\ ad_f^{n-1} g_0\ ,\ g]\ ] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 g_k}{\partial z_1^2} \frac{\partial}{\partial z_k} = 0$을 의미하

므로, $g$는 $z_1$에 대해 1차 이다. 이상의 논의에서 충분조건은 증명되었다.

샘플링시간에 대해 고차(3차 이상)의 A.S.N.O. 설계가 가능하기 위해서는, (16)에서 '$r_i(z_1)$ $(i=2,3,\cdots)$가 $z_1$에 대해 선형' 이라는 추가적인 제약조건이 더 필요한 것으로 보인다. 그러나, 시스템의 상태공간의 차원 $n$이 증가할수록 계산이 복잡하여 이를 보이기가 쉽지 않다. $n=2$인 경우, 샘플링시간에 대해 3차 이상의 A.S.N.O. 설계가 가능하기 위해서는 비선형 시스템이 국소적으로 다음의 가관측 쌍선형(bilinear) 시스템 $\Sigma'''$과 동일해야 한다는 것은 보일 수 있다. 아래 정리 3.3 은 이를 보인 것이다.

$$\Sigma''' : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1x_1 + (b_1 + c_1x_1)u \\ \dot{x}_2 = a_2x_1 + (b_2 + c_2x_1)u \\ y = x_1 \end{cases}$$

***정리 3.3*** *: 시스템의 차원이 2인 경우, 시스템 $\Sigma$에, 샘플링시간에 대해 3차 이상의 A.S.N.O.설계가 가능하기 위한 필요 충분조건은 시스템 $\Sigma$ 가 국소적으로 가관측 쌍선형 시스템 $\Sigma'''$ 으로 좌표변환 가능해야 한다 는 것이다.*

(증명) 충분조건은 보이기 어렵지 않으므로 생략하고 필요조건만 보인다.

먼저, 임의의 $u$에 대해 3차 이상의 A.S.N.O. 설계가 가능하면, $u=0$에 대해서도 3차 이상의 A.S.N.O. 설계가 가능해야 하므로, $u=0$인 경우에 시스템 $\Sigma''$에서 $r_2(x_1)$이 $x_1$에 대해 선형이 아니면, 3차 이상의 A.S.N.O. 설계가 불가능함을 보이면 되므로, $u=0$의 시스템에 대해서 논의를 전개함을 주목한다. 또한, 3차 이상의 A.S.N.O. 설계가 가능하다면 위 보조정리 3.1에 의해 시스템 $\Sigma\,(u=0)$이 다음의 $\Sigma_0''$ 의 형태로 주어짐을 가정해도 무방함을 주목하자.

$$\Sigma_0'' : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + ax_1 \\ \dot{x}_2 = r(x_1) \\ y = x_1 \end{cases}$$

이제 $\Sigma_0''$ 를 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템을 $\Sigma_0''(T)$ 라 하자. 또, $\Sigma_0''(T)$ 를 3차 이상의 근사 관측기형 $\Sigma_o^p(T)$ $(p\geq 3\,;\ u=0)$ 으로 변환시키는 국소 좌표변환을 $z = \Phi_T(x)$ 라 하자. 그러면, 이 좌표변환은 항상 다음의 두단계의 연속적 좌표변환으로 설명할 수 있다. 즉, 샘플링시간 $T$ 에 대해 2차 근사화가 가능하게 하는 좌표변환 $w = \phi_T^1(x)$와 이 변환된 시스템을 다시 3차 이상의 근사화가 가능하게 하는 좌표변환 $z = \phi_T^2(w)$. 그래서 $\Phi_T(x) = \phi_T^2(\phi_T^1(x))$ 로 구성된다. 우리는 이미 보조정리 3.1 의 증명을 통해 $w = \phi_T^1(x)$의 한 형태가 다음과 같이 주어짐을 알고 있다.

$$\begin{cases} w_1 = x_1 \\ w_2 = x_2 - \dfrac{T}{2}\, r(x_1) \end{cases}$$

이를 이용하여 $\Sigma_0''(T)$를 변환하면, $w$-좌표계에서, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} w_1(k+1) &= w_1 + T\{w_2 + aw_1\} + \frac{T^2}{2}\{2r + aw_2 + a^2w_1\} \\ &\quad + \frac{T^3}{3!}\{\frac{5}{2}ar + \frac{\partial r}{\partial w_1}w_2 + \frac{\partial r}{\partial w_1}aw_1 + a^2w_2 + a^3w_1\} + O(T^4) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} w_2(k+1) &= w_2 + Tr(w_1) + \frac{T^3}{3!}\{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial w_1^2}w_2^2 - \frac{\partial^2 r}{\partial w_1^2}aw_1w_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial w_1^2}a^2w_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial w_1}r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial w_1}aw_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial w_1}a^2w_1\} + O(T^4) \end{aligned} \tag{20}$$

$$y(k) = w_1(k) \tag{21}$$

이제 $z = \phi_T^2(w)$를 보조정리 3.1의 필요조건 증명에서 설명한 바와 같이, $z = w + T\psi(w) + T^2\varphi(w) + O(T^3)$의 형태로 가정할 수 있다. 즉,

$$z_1 = w_1 + T\psi_1(w_1, w_2) + T^2\varphi_1(w) + O(T^3),\ z_2 = w_2 + T\psi_2(w_1, w_2) + T^2\varphi_2(w) + O(T^3)$$

이 좌표변환 아래서, (21) 는 다음과 같이 표현된다.

$$y(k) = z_1 - T\psi_1 + T^2\Big[\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\psi_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial z_2}\psi_2 - \varphi_1(z)\Big] + \cdots \tag{22}$$

(22)와 $\Sigma_o^p(T)$ $(p\geq 3\,;\ u=0)$의 $y = C_T z + O(T^4, z)$ 와 비교하면, $\psi_1$, $\varphi_1$ 는 각각 $\psi_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ 을 만족해야 한다. 이 사실을 이용하면, 변환된 $z$-좌표계에서 (19)와 (20) 은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= z_1 + T\{z_2 + az_1\} + \frac{T^2}{2}\{2r + az_2 + a^2z_1 - 2\psi_2(z)\} \\ &\quad + \frac{T^3}{3!}\{\frac{5}{2}ar + \frac{\partial r}{\partial z_1}z_2 + \frac{\partial r}{\partial z_1}az_1 + a^2z_2 + a^3z_1 \\ &\quad + 6\frac{\partial\psi_2}{\partial z_2}\psi_2 - 6\varphi_2(z) - 3a\psi_2(z)\} + O(T^4) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} z_2(k+1) &= z_2(k) + Tr(z_1) + T^2\{\frac{\partial\psi_2}{\partial z_1}(z_2 + az_1) + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_2}r\} \\ &\quad + \frac{T^3}{3!}\{\cdots\} + O(T^4) \end{aligned} \tag{24}$$

(23)-(24) 와 $\Sigma_o^p(T)$ $(p\geq 3\,;\ u=0)$ 를 비교하면, 식

(23)에서 $T^2/2$의 계수가 '선형 + $z_1$만의 함수' 형태로 표시되어야 하므로, $\phi_2$는, 어떤 함수 $f(z_1)$과 실수 $k$에 대해 다음과 같이 표현되어야 한다.

$$\phi_2(z_1, z_2) = f(z_1) + kz_2 \tag{25}$$

마찬가지로, 식 (25) 가 (23)에 대입된 후, 식 (23)에서 $T^3/3!$의 계수 가운데, $T^3/3!$의 계수가 '선형 + $z_1$만의 함수'형태로 표시되어야 하므로, $\frac{\partial r}{\partial z_1} z_2$ 항은 $\frac{\partial r}{\partial z_1}$가 상수가 아니면, 다른항으로부터 소거되어야 하는데, $\frac{\partial r}{\partial z_1} z_2$ 항을 소거시킬 수 있는 다른 항은 없기 때문에, $\frac{\partial r}{\partial z_1} z_2$ 항은 $z_1$만의 함수가 되어야 한다. 따라서, $\frac{\partial r}{\partial z_1}$가 상수이어야 한다.

다음 정리는 언제 주어진 시스템 $\Sigma$ 가 $\Sigma'''$ 의 형태로 변환 가능할 것인가의 기술이다.

***정리 3.4*** : *시스템의 차원이 2인 경우, 시스템 $\Sigma$가 샘플링시간에 대해 3차 이상 A.S.N.O.를 설계 가능하기 위한 필요 충분조건은 다음과 같다.*

*i)* $rank\{dh, dL_f h, \cdots, dL_f^{n-1}h\} = n$ (평형점 근방에서)

$$L_{g_i} L_f^k h = \begin{cases} 0 : 0 \le k \le n-2 \\ 1 : k = n-1 \end{cases}$$

을 만족하는 $g_0$에 대해

*ii)* $[\, ad_f^i g_0,\ ad_f^j g_0] = 0 \ (\ 0 \le i,\ j \le n\ )$

*iii)* $Lg_0 L_f^n h$ = 상수

*iv)* $[\, ad_f^i g_0\,,\ g] = 0 \quad (\ 0 \le i \le n-2\ )$

*v)* $[\, ad_f^{n-1} g_0\,, [\, ad_f^{n-1} g_0\,,\ g]\,] = 0$

(증명) [3]에는 조건 *i)* 과 *ii)* 가 벡터장 $f$ 을 가관측 선형 시스템으로 변환하는 국소 비선형 좌표변환이 존재할 필요 충분조건임이 보여졌다. 따라서, 이 사실과 정리 3.2의 증명으로부터 정리 3.4의 충분조건은 쉽게 증명된다. 정리 3.4의 필요조건은 정리 3.2와 마찬가지로 어렵지 않게 보일 수 있으므로 생략한다.

이 절의 결과로, 시스템의 상태공간 차원 $n$이 2인 경우, 샘플링시간에 대한 A.S.N.O. 설계 문제는 완전히 규명되었다. 정리 3.3 은 샘플링시간에 대해 고차의 A.S.N.O.를 얻으려면, 조건이 매우 제한적이다 는 것을 말해 준다. 즉, $n$ = 2인 경우는 원래의 연속시간 시스템 $\Sigma$는 국소적으로 쌍선형 시스템과 동일해야 한다. 또 $n$이 커지면 정리 3.3 과 유사한 정리를 증명하기에는 너무 계산이 복잡하여 힘들지만, $n$이 커질수록 만족해야 할 조건이 많아지므로 역시, 매우 제한적임을 알 수 있다.

## Ⅳ. 결 론

연속시간 비선형 시스템에 기반하여 설계된 비선형 관측기를 빠른 샘플링을 통하여 디지탈로 구현한 샘플치 비선형 관측기는 샘플링시간에 대해 단지 1차 근사화에 불과하다. 따라서, 직접 샘플치 시스템에 대해, 디지털 관측기를 설계할 때, 샘플링시간에 대해 좀 더 개선된 근사 샘플치 비선형 관측기 제작이 가능한가의 여부는 중요하다.

본 논문의 연구는 주어진 비선형 시스템이 '선형 + 입·출력 투입' 의 관측기형 구조에 더하여 또 다른 어떤 특성을 만족하는 구조를 가지고 있으면, 개선된 근사 샘플치 비선형 관측기 제작이 가능함을 보여 주었다. 개선된 근사적 샘플치 비선형 관측기 제작을 가능하게 하는 비선형 시스템의 구조는 먼저 관측기형이어야 하며, 관측기형이 표준 관측기형으로 표현되었을 때, 입력에 의존하는 항들은 모두 출력에 대해 1차로 표현되어야 하며, 입력에 무관한 출력 투입항의 경우, 첫 번째 성분부터 출력에 대해 선형이어야 한다. 즉, 첫 번째 성분이 선형인 경우, 1차 근사화 보다 개선된 2차 근사화 샘플치 비선형 관측기 설계가 가능한 것으로 증명됐으며, 두 번째, 세 번째순으로 선형인 구조를 가지게 되면, 더 높은 차수의 근사화가 가능할 것으로 추측된다. 이는 차수가 올라 갈수록 계산이 복잡해져 가기 때문에 증명하기가 어렵다. 그러나 상태 공간의 차원이 2인 경우 주어진 시스템에 샘플링시간에 대해 3차 이상의 근사화 샘플치 비선형 관측기 설계가 가능하려면, 시스템이 근본적으로 가관측 쌍선형 시스템과 국소적으로 동일해야만 한다는 것이 보여졌다. 이는 실제적으로 샘플링 시간에 대해 3차 이상의 고차 근사 샘플치 비선형 관측기를 설계할 수 있는 비선형 시스템은 매우 제한적이라는 것을 의미한다. 따라서, 3차 이상의 고차근사 샘플치 비선형 관측기를 구하려는 것은 비현실적이라고 볼 수 있다.

## 참 고 문 헌

[1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[2] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft,

*Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] A.J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers", *Syst. & Contr. Lett.*, vol. 3, pp. 47-52, 1983.

[4] A.J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observer with linearizable error dynamics", *SIAM J. Contr.*, vol. 23, pp. 197-216, 1985.

[5] A.J. Van der Schaft, "On nonlinear Observers", *IEEE transactions on Automatic control*, vol. AC-30, No. 12, pp. 1254-1256, 1985.

[6] X. Xia and W. Gao, "Nonlinear observer design by observer error linearization", *SIAM J. Contr.*, vol. 27, pp. 199-216, 1989.

[7] S.-T. Chung and J.W. Grizzle, "Sampled-data Observer Error Linerization", *Automatica*, vol. 26, pp.997-1007, 1990.

[8] W.M. Boothby, *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1975.

[9] H.-G. Lee, A. Arapostathis and S.I. Marcus, "On the digital control of nonlinear systems", *Proc. of the 27th IEEE Conf. Decision and Contr.*, Austin, TX., pp. 480-481, 1988.

## 저 자 소 개

**鄭 善 太(正會員)**

1960年 3月 10日生. 1983年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업(학사). 1986年 12月 미국 The Univ. of MIchigan (Ann Arbor) 전기 및 컴퓨터 공학과 석사. 1990年 12月 미국 The Univ. of Michigan (Ann Arbor) 전기 및 컴퓨터 공학과 박사. 1991年 ~ 현재 숭실대학교 전자공학과 부교수 재직. 주관심분야는 비선형시스템, 실시간 시스템 등임.