



# 웨이브릿과 신호처리

인 경 석, 정 재 호  
(인하대학교 공과대학 전자공학과)

## 1. 서 론

웨이브릿 변환은 1910년의 Haar웨이브릿[2]으로 거슬러 올라가는 수학적 배경을 가짐과 동시에, multirate-filter bank라는 신호처리(signal processing)를 이용한다. 웨이브릿 변환은 많은 신호처리에 사용될 수 있는 매우 일반적인 방법을 제공한다.

1절의 나머지 부분에서는 웨이브릿 변환이 나타나게 된 배경, 2절은 웨이브릿 변환의 수학적 정의, 3절은 웨이브릿의 응용 분야, 4절은 발전된 웨이브릿의 모습에 대해서 기술한다.

### 1.1 비정상 신호 해석[1]

기존의 Fourier 해석은 신호를 주파수 성분으로 나눈 뒤, 각 성분의 상대적 크기를 해석하는 방법이다. 식으로 표현하면 식(1)과 같다. 식(1)에서와 같이  $X(f)$ 는 무한구간의 정현파

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi ft} dt \quad (1)$$

기저와 신호의 내적으로 표현된다. 따라서  $x(t)$ 가 정상 신호로 이루어 졌을 때, Fourier 해석 방법이 잘 적용된다. 그러나 시간 영역에서의 급격한 변화(비정상 신호)는 주파수 영역에서 넓은 영역에 나타나기 때문에 Fourier해석 방법 이외의 것이 필요하다.

일반적으로, 비정상 신호의 해석 방법에는 신호에 일정한 길이의 window를 곱하고, 그 구간에서 Fourier 해석을 하는 방법이 있다. 이 방법은 전체적으로는 비정상적이지만, 부분적으로 정상적인 신호의 해석에 적당하다.

### 1.2 Time-Frequency Analysis

위의 방법은 관심 있는 시간 구간(window 함수 구간)의 Fourier 해석을 하기 때문에, 시간 의존적인 Fourier 해석

방법으로 볼 수 있다. 시간과 주파수에서 동시에 신호를 해석하는 대표적인 예는 STFT(Short Time Fourier Transform)과 WT(Wavelet Transform)이 있다.

신호의 해석은 신호를 기저 함수의 가중된 합(weighted sum)으로서 표현하여, 그 가중치를 해석함으로써 이루어진다. 기저 함수를 어떤 것을 사용하느냐에 따라 가중치가 의미하는 것은 달라진다. 예를 들면, 기저 함수가 임펄스 함수이면 가중치는 시간의 정보를 잘 나타내고, 기저 함수가 정현파이면 가중치는 주파수의 정보를 잘 나타낸다. 해상도(resolution)이라는 개념을 도입하면, 전자의 경우는 시간 해상도( $\Delta t$ )가 작고, 후자의 경우는 주파수 해상도( $\Delta f$ )가 작다라고 표현한다. 그러나 시간 해상도와 주파수 해상도는 한 기저 함수들에서 동시에 작아질 수 없다. 그들의 곱은 Heisenberg 부등식에 의해서 일정한 상수보다 커질 수 없다, 즉

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (2)$$

#### 1.2.1 Short Time Fourier Transform

STFT는 window를 시간 축의 한 점  $\tau$ 에 놓고, 그 window 내에서 Fourier 변환을 한다. 식으로 표현하면 식(3) 같다. STFT의 기저 함수들은 window 함수의 변조(modulation)와

$$STFT(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-\tau)e^{-2\pi ft} dt \quad (3)$$

변이(translation)에 의하여 만들어진다.  $\tau$ 와  $f$ 는 각각 변조와 변이 매개변수이다. 따라서 신호는 2차원의 시간-주파수 평면으로 옮겨진다.

STFT는 시간과 주파수 해상도와 관련해서 단점을 가진다. 기저 함수의 주파수 해상도와 시간 해상도를 식으로 표현하면 각각 식(4), (5)와 같고, window가 정해지면 해상도는 주파수와 시간의 전 영역에서 고정되는 것을 볼 수 있다. 신호가 짧은 기간의 비정상 신호와 긴 기간의 정상 신호의 합으

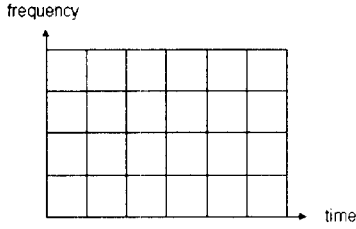


그림 1. STFT의 시간 및 주파수 해상도

로 이루어져 있을 경우, STFT는 좋은 해석 방법이 아니다. STFT 기저 함수의 해상도를 시간 주파수 평면에 표시하면 그림 1과 같다. 각 사각형의 넓이가 해상도를 나타낸다.

$$\Delta f^2 = \frac{\int f^2 |G(f)|^2 df}{\int |G(f)|^2 df} \quad (4)$$

$$\Delta t^2 = \frac{\int t^2 |g(t)|^2 dt}{\int |g(t)|^2 dt} \quad (5)$$

### 1.2.2 Wavelet Transform

STFT의 해상도 측면에서의 단점을 극복하기 위해서 각각의 해상도를 시간과 주파수에서 변하게 할 수 있다. WT의 기저 함수들은 짧은 기간의 고주파와 긴 기간의 저주파 함수로 되어 있다. 이와 같은 것은 쿼의 내부에 있는 와우각을 잘 모델링 하는 것으로 나타나 있고 실제로 나타나는 신호의 대부분이 위와 같은 특성을 나타낸다.

웨이브렛의 정의는 식 (6)과 같다. WT의 기저 함수는 mother wavelet  $\psi(t)$ 를 시간 축에서  $b$ 만큼 변이(translation)

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt \quad (6)$$

시키고,  $a$ 만큼 확대/축소(dilation)시켜서 얻어낸다.  $a$ 가 1보다 크면 기저 함수는 시간 축에서 좁아지며,  $a$ 가 1보다 작으면

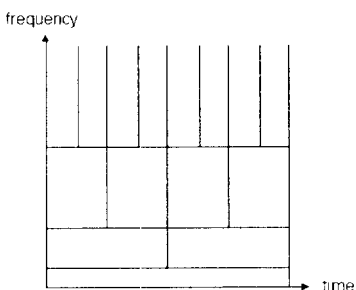


그림 2. WT의 시간 및 주파수 해상도

넓어진다. 따라서 기저 함수들의 해상도를 조절할 수 있게 한다. WT 기저 함수의 해상도를 시간 및 주파수 평면에 표시하면 그림 2와 같다. 각 사각형의 넓이가 해상도를 나타낸다.

## 2. 웨이브렛 변환 (Wavelet Transform)

### 2.1 웨이브렛 변환(Wavelet Transform)

#### 2.1.1 Continuous Wavelet Transform

웨이브렛 변환의 기저 함수는 한 함수의 확대/축소(dilation)와 변이(translation)에 의하여 만들어진다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 0 \quad (7)$$

웨이브렛 변환과 역 웨이브렛 변환을 식으로 정의하면, 각각 식 (8), (9)와 같다.

$$CWT: W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{ab}(t) f(t) dt \quad (8)$$

$$ICWT: f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a, b) \psi(t) da db \quad (9)$$

역변환이 존재하기 위해서는  $C_\psi$ 가 무한대 보다 작아야 한다(admissibility condition);

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega} d\Omega < \infty \quad (10)$$

위 식에서 다음이 유도된다.

$$\Psi(\Omega)|_{\Omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (11)$$

여기서  $\Psi(\Omega)$ 는  $\psi(t)$ 의 Fourier 변환이다. 식(11)에서 mother wavelet은 어느 정도의 진동을 가짐을 알 수 있다.

#### 2.1.2 Discrete Wavelet Transform

CWT는 기저 함수의 갯수가 무한개라는 비실용적인 단점이 있다. 이를 해결하기 위해  $a$ 와  $b$ 를 이산화 한다. 즉, mother wavelet은 식(12)와 같이 표현된다.

$$a = a_0^m, \quad b = nb_0 a_0^m, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad a_0 > 1, \quad b_0 > 0 \quad (12)$$

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0)$$

위 함수를 기저 함수로 한 웨이브렛 변환은 식(13),(14)와 같다.

$$DWT : d_{m,n} = \frac{1}{a_0^{m/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(a_0^{-m}t - nb_0) dt \quad (13)$$

$$IDWT : f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \psi_{mn}(t) \quad (14)$$

**2.2 다해상도 해석 (Multiresolution Analysis - Scaling Function)[2,3]**

웨이브렛 변환의 기저 함수들은 해상도가 다른 함수들의 집합으로 이루어져 있기 때문에, 웨이브렛 변환은 다해상도 해석에 적합하다. 다해상도 해석은 다음과 같은 특성을 가지는 space들로 이루어진다.

• Containment :

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

← Coarser / Finer →

• Completeness :

$$\bigcap_{m \in Z} V_m = \{0\} \quad \bigcup_{m \in Z} V_m = L^2(R)$$

• Scaling Property :

$$f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2t) \in V_{m-1}$$

for any function  $f \in L^2(R)$

• The Basis/Frame Property :

다음과 같은 특성을 가지는 스케일링 함수(scaling function)  $\phi(t) \in V_0$ 이 존재한다.

$\forall m \in Z$ 에 대해, 집합

$$\{ \phi_{mn}(t) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n) \}$$

은  $V_m$ 의 직교 기저(orthogonal basis)이다.

위와 같은 space들은 연속적인 근사(successive approximation) space들을 나타낸다. 어떤 함수  $f$ 가 주어 졌을 때, space  $V_m$ 에의 연속적인 투영(successive projection)  $Proj_{V_m}(f)$ 는  $2^m$ 의 해상도로 나타내는  $f$ 의 연속적인 근사(successive approximation)이다, 즉

$$Proj_{V_m}(f) = \sum_{n \in Z} \langle f, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n} \quad (15)$$

Scaling property에 의하여 다음과 같은 scaling 함수의 특징이 유도된다.

$$\phi(t) = \sum_n \alpha_n \phi(2t - n) \quad (16)$$

Basis/Frame property에서  $\phi_{0,k}$ 의 직교 성에 의하여 다음이 유도된다.

$$\sum_n \alpha_n \alpha_{n+2k} = 2\delta_{k,0} \quad (17)$$

여기서,  $\delta$ 는 Kronecker delta 함수이다.

다해상도 해석과 관련해서 직교 웨이브렛 기저(orthonormal wavelet basis)는 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(t) = \sum_{n \in Z} (-1)^n \alpha_{-n+1} \phi(2t - n) \quad (18)$$

여기서  $\alpha_n$ 은 식(16)의 것과 같은 것이다.

다해상도 해석에서, space  $V_m$ 이외에  $W_m$ 이라는 space를 하나 더 정의한다.  $W_m$ 은 space  $V_{m-1}$ 에서  $V_m$ 의 orthogonal complement이다. 일정한  $m$ 에 대해 함수  $\phi_{m,n}$ 은  $W_m$ 에서

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m, \quad V_m \perp W_m \quad (19)$$

직교 기저(orthonormal basis)를 이룬다. 따라서 함수  $f$ 를 space  $V_{m-1}$ 로 투영하는 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Proj_{V_{m-1}}(f) = Proj_{V_m} + \sum_{n \in Z} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \quad (20)$$

**2.3 다해상도 해석과 디지털 필터 뱅크 (Multiresolution Analysis and Digital Filter Banks)[2,3]**

디지털 신호 처리에서, 신호들은 샘플링된 것이다. 다해상도 해석에서, 샘플링된 신호는 근사화된 신호(approximation signal)로 간주한다. 앞으로는  $S_0(n)$ 으로 표기하고, 신호의 해상도는 샘플링 주파수(sampling frequency)로 결정된다.

다해상도 해석에서, 이러한 샘플링된 신호들은 디지털 필터를 이용하여 시간과 주파수 공간에서 처리된다. 그러나 모든 디지털 필터를 다해상도 해석에 이용할 수 있는 것은 아니다. 2.3.1절에서 연속 기저 함수들인  $\Psi, \phi$ 와 디지털 필터 사이의 관계, 직교 다해상도 해석을 이루기 위한 충분 조건을 알아본다. 2.3.2절에서는 직교 다해상도 해석 방법인 Mallet의 알고리즘을 알아본다.

**2.3.1 디지털 필터와 웨이브렛 변환과의 관계**

$V_m$ 은 다해상도 해석을 위한 space이고,  $\phi_m$ 은  $V_m$ 의 직교

기저(orthonormal basis)이다. 함수  $\phi_{m+1,n}(t) \in V_{m+1} \subset V_m$ 은 다음 관계에 의하여  $\phi_m$ 을 기저로 하여 분해할 수 있다.

$$\phi_{m+1,n}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{m+1,n}, \phi_{m,k} \rangle \phi_{m,k}(t) \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{m+1,n}, \phi_{m,k} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-(m-1)/2} \phi(2^{-(m+1)}t-n) 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t-k) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-1/2} \phi(2^{-1}t) \phi(t-(k-2n)) dt \\ &= \langle \phi_{1,0}, \phi_{0,k-2n} \rangle \end{aligned} \quad (22)$$

이다.

위 식의 내적은  $m$ 에 무관함을 알 수 있다. 식(21) 과(22)을 이용하여 함수  $f$ 를 space  $V_m$ 에 투영시키면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\langle f, \phi_{m+1,n} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{m,k} \rangle \langle \phi_{1,0}, \phi_{0,k-2n} \rangle \quad (23)$$

$\langle \phi_{1,0}, \phi_{0,n} \rangle = h(n)$ 로 놓으면,  $h(n)$ 는 lowpass filter가 되고,  $2^{-1/2}$ 로 정규화를 하면 식(18)의  $\alpha_n$ 과 같다.

$S_{m-1}(n)$ 를 space  $V_{m-1}$ 에 투영시킨 것에 해당하는 샘플링된 신호라 하고,  $S_m(n)$ 을 space  $V_m$ 에 투영시킨 것에 해당하는 샘플링된 신호라 하면, 다음 식이 성립하는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} S_{m+1}(n) &= \langle f, \phi_{m+1,n} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(2n-k) \langle f, \phi_{m,k} \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(2n-k) S_m(k) \end{aligned} \quad (24)$$

위 식을 보면,  $S_{m-1}(n)$ 은  $h(n)$ 과  $S_m(n)$ 의 콘볼루션으로 나타나는 것을 알 수 있다.

식(23)와 (24)을 조합하면,  $m=0$ 에서 디지털 필터  $h(n)$ 와 스케일링 함수  $\phi(t)$ 와의 관계를 알 수 있다.

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \phi(t-k) \quad (25)$$

위의 식을 주파수 영역에서 나타내면,

$$\Phi(2\Omega) = H(\Omega) \Phi(\Omega) = \prod_{n=0}^{+\infty} H\left(\frac{\Omega}{2^n}\right) \quad (26)$$

여기서,

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) e^{-jn\Omega} \quad (27)$$

이고,  $\Phi(\Omega)$ 는  $\phi(t)$ 의 Fourier 변환이다.

스케일링 함수에 대해 유도된 결과는 웨이브렛 함수에 대해 유도된 결과와 비슷하다.

$$\begin{aligned} g(n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-1/2} \psi\left(\frac{1}{2}t\right) \phi(t-n) dt \\ &= (-1)^n h(-n+1) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h(-n+1) \phi(t-n) \quad (29)$$

$$\Psi(2\Omega) = H(\Omega + \pi) e^{-j\Omega} \Phi(\Omega) \quad (30)$$

위의 사항을 바탕으로, 다해상도 해석에서 스케일링 함수, 웨이브렛 함수, lowpass filter, highpass filter 등이 가져야 할 특징을 나열하면 다음과 같다.

·  $\phi_{m,n}$ 와  $\phi_{m,n}$ 의 orthonormality에 의해

$$\sum_k |\Phi(\Omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad \sum_k |\Psi(\Omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (31)$$

· 식(26)와 식(30)에 의해

$$\begin{aligned} & |H(e^{j\omega})|^2 + |H(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 1 \\ & |G(e^{j\omega})|^2 + |G(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 1 \end{aligned} \quad (32)$$

· 식(26)이 수렴하기 위해서

$$|\Phi(0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt \right| = |H(1)| = 1 \quad (33)$$

### 2.3.2 Mallet's algorithm : 직교 다해상도 해석 방법

직교 다해상도 해석에서 근접하는 2개의 스케일 단계(scale level)간에 2만큼의 해상도 차이가 난다. 이 때문에 dyadic 다해상도 해석이라고도 불린다.

$S_0(n) \in l_2(Z)$ 를 샘플링된 신호라고 하면,  $S_0(n)$ 은 여러 단계의 해상도를 가지는 시간 주파수 공간으로 분해(decomposition)될 수 있다 분해는 다음과 같은 식에 의하여 이루어진다.

$$S_m(n) = \sum_k h(2n-k) S_{m-1}(k) \quad (34)$$

$$C_m(n) = \sum_k g(2n-k) S_{m-1}(k) \quad (35)$$

$S_m(n)$ 은  $2^m$ 의 해상도를 가지는  $S_{m-1}(n)$ 의 근사이다. 웨이브렛 계수  $C_m(n)$ 은  $S_{m-1}(n)$ 를  $S_m(n)$ 으로 근사화 시켰을 때 만들어지는 정보의 손실 양을 나타낸다.

스케일링/웨이브렛 함수와 관련된 필터들은 perfect reconstruction조건을 만족시키기 때문에 다음과 같은 식으로  $S_m(n)$ 과  $C_m(n)$ 으로부터,  $S_{m-1}(n)$ 을 다시 만들어 낼 수 있다.

$$S_{m-1}(n) = \sum_n h(2n-k)S_m(n) + \sum_n g(2n-k)C_m(n) \quad (36)$$

다해상도 해석은 다음과 같은 방법으로 이루어진다.  $S_0(n)$ 을  $S_1(n)$ 과  $C_1(n)$ 의 신호로 분해한 뒤, 이 분해를  $S_1(n)$ 에 똑같은 방법으로 적용한다. 위의 동작을 원하는 해상도의 신호를 얻을 때까지 반복한다. 다해상도 해석의 블록도는 그림 3과 같다.

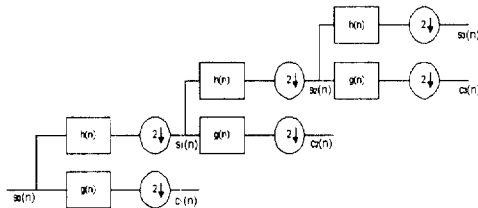


그림 3. 다해상도 해석의 블록도

### 3. 웨이브렛과 영상신호처리

영상 처리에서 영상의 대부분 영역은 저주파 성분이거나, 통계적으로 매우 높은 상관 관계를 가지고 있다. 그러나 고주파 성분해 해당하는 모서리나 사물의 경계는 영상의 에너지에는 큰 기여를 못 하지만, 인간의 눈을 통한 인식에는 큰 영향을 미친다.

DCT(discrete cosine transform)과 같이 지금까지 사용되어 왔던 변환 코더(transform coder)의 계수는 영상의 고정된 공간 영역과 고정된 주파수 영역에 해당한다. 고주파 성분은 계수의 여러 부분에 퍼져서 나타난다. 따라서 경계선을 명확히 나타내기 위해서는 0이 아닌 많은 계수가 필요하게 된다. 영상의 경계선은 에너지에 상대적으로 작은 부분으로 나타나기 때문에 DCT와 같은 변환 코더는 고전송율(high bitrate) 코딩에는 적합하지만, 저전송율(low bitrate)코딩에서는 저주파 부분에 많은 비트를 할당하고 고주파 부분에는 상대적으로 적은 비트를 할당하게 되어 영상에 블러화 현상이 나타난다. 웨이브렛 변환은 영상을 각 주파수 대역별로 나누어 코딩하기 때문에, 같은 비트율을 사용했을 때, 상대적으로 경계선을 더 잘 표현할 수 있다[5].

웨이브렛은 다해상도 해석이기 때문에 영상의 점진적 전송(progressive transmission)에 적합하다. 점진적 전송은 수신

단에서 최소의 비트율로 가장 빠르게 영상을 알아 볼 수 있다는 장점이 있다.

그림 4는 separable 2차원 해석 필터의 블록도를 나타낸 것이고, 그림 5는 실제 영상을 웨이브렛 변환한 그림이다.

영상의 특성상 사용되는 필터의 선형 위상(linear phase)은 필수적이다. 2밴드 필터의 특성상 직교 필터는 선형 성을 가지지 못 한다. 따라서 직교 성의 제한에는 여유를 두고 선형 위상을 이루는 biorthogonal wavelet이 영상 처리에 많이 사용된다[4].

영상 코딩은 변환, 양자화, 무손실 엔트로피 코딩의 3단계로 이루어진다. 웨이브렛 변환을 이용한 영상 코딩에 쓰이는

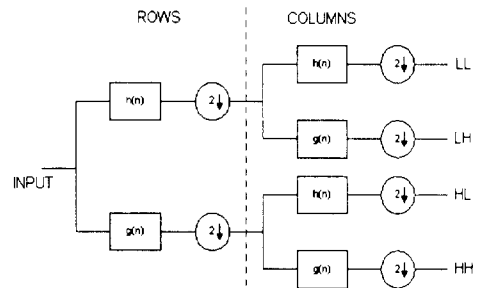


그림 4. separable 2차원 해석 필터의 블록도

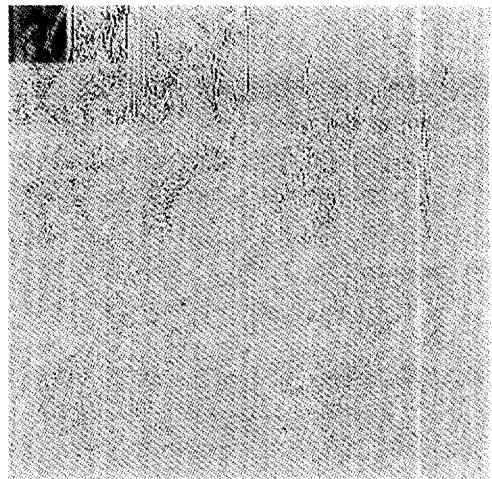


그림 5. lena영상의 웨이브렛 변환

양자화 기법으로는 벡터 양자화(vector quantization)[8]와 임베디드 제로트리(embedded zerotrees)[5] 기법이 있다. 벡터양자화 기법은 픽셀 그 자체를 양자화 하는 것이 아니라 픽셀들의 묶음을 양자화 하는 것이다. VQ를 웨이브렛 변환에 적용 방법은 각각의 부대역(subband)에 부코드 북들(subcode books)을 만드는 것이다. 이 부코드북들을 합치면, 다해상도 코드 북이 형성된다. VQ는 각각의 부대역 내에서만 양자화를 하는 주파수 양자화 기법인데 반해, 임베디드 제로트리기법은 부대역내에서 뿐만 아니라 부대역 사이의 공간적 상관성도 이용하는 양자화기법이다. 임베디드 제로트리 양자화는 주파

수와 공간의 정보를 모두 나타내는 웨이브렛 변환의 특성을 잘 이용한다.

### 4. 발전된 웨이브렛

#### 4.1 웨이브렛 팩킷 (Wavelet Packet)[7]

일반적인 웨이브렛은 저주파 부분을 더 세밀하게 분해하는 방법을 이용하는 반면, 웨이브렛 팩킷은 주파수에 따라 해상도를 바꾸는 개념을 일반화시킨 것이다. 따라서 신호에 따라 다른 시간/주파수 해상도를 가지도록 할 수 있다. 웨이브렛의 해상도는 그림 2와 같이 고주파에서 저주파로 갈수록 더 세밀한 것과 같은 규칙이 있지만, 웨이브렛 팩킷의 해상도는 그림 6과 같이 신호의 특성에 따라 임의로 주파수 해상도가 결정된다.

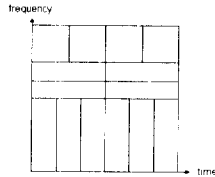


그림 6. 팩킷의 시간 및 주파수 해상도

#### 4.2 다중 웨이브렛 (Multiwavelet)[6]

지금까지 설명해 온 웨이브렛은 스칼라 웨이브렛(scalar wavelet)이다. 스칼라 웨이브렛에서는 하나의 웨이브 함수만 이용하지만, 다중 웨이브렛에서는 하나 이상의 웨이브렛 함수가 사용된다. 스칼라 웨이브렛에 대한 다중 웨이브렛의 장점은 perfect reconstruction 조건을 만족시키면서 필터 길이를 줄일 수 있고, 직교성을 가지면서 선형 위상을 가지는 필터를 만들 수 있다.

다중 웨이브렛 변환의  $V_0$  space는  $N$ 개의 스케일 함수  $\phi_1(t-k), \phi_2(t-k), \phi_3(t-k), \dots, \phi_N(t-k)$ 으로 이루어진다.

앞의 스칼라 웨이브렛의 식 (16), (18)은 다음과 같은 식으로 나타난다.

$$\bar{\psi}(t) = \sum_k D[k] \bar{\phi}(2t-k) \tag{37}$$

$$\bar{\phi}(t) = \sum_k C[k] \bar{\phi}(2t-k) \tag{38}$$

여기서

$$\bar{\psi}(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \dots, \phi_N(t)]^T,$$

$$\bar{\phi}(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \dots, \phi_N(t)]^T,$$

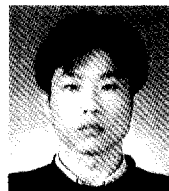
$C[k], D[k]$ 는  $N \times N$  행렬이다.

DMWT(Discrete Multiwavelet Transform)을 스칼라 함수에 적용하기 위해서는, 먼저 진 처리 필터로 스칼라 데이터를 벡터화한 후, 벡터화된 데이터를 벡터 필터뱅크로 변환한다. 위를 일반적으로 벡터 변환이라 부르는데, 벡터 양자화와 같이 사용하면 좋은 코딩 기법이 될 수 있다.

### 참 고 문 헌

- [1] Oliver Rioul and Martin Vetterli, "Wavelets and Signal Processing," IEEE SP Magazine, Oct, 1991.
- [2] Ail N. Akansu and Richard A. Haddad, "Multiresolution Signal Decomposition," ACADEMIC PRESS, INC., 1992.
- [3] N. J. Fliege "Multirate Digital Signal Processing," John Wiley & Sons, INC., 1994.
- [4] M Barlaud "Wavelets in Image communication," ELSEVIER, 1994.
- [5] J. M. Shapiro "Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients," IEEE trans. SP, vol. 41, pp. 3445-3462, 1993.
- [6] V. Strela and P. N. Heller "The Application of Multi-wavelet filter banks to image processing," submitted to IEEE Trans. Image processing.
- [7] K. Ramchandran and M. Vetterli, "Best wavelet packet bases in a rate-distortion sense," IEEE trans. Image Processing., vol. 2, pp. 160-174, April 1993.
- [8] Marc Antonini, Michel Barlaud and Ingrid Daubechies "Image Coding Using Wavelet Transform," IEEE trans. Image Processing., vol. 1, pp. 205-220, April, 1993

### 저 자 소 개



인경석(印京錫)

1972년 11월 4일생. 1995년 인하대 졸업. 1996년-현재 인하대학교 대학원 전자공학과 석사과정.



정재호(鄭在皓)

1982년 미국 Univ. of Maryland 졸업. 1984년 미국 Univ. of Maryland 졸업(석사). 1990년 미국 Georgia Institute of Technology 졸업(공학). 1984년-85년 미국 국방성 산하 해군연구소 신호처리연구실 연구원. 1991년-92년 미국 AT&T Bell Laboratories 음성 신호처리 연구실 연구원. 1992년-현재 인하대학교 공과대학 전자공학과 부교수.