

# Bonhoeffer Van der Pol 오실레이터 모델의 하드웨어 구현에 의한 카오스 운동 해석

배 영 철<sup>†</sup> · 서 삼 문<sup>††</sup> · 임 화 영<sup>†††</sup>

## 요 약

Bonhoeffer-Van der Pol(BVP)모델을 실제 소자값을 이용하여 하드웨어를 구현하고  $A_1 \cos \omega t$ 를 인가하여 주기 운동과 카오스 운동을 조사하였다.

BVP모델의 하드웨어를 구성하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션[1]에 의해 구현된 결과를 이용하여 실제 소자값으로 Rescaling 하였으며 각 계수의 값을  $a=0.7, b=0.8, c=0.1$ 로 정하고 주기적 자극 전류의 진폭을 0에서 1.3까지 변화시켜 주기운동에서 카오스 운동으로 천이됨을 위상공간, 시계열 데이터로 확인하였다.

## The chaotic motion analysis by hardware implementation of Bonhoeffer Van der Pol oscillation model

Yeong Chul Bae<sup>†</sup> · Sam Moon Shuh<sup>††</sup> · Wha Yeong Yim<sup>†††</sup>

## ABSTRACT

The effects of periodic and chaotic behaviour in the Bonhoeffer-Van der Pol(BVP) oscillation of the nerve membrane driven by a periodic stimulating current  $A_1 \cos \omega t$  are investigated through hardware implementation.

For hardware implementation of the BVP model, real element values were rescaled with computer simulation results to determine the parameter real value.

As the parameter  $A_1$  varied in the range 0 to 1.3, the BVP model showed an ordinary and reversed period-doubling cascade and a chaotic state. At the low driving amplitude of  $A_1$ , the period-doubling showed and at the high driving amplitude of  $A_1$  the chaotic state occurred.

To analyse the BVP model for chaotic behaviour Phase plane, Time series are used to verify that properties.

### 1. 서 론

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다[1, 2]. 많은 생물학적 리듬과정들은 리미트 사이클 거동을 보여주는 비선형 미분방

정식으로 표현되는 발진 시스템과 밀접한 관계를 갖고 있으며 이 발진들은 안정한 범위에서 제어 파라미터 값의 변화에 대응하여 보다 안정화 할 수 있다. 외부에서 주기적인 힘을 인가할 때 비선형 시스템은 주기 배중과정을 거쳐 카오스 현상으로 천이된다[3, 4].

비선형 시스템에서 주기적으로 가한 힘에 대한 연구는 이론적으로나 실험적으로 관심의 대상이 되어 왔다. 이같은 시스템을 대표한 예는 Van der pol 오실레이터로서 이는 물리학, 전자공학, 생물학, 신경학

† 정 회 원:광운대학교 전기공학과  
†† 정 회 원:광운대학교 제어계측공학과  
††† 정 회 원:광운대학교 제어계측공학과, 광운대 신기술 연구소  
논문접수:1996년 1월 18일, 심사완료:1996년 5월 21일

등 비선형 동력학에서 자기 여기 발진(Self-excited oscillation)의 기본적인 모델로 광범위하게 사용되어 왔으며 생물학적인 리듬도 Van der pol 오실레이션과 밀접한 관계를 갖고 있다.

2개의 변수를 가진 신경막과 신경 세포막이 여기되었을 때 전기적 임펄스와 전압 펄스를 다음과 같은 2개의 방정식으로 나타낼 수 있으며 이를 Bonhoeffer-Van der pol(BVP) 모델이라 부른다[5, 6].

$$\dot{x} = x - x^3/3 - y + I(t) \tag{1a}$$

$$\dot{y} = c(x + a - by) \tag{1b}$$

여기서  $x$ 는 막전위,  $y$ 는 자극으로 부터 막의 회복을 나타내는 시정수에 관련된 변수,  $I(t)$ 는 외부에서 가한 주기적 자극전류,  $a$ 는 막의 반경,  $b$ 는 막의 내부에 흐르는 비저항(저항률),  $c$ 는 온도요소를 나타낸다.

BVP모델에 대한 연구로서 Kawato와 Suzuki[6], Okuda[5]는 주기적 자극전류가 없는 상태( $I=0$ )에서 In-phase와 Anti-phase해의 안정도, Threshold와 Shaping의 활동, 잡음의 영향에 대한 연구가 있으며, BVP 모델의 카오스와 관련된 연구로는 주기적 자극 전류를 인가하여 카오스 신호를 생성[10, 11]한 연구가 있으나 실제 소자를 이용하여 하드웨어를 구현한 경우는 없었다.

본 논문에서는 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 카오스 신호를 생성한 연구[10, 11]를 기본으로 BVP 모델을 하드웨어로 구현하여 주기적 자극전류  $I(t) = A_1 \cos \omega t$ 를 인가하였을 때 주기 배증과정을 거쳐 카오스 현상으로 천이되는 과정을 시계열 데이터, 위상 공간으로 해석하였으며 컴퓨터 시뮬레이션[10, 11] 결과와 일치함을 보였다.

## 2. BVP모델의 하드웨어 구현

식(1a)과 식(1b)에서 주기적 자극전류  $I(t) = A_1 \cos \omega t$ 를 인가하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{x} = x - x^3/3 - y + A_1 \cos \omega t \tag{2a}$$

$$\dot{y} = c(x + a - by) \tag{2b}$$

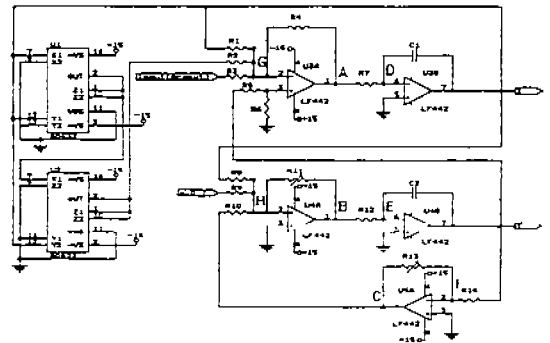
식(2a)과 식(2b)에서  $a, b, c$ 는 다음과 같은 조건을 만

족하여야 한다. [5, 6]

$$b < 1 \tag{3}$$

$$3a + 2b \geq 3 \tag{4}$$

본 논문에서는 식(3)과 식(4)를 만족하는  $a=0.7, b=0.8, c=0.1$ 의 값으로 정하고 그림1과 같이 하드웨어를 구성하였다.



(그림 1) BVP모델의 하드웨어 구현 회로  
(Fig. 1) Hardware implementation circuit of BVP model.

그림1에서 식(2a)를 구현하기 위하여 node A의 전압을  $V_A$ 라 하고, node D에 KCL를 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{V_A}{R_7} = C_1 \frac{d(0-x)}{dt}$$

$$V_A = -R_7 C_1 \frac{dx}{dt}$$

이를 정리하면 식(5)와 같다.

$$V_A = -R_7 C_1 \dot{x} \tag{5}$$

node G에 KCL를 적용하면 다음과 같다.

$$V_A = -\frac{R_4}{R_1} x - \frac{R_4}{R_2} (-x^3) + \left(1 + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}\right) \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6} y - \frac{R_4}{R_3} I(t) \tag{6}$$

식(5)를 식(6)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$-R_7 C_1 \dot{x} = -\frac{R_4}{R_1} x - \frac{R_4}{R_2} (-x^3) + (1 + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}) \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6} y - \frac{R_4}{R_3} I(t)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{R_7 C_1} [\frac{R_4}{R_1} x - \frac{R_4}{R_2} x^3 - (1 + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}) \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6} y + \frac{R_4}{R_3} I(t)] \quad (7)$$

식(7)이 식(2a)와 동일한 형태를 갖기 위한 조건은  $R_1 = R_3 = R_4$ ,  $R_2 = 3R_1$ ,  $3R_5 = 7R_6$ 이 되며 식(8)과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{x} = \frac{1}{R_7 C_1} [x - \frac{1}{3} x^3 - y + I(t)] \quad (8)$$

식(2b)를 구현하기 위하여 node B의 전압을  $V_B$ 라 하고, node E에 KCL를 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{V_B}{R_{12}} = C_2 \frac{d(0-y)}{dt}$$

$$V_B = -R_{12} C_2 \frac{dy}{dt}$$

이를 정리하면 식(9)과 같다.

$$V_B = -R_{12} C_2 \dot{y} \quad (9)$$

node C의 전압을  $V_C$ 라 하고, node F에 KCL를 적용하면 다음과 같다.

$$V_C = -\frac{R_{13}}{R_{14}} y \quad (10)$$

node H에 KCL를 적용하면 다음과 같다.

$$V_B = -\frac{R_{11}}{R_8} x - \frac{R_{11}}{R_{10}} V_C - \frac{R_{11}}{R_9} a \quad (11)$$

식(9)과 식(10)를 식(11)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$-R_{12} C_2 \dot{y} = -\frac{R_{11}}{R_8} x + \frac{R_{11}}{R_{10}} \frac{R_{13}}{R_{14}} y - \frac{R_{11}}{R_9} a$$

$$\dot{y} = \frac{1}{R_{12} C_2} [\frac{R_{11}}{R_8} x - \frac{R_{11}}{R_{10}} \frac{R_{13}}{R_{14}} y + \frac{R_{11}}{R_9} a] \quad (12)$$

식(12)가 식(2b)와 동일한 형태를 갖기 위한 조건은  $R_8 = R_9 = R_{10} = 10R_{11}$ ,  $a = 0.7$ ,  $R_{13} = 0.8R_{14}$ 이 되며 식(13)과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{y} = \frac{0.1}{R_{12} C_2} (x - 0.8y + 0.7) \quad (13)$$

식(8)과 식(13)이 식(2a)와 (2b)와 동일한 수식이 되기 위해서는  $\frac{1}{R_7 C_1}$  과  $\frac{1}{R_{12} C_2}$  의 값이 1이 되어야만 한

다.  $\frac{1}{R_7 C_1}$  과  $\frac{1}{R_{12} C_2}$  의 값이 1이 되도록  $R_7, C_1, R_{12}, C_2$

값을 정하여 하드웨어를 구성하면 일정한 DC값이 나와 시뮬레이션 결과와 일치하지 않는 문제점이 있으므로 이를 해결하기 위해 소자값을 Rescaling 해 주어야 한다.

본 논문에서는 소자값 rescaling을  $\frac{1}{R_7 C_1}$  과  $\frac{1}{R_{12} C_2}$  의 값이 100이 되도록  $R_7 = R_{12} = 10k\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 1\mu F$  으로 정하여 하드웨어를 구성하였으며 식(8)에서  $x^3$  항을 구현하기 위해 Multiplier 2개로 구성하였다.

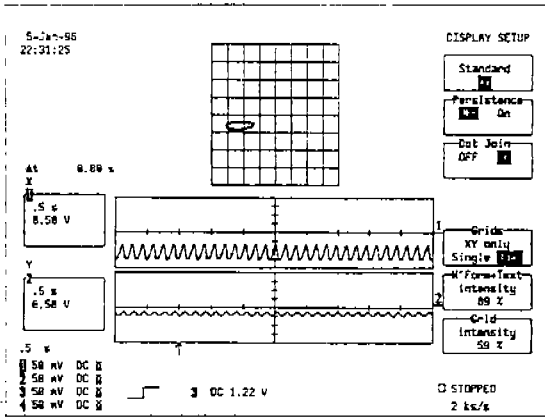
### 3. BVP 모델의 진폭 $A_1$ 값의 변화에 의한 카오스 현상 해석

주기적 자극 전류가 없는 휴식 상태를 나타내는 안정한 상태인 식(1a)에서 카오스 신호를 생성하기 위하여 주기적 자극 전류  $I(t) = A_1 \cos \omega t$  ( $\omega = 1.0$ )을  $A_1 > 0$  의 조건이 되는  $A_1$ 의 크기를 변화하였을 때 위상 공간, 시계열 데이터를 하드웨어 구현에 의해 조사하였다.

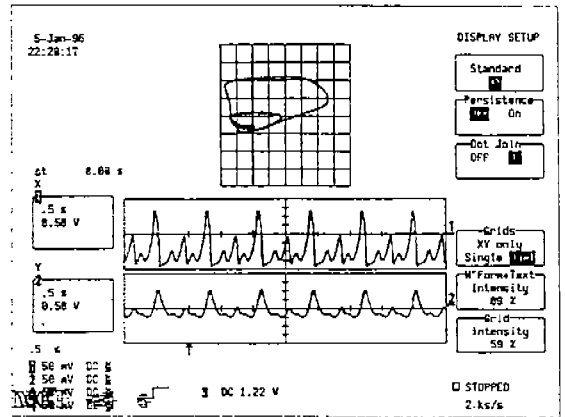
BVP모델의 하드웨어 구현회로인 그림1에 의한 실험 결과는 다음과 같으며 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 제시된 결과[10, 11]와 일치함을 확인할 수 있다.

(1)  $0 < A_1 < 0.2344$ 일때

그림2(a)에서 보는 바와 같이  $0 < A_1 < 0.2344$  범위에서는 주기적 자극전류를 인가하지 않는 상태와 동일한 1주기 운동을 하고 있다.



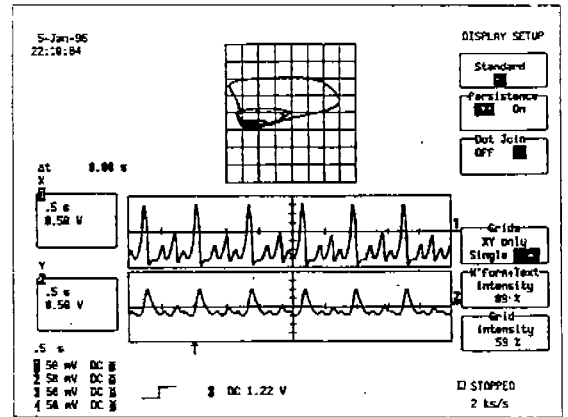
(a) 1주기 운동  
(a) 1 periodic motion



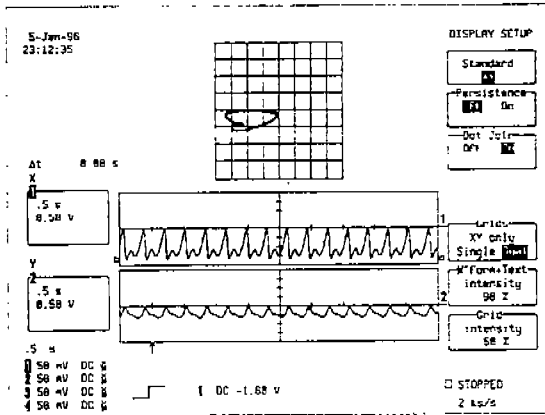
(c) 4주기 운동  
(c) 4 periodic motion

(2)  $0.2344 < A_1 < 0.2500$  일 때

$0.2344 < A_1 < 0.2500$  범위에서는 그림 2(b)와 같이 2주기 운동이 이루어 짐을 확인 할 수 있다.  $A_1$  값이 커지면 그림 2(c), 2(d)의 4주기, 8주기의 주기 배증과정이 나타나고 준주기로 발전함을 알 수 있다.



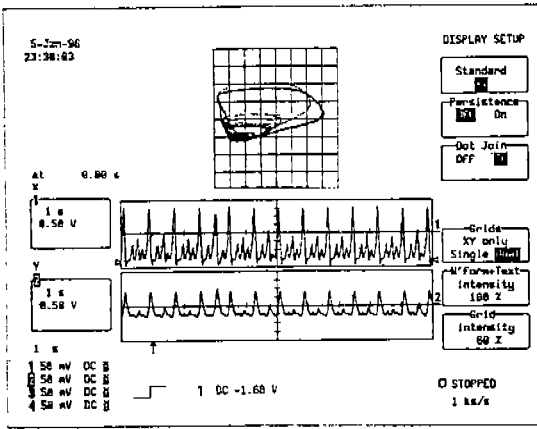
(d) 8주기 운동  
(d) 8 periodic motion



(b) 2주기 운동  
(b) 2 periodic motion

(3)  $0.2500 < A_1 < 0.2969$

$0.2500 < A_1 < 0.2969$  범위에서는 그림 2(e)와 같이 카오스 운동이 일어남을 확인 할 수 있다.



(e) 카오스 운동  
(e) chaos motion

(그림 2) BVP 모델의 하드웨어 구현에 의한 위상공간과 시계열 데이터

(Fig. 2) Phase portrait and time series by hardware implementation of BVP model.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 BVP 모델에서 각 계수의 값을  $a=0.7$ ,  $b=0.8$ ,  $c=0.1$ 로 정하고 외부에서 주기적 자극전류를 인가하여 진폭  $A_1$  값의 변화에 따라 주기운동과 카오스 운동이 있음을 하드웨어로 구현하여 확인하였으며 하드웨어 구현이 컴퓨터 시뮬레이션 결과와 일치시키기 위해 회로 소자값을 rescaling 하였다. 주기적 자극전류의 진폭  $A_1$  값이 0.2344 이하와 0.2969 이상에서는 1주기 또는 2주기의 주기운동이 나타나고 있으며 0.2500에서 0.2969 사이에서 카오스 현상이 일어남을 위상 공간, 시계열 데이터를 통하여 증명하였으며 하드웨어 구현에 의한 실험 결과와 컴퓨터 시뮬레이션에 의한 결과가 일치함을 확인 하였다.

#### 참 고 문 헌

[1] 배 영철, "카오스의 공학적 응용", 춘계계측제어 연구회 학술강좌, 1993.  
 [2] J. P. Gollub, T. O. Brunner, and B. G. Danly, "periodicity and Chaos in Coupled Nonlinear

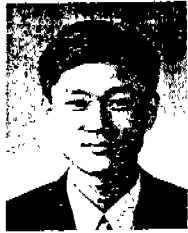
Oscillators", science, 200, pp. 48-50, 1978.  
 [3] A. V. Holden, ed., chaos, Manchester univ. press, 1986.  
 [4] N. Minoskey, Nonlinear Oscillation, Van Nostrand, 1962.  
 [5] M. Okuda, "A New Method of Nonlinear Analysis for threshold and shaping Actions in Transient states", progr. Theor. Phys. Vol. 66, pp 90-100, 1981.  
 [6] M. Kawatu. and R Suzuki, "Two Coupled Neural Oscillators and a Model of the Circadium pacemaker", Vol. 86, pp 574-575, 1980.  
 [7] A wolf J. B swift, H. L swinney and J. A. Vastano, physica D, "Determining Lyapunov exponent from a time series", Physica D Vol. 16, pp 285-317, 1985  
 [8] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Field., springer-Verlag, 1983.  
 [9] P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterization of strange Attractors", Phys. Rev. Lett. Vol. 50, No. 5, pp 346-349, 1983.  
 [10] 고재호, 배영철, 임화영, "주기적 외력을 인가한 Bonhoeffer-Van der pol 오실레이터 모델에서의 카오스 현상 해석에 관한 연구", 1995 제어계측 연구회 합동 학술 발표회 논문집, pp 100-102, 1995.  
 [11] 배영철, 임화영 "주기적 외력을 인가한 Bonhoeffer-Van der Pol 오실레이터 모델에서의 카오스 현상 해석에 관한 연구", 한국 통신학회 논문지 제20 권, 제11호, pp2991-3000, 1995.  
 [12] 배영철, 고재호, 임화영 "Bonhoeffer-Van der Pol 오실레이터 모델에서의 미소 파라미터 섭동에 의한 카오스 제어", 1995 대한 전기학회 하계 학술 대회 논문집 B, pp 817-819, 1995.



**배 영 철**

1962년 5월 15일생  
1984년 광운대학교 전기공학과  
졸업(학사)  
1986년 광운대학교 대학원 전기  
공학과(공학석사)  
1992년~현재 광운대학교 대학  
원 전기공학과 박  
사과정

관심분야: Chaos Control, Chaos Synchronization,  
Nonlinear Dynamics



**서 삼 문**

1995년 광운대학교 제어계측공  
학과 졸업(학사)  
1995년~현재 광운대학교 대학  
원 제어계측공학  
과 석사과정

관심분야: 비선형 제어, Neural  
Network, 디지털 제어



**임 화 영**

1973년 한양대학교 전기공학과  
졸업(학사)  
1976년 한양대학교 대학원 전기  
공학과(공학석사)  
1984년 한양대학교 대학원 전기  
공학과(공학박사)  
1976년~1982년 한국 전력 연구  
원 계통 연구실

1983년~1987년 광운대학교 전기공학과 교수  
1988년~현재 광운대학교 제어계측공학과 교수  
관심분야: 디지털 제어, 전력 제어, 비선형 제어