

〈논 문〉

원관내 왕복유동에서 비정상 열전달 관계식의 공식화

박상진* · 이대영** · 강병하** · 노승탁***

(1995년 10월 19일 접수)

A New Formulation for Unsteady Heat Transfer of Oscillatory Flow in a Circular Tube

S. -J. Park, D. -Y. Lee, B. H. Kang and S. T. Ro

Key Words : Oscillatory Flow(왕복유동), Unsteady Heat Transfer(비정상 열전달), Complex Nusselt Number (복소 누셀수), Non-Linear Wall Temperature Distribution (비선형 벽온도분포), Thermal Boundary Layer (열경계층)

Abstract

Heat Transfer with periodic fluctuation of fluid temperature caused by oscillatory flow or compression/expansion can be out of phase with bulk fluid-wall temperature difference. Newton's law of convection is inadequate to describe this phenomenon. In order to solve this problem, the concept of the complex Nusselt number has been introduced by several researchers. The complex Nusselt number expresses out of phase excellently while the first harmonic is dominant in the variations of both fluid-wall temperature difference and heat flux. However, in the case of oscillatory flow with non-linear wall temperature distribution, the complex Nusselt number is not appropriate to predict the heat transfer phenomena since the higher order harmonic components appear in periodic temperature variation. Analytic solutions to the heat transfer with an sinusoidal wall temperature distribution were obtained to investigate the effect of non-linear wall temperature distribution. A new formula considering the thermal boundary layer was suggested based on the solutions. A comparison was also made with the complex Nusselt number. It was verified that the new formula describes well the heat transfer of oscillating flow even if the first harmonic component is not dominant in the fluid wall temperature difference.

기 호 설 명

A	: 경계층의 단면적 (m^2)	i	: $\sqrt{-1}$
$C_{n,k}$: 식 (7)로 정의되는 λ 의 함수	L_s	: 유체의 왕복유동 거리 (m)
c_p	: 정압비열 ($J/kg^{\circ}C$)	L_w	: 벽온도분포의 축방향 특성길이 (m)
e	: 오차의 제곱	Nu	: 반경을 특성길이로 한 Nusselt 수
E	: 상대오차 (%)	Nu_c	: 복소 Nusselt 수
gk	: 식 (8)로 정의되는 온도분포 함수	Nu_n	: n 차 조화성분의 복소 Nusselt 수
		Pr	: Prandtl 수, $Pr=n/k$
		q	: 무차원 벽면열유속, $q = \partial\theta/\partial\eta/\eta=1$
		R	: 원관의 반지름 (m)
		r	: 반경방향좌표 (m)

*회원, 한국기계연구원 산업설비연구부

**회원, 한국과학기술연구원 기전연구부

***회원, 서울대학교 기계공학과

T	: 온도 (°C)
T_a	: 벽온도분포의 진폭 (°C)
t	: 시간 (s)
U	: 유속 (m/s)
U^+	: 무차원속도, $U^+ = U/ U $
x	: 무차원 길이방향 좌표, (m)
z	: 길이방향 좌표 (m)

그리스문자

α	: Womersley 수, $\alpha = R\sqrt{\omega/\nu}$
β	: 수정 Womersley 수, $\beta = R\sqrt{\omega/k}$
$\Delta\theta$: 벽온도와의 차
δ	: 열경계층의 두께 (m)
ε	: 적분평균오차
k	: 열확산계수 (m ² /s)
λ	: 무차원 왕복유동거리, $\lambda = (\pi L_s)/(2L_w)$
ν	: 동점성계수 (m ² /s)
θ	: 무차원온도, $\theta = T/T_a$
ρ	: 밀도 (kg/m ³)
τ	: 무차원시간
ω	: 왕복유동 각속도 (rad/s)

하첨자

BL	: 경계층내의 평균값
i	: 허수부
n	: 시간에 대한 n 번째 조화성분
r	: 실수부
w	: 벽

Real[z] : 복소수 z 의 실수부

Imag[z] : 복소수 z 의 허수부

$\langle \rangle$: 단면평균, $\langle g \rangle = 2 \int_0^1 g \eta d\eta$.

1. 서 론

주기적으로 온도가 변동하는 유체에 의한 대류 열전달은 맥동 및 왕복유동이나 유체의 압축/팽창이 있는 경우에 빈번하게 나타나는 현상이다. 최근 에너지의 효율적인 이용과 환경문제로 인하여 스테링 사이클을 이용한 기관이나 냉동기, 그리고 이와 유사한 VM(Vuilleumier) 열펌프에 대한 관심이 고조되면서 이 분야에 대한 연구가 활기를 띠고 있

다.^(1,2) 이러한 기기들은 작동유체가 열교환기내를 왕복하면서 외부와 열교환을 하는 외연기관의 형태를 취하고 있고, 열교환기의 체적은 전체성능을 떨어뜨리는 사체적으로 작용하기 때문에 체적이 작으면서도 열교환 성능이 좋은 열교환기를 설계하는 것이 전체 성능과 효율을 높이는 관건이 된다. 따라서 왕복유동에 의한 열전달에 대한 연구가 설계자료로 시급히 요구되고 있는 실정이다. 또한 작동유체가 한번 왕복하면서 한 사이클을 이루게 되므로, 기관과 냉동기의 성능해석을 위해서는 주기 평균한 값뿐만 아니라 한 주기 동안 변화하는 과정에 대한 정보가 필요하다. 특히, 열교환기내에서 비정상(unsteady) 열전달 거동에 대한 고찰은 매과정마다의 열출입량과 일을 예측하는데 매우 중요한 선결 문제이다. 또한 실린더의 셔틀손실(shuttle loss)과 가스 스프링의 이력손실(hysteresis loss)을 해석하는 데도 유체의 주기적 온도변화가 수반된 열전달현상의 이해가 매우 중요하다.

일반적으로 대류열전달의 열유속을 예측할 때 많이 사용되는 것이 Newton의 냉각법칙이다. Newton의 냉각법칙은 고체표면에서의 열전달량이 벽면온도와 유체의 평균온도차에 비례한다고 가정 한 것인데, 이 이론은 일방향 유동의 경우에는 벽면에서의 온도기울기가 평균온도차와 밀접한 관계가 있으므로 열유속을 합리적으로 표현할 수 있다. 그러나 온도가 주기적으로 변화하는 유체에 의한 대류 열전달의 경우에는, 벽면 근처에 형성되는 열경계층의 존재로 인하여, 한주기동안 변동하는 벽면에서의 열유속과 평균온도차간에 시간에 대한 위상차가 발생하게 된다. 따라서 Newton의 냉각법칙이 순간 열유속을 제대로 나타낼 수 없다. 그러나 이를 대체할 만한 다른 간단한 열전달 관계식이 없고 공학적인 편의성 때문에 왕복유동이 수반된 문제에서도 준정상상태 가정을 도입하여 Newton의 냉각법칙을 사용하고 있는 실정이다.

주기적 온도변화가 수반된 열전달 현상을 보다 잘 묘사하기 위한 시도는 실린더 내부의 열전달에 대한 연구에서 출발하였다. Pfriem⁽³⁾은 실린더 내부의 압축, 팽창에 의한 열전달을 내부대류를 무시한 일차원 에너지방정식을 해석하여, 변동주파수가 커질 때 열유속과 평균온도차간에 위상차가 존재함을 보이고, 해결 방안으로 복소 열전달계수의 개념을 도입하였다. 여기서, 복소 열전달계수는 주기적인 문제의 해석에서 온도장을 주로 복소수로 처리

하므로 위상차를 보상해 주는 역할을 한다. 즉 열유속이 평균온도차에 비례하는 항과 유체온도의 시간변화율에 비례하는 항으로 표현될 수 있는데, 복소 열전달계수의 허수부가 바로 두번째 항의 비례계수가 된다. Overbye 등⁽⁴⁾은 열전대로 실린더 표면의 열유속을 측정하여 Pfriem의 결과를 실험적으로 입증하고 Newton의 냉각법칙이 더 이상 유용하지 않음을 보였다. Annand와 Pinfold⁽⁵⁾는 역시 실린더 벽면의 열유속 측정을 통하여 일반적인 열전달계수에 온도변화율을 고려한 실험식을 발표하였다. Lee⁽⁶⁾는 가스 스프링의 이력손실을 예측하기 위하여 Pfriem의 연구와 유사한 해석을 수행하여 복소 열전달계수를 구하였다. 또한 Kornhauser와 Smith⁽⁷⁾는 압축, 팽창하는 실린더내의 복소 열전달계수를 실험을 통하여 구하였다.

한편, 복소 열전달계수의 개념을 왕복유동에 적용하여 비정상 열전달현상의 묘사를 시도한 연구도 이루어졌는데, Gedeon⁽⁸⁾은 축방향 벽온도 기울기가 일정한 무한평판 사이의 왕복유동에 의한 열전달에서 복소 열전달계수를 구하였다. Kornhauser와 Smith⁽⁹⁾는 압력 및 유동이 진동하는 가스 스프링의 이력손실을 측정하고, 복소 열전달계수가 실린더내의 열전달을 잘 묘사함을 확인하였다.

앞서 언급한 연구들은 대부분 압축/팽창에 의하여 유체의 온도가 변동하는 경우이고, 순수하게 왕복유동에 의한 경우에도 벽면의 경계조건이 등온이거나 벽면의 길이방향 온도기울기가 일정한 선형적 경계조건에 경우에 한정되어 있는데, 이러한 경우에는 평균온도차와 열유속의 주기적 변화에 1차 조화성분만이 주로 나타나기 때문에, 복소 열전달계수를 도입하여 위상차를 보상해주면 열전달현상을 설명할 수 있다. 그러나 스테링 기기의 열교환기와 같이 축방향 온도구배가 선형이 아닐 때는 온도변화에 고차 조화성분들이 나타나 그 현상이 더욱 복잡해진다.

본 연구에서는 길이방향의 벽온도분포가 비선형일 때에도 적용할 수 있는 일반적인 열전달 관계식을 구하기 위하여, 저자들 (Lee 등⁽¹⁰⁾)에 의하여 발표된 벽면의 온도가 길이방향으로 주기적인 정현파형태로 분포된 원관내의 층류 왕복유동에 대한 해석해를 이용하여, 왕복유동에 의하여 나타나는 열전달 특성을 살펴본 다음, 기존의 복소 열전달계수를 이 경우에 확장 적용하여 적용가능성을 고찰하였다. 그리고 간단한 형태로 열유속을 예측할 수

있는, 벽면 근처의 경계층을 고려한 새로운 관계식을 제시하였다.

2. 벽온도가 정현파로 분포한 경우의 해석해

2.1 해석

본 연구에서 이용한 해석결과는 Fig. 1과 같이 무한히 긴 원관의 벽면온도(T_w)가 길이방향으로 정현파의 형태로 분포되어 있고 내부의 작동유체가 층류 왕복유동을 형성하여 벽면과 열전달을 하는 경우에 대한 것이다. 이때, 벽면의 온도는 벽의 열용량이 유체의 열용량에 비하여 매우 커서 시간에 대하여 일정하고, 유동은 반경방향에 대하여 일정한, 시간에 대한 1차원 유동(slug flow)으로 가정하였다. 그리고 원관의 반경에 비하여 벽온도분포의 특성길이(L_w)가 매우 커 축방향 전도는 무시할 수 있다고 가정하고 유체의 물성치가 일정하다고 하면, 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial z} = K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

$$T|_{r=R} = T_a \sin(2\pi z/L_w) \tag{1}$$

여기서, R 은 원관의 반지름이고, L_w 는 벽온도분포의 축방향의 특성길이이다. 유체의 속도는 다음과 같이 주어진다.

$$U = \frac{L_s \omega}{2} \cos \omega t \tag{2}$$

여기서, L_s 는 유체입자의 왕복거리이다. 다음의 식 (3)의 무차원변수를 도입하여 지배방정식을 무차원화하면 식 (4)와 같이 된다.

$$\theta = \frac{T}{T_a}, \quad \tau = \omega t, \quad x = 2\pi \frac{z}{L_w}, \quad \eta = \frac{r}{R} \tag{3}$$

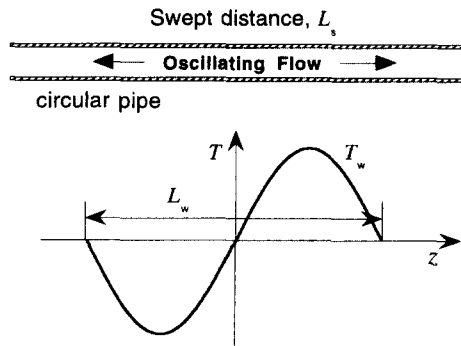


Fig. 1 The analysis model of Lee et al⁽¹⁰⁾

$$\beta^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + 2\beta^2 \lambda \cos \tau \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \theta|_{\eta=1} \equiv \theta_w = \sin x \quad (4)$$

위에서 β 와 λ 는 각각 아래의 식과 같이 정의된 무차원수이다.

$$\beta = R \sqrt{\frac{\omega}{k}}, \quad \lambda = \frac{\pi L_s}{2L_w} \quad (5)$$

수정 Womersley 수 β 는 왕복각속도를 무차원화 한 수로 Stokes의 열경계층 두께에 대한 반경의 비로서 $\alpha \sqrt{Pr}$ (α : Womersley 수)와 같으며, 무차원 왕복유동거리 λ 는 벽온도분포의 특성길이에 대한 왕복거리의 비를 의미한다. 개념적으로 β 와 λ 는 각각 왕복유동의 두 가지 주요인자인 왕복주파수와 왕복유동거리에 해당하는 무차원수이다.

위의 식 (4)를 좌표변환 (coordinate transform)⁽¹⁰⁾을 이용하여 풀면, 식 (6)과 같은 복소수 형태의 해를 얻을 수 있다.

$$\theta = \sin x + \text{Real} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} g_k \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} g_k e^{2nit} \sin x + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} g_k e^{(2n-1)it} \cos x \right\} \right] \quad (6)$$

위에서 $C_{n,k}$ 와 g_k 는 각각 다음과 같다.

$$C_{n,k} \equiv (-1)^{k+1} 2J_k(2\lambda) J_{n-k}(2\lambda) \quad (7)$$

$$g_k \equiv 1 - \frac{I_0(\beta \sqrt{ik\eta})}{I_0(\beta \sqrt{ik})} \quad (8)$$

여기서, J 는 제1종 Bessel함수이고, I 는 수정된 제1종 Bessel함수이다.

무차원 단면평균 유체온도, $\langle \theta \rangle$ 와 벽면에서의 무차원 열유속, q 는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\langle \theta \rangle = \sin x + \text{Real} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} \langle g_k \rangle \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} \langle g_k \rangle e^{2nit} \sin x + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} \langle g_k \rangle e^{(2n-1)it} \cos x \right\} \right] \quad (9)$$

$$q = \text{Real} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} g'_k \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} g'_k e^{2nit} \sin x + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} g'_k e^{(2n-1)it} \cos x \right\} \right] \quad (10)$$

위 식에서 $\langle g_k \rangle$ 와 g'_k 는 각각 g_k 의 단면평균과

벽면에서의 기울기를 나타낸다.

$$\langle g_k \rangle = 1 - \frac{2}{\beta \sqrt{ik}} \frac{I_1(\beta \sqrt{ik})}{I_0(\beta \sqrt{ik})}$$

$$g'_k = -\beta \sqrt{ik} \frac{I_1(\beta \sqrt{ik})}{I_0(\beta \sqrt{ik})} \quad (11)$$

또, 무차원화된 벽면온도와 유체의 단면 평균온도의 차는 다음과 같다.

$$\langle \Delta \theta \rangle = -\text{Real} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} \langle g_k \rangle \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} \langle g_k \rangle e^{2nit} \sin x + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} \langle g_k \rangle e^{(2n-1)it} \cos x \right\} \right] \quad (12)$$

2.2 비정상 열전달 특성

왕복유동에 있어서의 열전달은 β 와 λ 의 지배를 받게 되는데, 그 특성에 따라 Fig. 2에 도시한 바와 같이 세 영역으로 나눌 수 있다.⁽¹⁰⁾ 각 영역을 대표하는 β 와 λ 를 택하여 각각의 경우에 $x=0$ 에서의 무차원화된 평균온도차와 열유속의 한주기동안의 변화를 식 (10)과 식 (12)로부터 계산하여 Fig. 3에 각각 나타내었다.

먼저, 영역 I에서는 대류항과 전도항이 균형을 이루므로, Fig. 3(a)에서와 같이 일반적인 일방향 유동과 마찬가지로 열유속과 평균온도차의 시간에 대한 변화에 위상차가 없고 열유속이 평균온도차에 바로 비례한다. 이때, 반경방향의 온도분포는 포물선 형태를 유지하고 준정상상태의 도입이 가능하다.

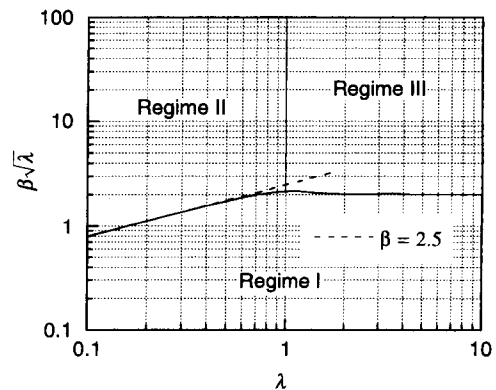


Fig. 2 Characteristic map of the heat transfer by oscillating flow in a circular tube subject to a sinusoidal wall temperature distribution

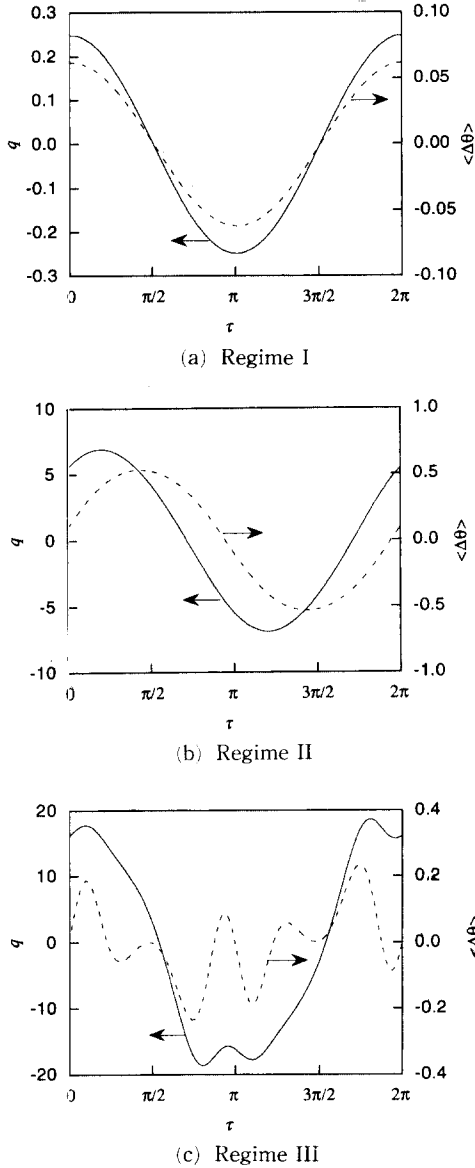


Fig. 3 Variations of normalized heat flux and averaged-temperature difference in a typical case of each regime

한편, 영역 II에서는 비정상항과 대류항이 균형을 이루는 데, 반경방향 온도분포는 포물선 형태에서 벗어나 벽면 근처에 형성되는 열경계층내의 온도변화가 관 중심부보다 위상이 앞서게 된다. 따라서 그림에 나타난 것과 같이 열유속과 평균온도차 사이에, 단순 압축/팽창하는 경우나 길이방향 벽온도 기울기가 일정한 경우처럼 $\pi/4$ 의 위상차가 생

기지만 왕복거리가 벽온도분포의 특성길이에 비하여 짧은 경우이므로 시간에 대한 변화에 있어서 1차 조화 성분이 고차성분에 비해 매우 큰 것을 볼 수 있다.

또, 영역 III에서의 전체적인 특성은 영역 II와 유사하지만 왕복유동거리가 벽면온도분포의 특성길이 보다 길어짐에 따라 온도장의 시간에 대한 변화에 고차 조화성분이 나타나게 된다. 그러나 주목할 것은 영역 III의 경우에도 열유속의 변동은 평균온도와는 달리 여전히 1차 조화성분이 주요하다는 사실이다. 이는 열유속에 직접적인 영향을 끼치는 벽면 근처의 특성이 관 중심부의 특성과는 본질적으로 다르다는 것을 의미한다.

따라서, 영역 I의 경우에는 일반적인 Newton의 냉각법칙이 적용 가능하고, 영역 II에서는 위상차만 보상하여 주면 순간 열유속의 예측이 가능하지만, 영역 III에서는 단순한 위상차의 보상만으로는 열전달 현상을 정확하게 나타내기 어렵다는 것을 알 수 있다.

3. 복소 열전달계수의 적용

앞서 언급한 바와 같이 축방향 온도기울기가 일정 때나 유체가 단순히 압축/팽창을 받는 경우에는 한주기동안의 온도변화와 열유속이 1차 조화성분만으로 이루어진 정현파의 형태로 나타나게 된다. 이때 벽과 유체의 무차원 단면 평균온도차와 열유속은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\langle \Delta \theta \rangle = \text{Real}[\phi e^{i\tau}] \quad (14)$$

$$q = \text{Real}[\psi e^{i\tau}] \quad (15)$$

여기서 ϕ 와 ψ 는 각기 다른 위상을 가지는 복소수이다. 복소 Nusselt 수 Nu_c 식 (16)과 같이 정의하면, 무차원 열유속은 다음의 식 (17)로 나타낼 수 있다.

$$Nu_c = \psi / \phi \quad (16)$$

$$\begin{aligned} q &= \text{Real}[Nu_c(\phi e^{i\tau})] \\ &= \text{Real}[Nu_c] \cdot \text{Real}[\phi e^{i\tau}] - \text{Imag}[Nu_c] \cdot \text{Imag}[\phi e^{i\tau}] \\ &= \text{Real}[Nu_c] \cdot \langle \Delta \theta \rangle - \text{Imag}[Nu_c] \cdot \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)에 나타난 바와 같이, Nu_c 의 허수부는 온도 변화율의 비례계수가 되고 평균온도차와 열유속의 위상차를 보상해 주는 역할을 하므로 관계식

(17)은 단순진동하는 온도장에 의하여 발생된 열유속을 정확하게 나타낼 수 있다.

한편, 벽면온도의 축방향 분포가 비선형이면 유체의 단면평균온도와 벽면에서의 열유속의 변동에 고차 조화성분이 나타난다. 이 경우에 무차원 평균 온도차와 열유속은 아래의 식 (18), (19)와 같이 여러 조화성분이 중첩된 형태로 나타낼 수 있다.

$$\langle \Delta\theta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Real}[\phi_n e^{in\tau}] \quad (18)$$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Real}[\psi_n e^{in\tau}] \quad (19)$$

복소 열전달계수, Nu_c 를 고차 조화성분으로 확장하면, q 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$q = \text{Real}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \{Nu_n \phi_n e^{in\tau}\}\right] \quad (20)$$

$$Nu_n \equiv \psi_n / \phi_n \quad (21)$$

여기서, n 차 조화성분의 복소 Nusselt 수 Nu_n 은 식 (21)과 같이 무차원화된 n 차 조화성분의 열유속과 평균온도차의 진폭의 비로서 정의되고, 식 (10)과 식 (12)를 이용하면 쉽게 구할 수 있는 값이다. 확장된 복소 Nusselt 수를 이용하면, 온도장에 고차조화성분이 나타나는 경우에도 열유속을 평균온도차로 정확하게 묘사할 수 있다. 그러나 정확한 예측을 위하여서는 모든 조화성분의 정보를 알아야 하고, 만일 N 차 조화성분까지 고려하더라도 $2N+1$ 개의 열전달계수를 구하여야 하므로 관계식 (20)은 실제 응용면에서 한계를 가지고 있다.

실질적 이용이 가능한, 보다 간단한 형태의 관계식을 구하기 위해, Nu_n 이 조화차수 n 에 관계없이 일정하다고 가정하면 식 (20)은 일반적인 복소 Nusselt 수를 도입하였을 때와 같이 식 (22)로 근사적으로 변환될 수 있다.

$$q \approx Nu_r \cdot \langle \Delta\theta \rangle = Nu_r \cdot \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \tau} \quad (22)$$

Nu_r 과 Nu_i 는 복소 Nusselt 수의 실수부와 허수부에 해당하는 값이다.

관계식 (22)가 효과적으로 왕복유동에서의 열전달을 표현할 수 있는지를 알아보기 위하여, 2절에서 구한 해석해를 이용하여 다음과 같은 방법으로 복소 열전달계수를 구하고, 이를 다시 관계식 (22)에 대입하여 식 (10)의 이론해와 비교하였다.

오차를 최소화하면서 열전달량을 예측할 수 있는 Nu_r 과 Nu_i 를 구하기 위하여, 열전달 관계식으로

예측한 열전달량과 실제 열전달량간의 오차 ϵ 를 정량화하였다.

$$\epsilon \equiv (q^* - q)^2 \quad (23)$$

여기서, q^* 는 Lee 등⁽¹⁰⁾의 해석해로 구한 실제 열유속이고 q 는 식 (22)와 같은 열전달 관계식으로부터 구한 열유속이다. ϵ 는 시간과 축방향위치의 함수이므로 시간과 공간에 대하여 각각 한주기 동안 적분평균을 취한다.

$$\epsilon \equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \epsilon dx \right) d\tau \quad (24)$$

그리고 상대오차 E 는 다음과 같이 정의한다.

$$E[\%] \equiv \epsilon / \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} q^{*2} dx \right) d\tau \right) \times 100 \quad (25)$$

식 (10)과 (12)를 위의 식 (22)~(24)에 대입하면 평균오차 ϵ 을 구할 수 있다. 이때 표현의 간략화를 위하여 복소변수를 다음과 같이 나타내었다.

$$\phi_n \equiv |\phi_n| e^{isn}, \quad \psi_n \equiv |\psi_n| e^{ien} \quad (26)$$

평균오차 ϵ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\epsilon = \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \quad (27)$$

$$\begin{cases} A_0 \equiv |\psi_0| \cos \xi_0 - Nu_r |\phi_0| \cos \zeta_0 \\ A_n \equiv |\psi_n| \cos \xi_n - Nu_r |\phi_n| \cos \zeta_n \\ \quad + n Nu_i |\phi_n| \sin \zeta_n \\ B_n \equiv |\psi_n| \sin \xi_n - Nu_r |\phi_n| \sin \zeta_n \\ \quad - n Nu_i |\phi_n| \cos \zeta_n \end{cases}$$

ϵ 이 최소가 되도록 하는 식 (28)의 두 조건식에 대입하면 Nu_r 과 Nu_i 를 β 와 λ 의 함수로 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial Nu_r} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial Nu_i} = 0 \quad (28)$$

$$Nu_r = \frac{2|\psi_0| |\phi_0| \cos \xi_0 \cos \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n| |\phi_n| \sin(\xi_n + \zeta_n)}{2|\phi_0|^2 \cos^2 \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|^2} \quad (29a)$$

$$Nu_i = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n |\psi_n| |\phi_n| \sin(\xi_n - \zeta_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} n |\phi_n|^2} \quad (29b)$$

Fig. 4에 복소 Nusselt 수의 실수부 Nu_r 과 허수부 Nu_i 를 $\beta - \lambda$ 평면에 각기 도시하였다. 영역 I에서는 Nu_r 은 β 와 λ 에 관계 없이 일정한 값($Nu_r \approx 4$)을 가지고 Nu_i 는 0으로 수렴하는데, 이는 단

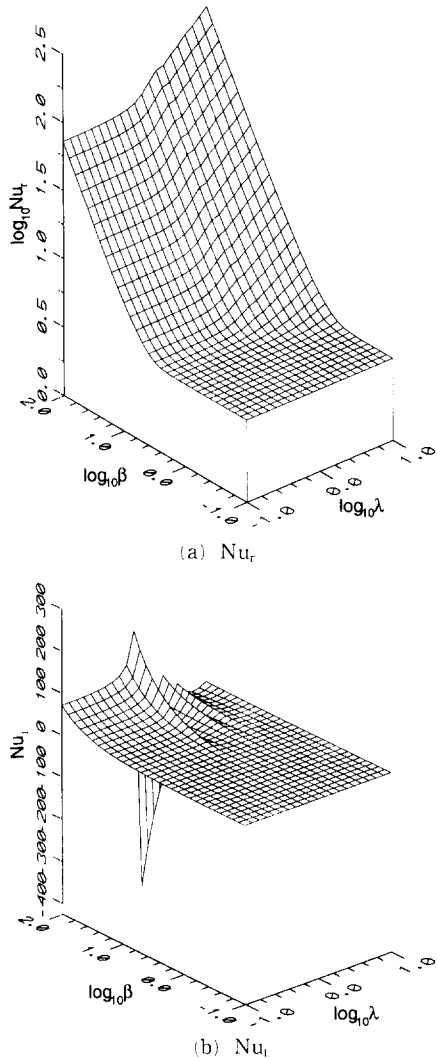


Fig. 4 Real and imaginary parts of the complex Nusselt number

면평균온도차와 열유속간에 위상차 없이 열유속이 온도차에 비례하기 때문이다. 영역 II에서는 열유속과 온도차가 $\pi/4$ 의 위상차를 가지므로 Nu_r 과 Nu_i 가 비슷한 크기의 값을 가지고 모두 λ 에 관계없이 β 에 비례한다. 이러한 현상은 Gedeon⁽⁸⁾과 Kornhauser와 Smith^(7,9) 등의 연구결과와 일치하는 것으로 단순 조화성분이 주로 나타나는 영역 I과 II의 경우에는 왕복유동에서 벽온도의 분포가 선형일 때나 압축/팽창을 받는 공간내의 열전달과 거의 비슷한 특성을 보인다. 영역 III에서는 앞절에서 언급한 바와 같이, 단순 1차 조화성분 외에 고차성

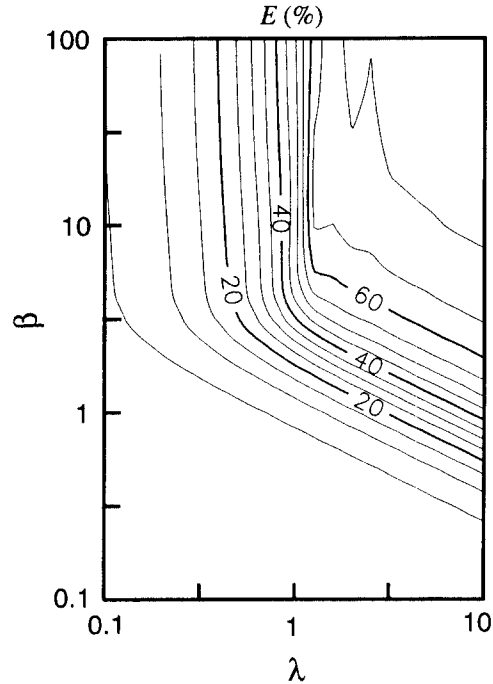


Fig. 5 Contours of the relative error of the formula using the complex Nusselt number

분들이 나타나, 위상차의 보정이 의미가 없기 때문에 Nu_r 은 $\beta\sqrt{\lambda}$ 에 비례하여 증가하지만 Nu_i 는 λ 에 대하여 진동하면서 0으로 수렴한다. 이는 실제 현상을 반영한 것이 아니라 복소 Nusselt 수가 가지는 한계 때문이다.

복소 Nusselt 수를 도입한 열전달 관계식 (22)가 얼마나 실제 열전달현상을 잘 묘사하는가를 정량적으로 나타내기 위하여, Fig. 5에 관계식 (22)의 상대오차를 식 (25)로 계산하여 $\beta-\lambda$ 평면에 도시하였다. 그림에 나타난 바와 같이 β 가 작은 영역 I의 경우에는 열전달 현상을 거의 정확하게 묘사하고, β 가 크고 λ 가 작은 영역 II의 경우도 대략적인 예측이 가능하지만, β 와 λ 가 모두 큰 영역 III에서 상대오차가 매우 커져서 복소 Nusselt 수가 비선형적인 벽온도분포의 경우에는 열유속을 예측하는데 적합하지 않음을 확인할 수 있다.

4. 열경계층내의 대류를 고려한 관계식

왕복유동에서 왕복주파수가 빨라지게 되면, Stokes 경계층과 같은, 벽면의 영향을 직접적으로

받는 유동 및 열경계층의 두께가 반경보다 작아지게 된다. Fig. 2에서 영역 I과 영역 II, III의 경계선이 바로 열경계층의 두께가 반경보다 작아지기 시작하는 점들이다. 이 경계선 아래의 영역(영역 I)에서는 벽면의 열경계조건이 영항이 원관의 단면 전체에 직접적으로 전파되므로 반경방향 온도분포가 포물선형태를 유지하면서 진동하지만, 경계선 위의 영역(영역 II와 III)에서는, 벽의 영항이 직접적으로 전파되는 영역이 벽면 근처로 국한되어 관 중심부로 인접한 벽온도의 영항이 전파되지 않기 때문에, 반경방향 온도분포가 포물선 형태가 되지 못하고 경계층과 코어(core)에서의 온도가 서로 시간에 대한 위상차를 가지고 변동하게 된다. 단면 평균 온도차와 벽면에서의 열유속간에 위상차가 발생하는 것도 이 때문이다. 벽과 유체간의 열전달은 벽면에 접한 경계층의 내부에서 일어나므로, 벽면에서의 열유속은 관내부 전체가 아닌 경계층내의 상태에 의하여 지배를 받게 된다. 따라서 경계층 내부의 열전달을 고려하여야만 전체적인 열전달 현상을 제대로 설명할 수 있다.

열경계층은 물리적으로 벽의 열적 영항이 직접적으로 미치는 곳을 뜻하는데, 열경계층의 두께 δ 는 물리적으로 특성시간 동안 벽의 영항이 확산되는 거리를 의미한다. 열확산속도는 각 영역에 관계없이 열확산계수 k 로 일정하므로 특성시간만 주어지면 각 영역에서의 δ 의 거동을 알 수 있다. 각 영역에서의 특성시간과 δ 의 특성을 아래의 Table 1에 정리하였다. 영역 I과 II에서는 δ 가 λ 에 상관없이 β 에 의하여 결정되지만, 영역 III에서는 왕복거리가 벽온도 분포주기보다 길기 때문에 인접한 벽온도 분포주기의 영항이 나타나므로 특성시간이 $1/\omega$ 가 아닌 $1/(\lambda\omega)$ 가 되고 따라서 δ 가 λ 의 영항을 받게 된다. 표에 나타난 바와 같이 δ 가 β^{-1} 에 비례하므로 β 가 매우 커지면 열경계층이 반경

보다 얇아진다.

반경방향 특성길이를 반경 R 이 아닌 열경계층의 두께 δ 로 하여 식 (1)의 지배방정식에 대하여 스케일 해석을 수행하면, 비록 비정상항과 대류항이 균형을 이루는 영역(영역 II과 III)에 있더라도 $R \gg \delta$ 이므로, 열경계층 내부에서는 식 (30)의 전도항이 다른 항과 동일한 크기를 갖는다는 것을 알 수 있다.

$$\beta^2 \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2\beta^2 \lambda \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \cos r \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\eta^+} \frac{\partial}{\partial \eta^+} \left(\eta^+ \frac{\partial \theta}{\partial \eta^+} \right) \quad (30)$$

따라서, 경계층 내부에서는 전도의 영항으로 반경방향 온도분포가 포물선의 형태를 가지고 벽면에서의 온도구배와 경계층내의 온도변화간에 위상차가 존재하지 않는다. 또한, 경계층 내부의 유체온도는 인접한 벽의 영항을 바로 받게 되고 유체입자를 따라가는 관점에서 보면 입자가 왕복하면서 경험한 열환경의 변화보다는 현재 인접한 벽온도에 의해 결정된다. 따라서 열전달현상에 중요한 영항을 끼치는 경계층 내부의 대류항은 1차 조화성분이 주로 나타나고, 벽면의 열유속변화도 단면 평균온도에 고차 조화성분이 나타나더라도 1차 조화변동을 하게 된다. 이러한 맥락에서 다음의 식과 같이 경계층 내부의 대류항이 축방향 벽면온도의 구배에 비례한다고 가정할 수 있다.

$$A\rho c_p U_{BL} \frac{\partial T_{BL}}{\partial x} \propto A\rho c_p U \frac{dT_w}{dx} \quad (31)$$

여기서, A 는 경계층의 단면적이다. 유동자체가 위상을 가지고 변동하는 양이므로 단순한 위상차의 보상도 가능하므로 식 (31)을 이용하여 열전달 관계식의 온도변화율에 비례하는 항을 경계층내의 대류항으로 대체하면, 아래의 식 (32)와 같은 새로운 열전달 관계식을 얻을 수 있다.

$$q = Nu_1 \langle \Delta \theta \rangle + Nu_2 \beta^2 \lambda U^+ \frac{d\theta_w}{dx} \quad (32)$$

여기서, Nu_1 과 Nu_2 는 복소 Nusselt 수와는 무관한 값들이고, U^+ 는 식 (2)의 유속을 속도의 진폭으로 무차원화한 값으로 속도의 위상변화를 의미한다. 따라서 유속의 위상을 알고 평균온도와 벽면온도의 길이방향 구배를 알면 열유속을 예측할 수 있다.

3절의 복소 Nusselt 수와 마찬가지로 방법으로 식

Table 1 Behavior of thermal boundary layer thickness in each regime

Regime	Time scale	Boundary layer thickness
Regime I	$1/\omega$	$\delta/R \approx \sqrt{k/\omega}/R = \beta^{-1} \Rightarrow \delta = R$
Regime II	$1/\omega$	$\delta/R \approx \sqrt{k/\omega}/R = \beta^{-1} \Rightarrow \delta \ll R$
Regime III	$1/\lambda\omega$	$\delta/R \approx \sqrt{k/\lambda\omega}/R = (\beta\lambda^{1/2})^{-1} \Rightarrow \delta \ll R$

(10)과 식 (12)의 결과를 이용하면 오차를 최소화 하는 Nu_1 과 Nu_2 를 β 와 λ 의 함수로서 구할 수 있다. 평균오차 ϵ 는

$$\epsilon = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2) + \frac{1}{4}Nu_2^2\beta^4\lambda^2 - \frac{1}{2}Nu_2\beta^2\lambda A_1 \quad (33)$$

$$A_n = |\Psi_n|\cos\xi_n - Nu_1|\phi_n|\cos\xi_n$$

$$B_n = |\Psi_n|\sin\xi_n - Nu_1|\phi_n|\sin\xi_n$$

이고, 식 (28)과 같은 조건식에 대입하면, Nu_1 과 Nu_2 에 대한 연립 방정식을 얻을 수 있다.

$$Nu_1\left(2|\phi_0|^2\cos^2\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|^2\right) + Nu_2\beta^2\lambda|\phi_1|\cos\xi_1 = 2|\Psi_0|\phi_0|\cos\xi_0\cos\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_n|\phi_n|\cos(\xi_n - \xi_n) \quad (34a)$$

$$Nu_1|\phi_1|\cos\xi_1 + Nu_2\beta^2\lambda = |\Psi_1|\cos\xi_1 \quad (34b)$$

위의 연립 방정식의 해를 구하여 Fig. 6에 나타내었다. Nu_1 은 앞서 구한 복소 Nusselt 수의 실수부 Nu_1 과 비슷한 양상을 보이는데, 영역 I에서는 일정한 값($Nu_1 \approx 3$)을 가지고 영역 II에서는 λ 에 관계 없이 β 에 비례한다. 그리고 영역 III의 경우에는 $\beta\sqrt{\lambda}$ 에 의하여 Nu_1 이 결정된다. 영역 I에서의 값이 Nu_1 과 달리 4가 아니고 3인 것은 이 영역에서, 2.2절에서 살펴본 바와 같이, 열유속과 평균 온도차의 변화가 서로 위상차가 없으므로 복소 열전달계수를 도입한 관계식 (22)의 두번째 항이 거의 0이 되지만 관계식 (32)의 둘째항은 유속이 열유속의 변화와 같은 위상을 가지므로 유한한 값을 가지기 때문이다.

식 (29)에서 보듯이 Nu_2 는 결국 경계층이 차지하는 단면적을 나타내므로 경계층의 두께 δ 와 비슷한 행태를 보이는데, Table 1에 나타낸 바와 같이, δ 가 반경과 같은 영역 I의 경우에는 Nu_2 가 일정한 값을 가지고, 영역 II에서는 β^{-1} 에 비례하고, 영역 III에서는 경계층 두께가 $(\beta\lambda^{1/2})^{-1}$ 에 비례하므로 Nu_2 역시 $(\beta\lambda^{1/2})^{-1}$ 에 비례한다.

기존의 복소 열전달계수를 이용한 관계식 (22)와 경계층을 고려한 관계식 (32)를 비교하기 위하여 Fig. 3의 세 가지 경우에 대하여 식 (10)의 이론해와 두 가지 관계식으로 예측한 열유속을 비교하여 Fig. 7에 나타내었다. 그림에 나타난 것처럼 영역 I에서는 두 관계식 모두 열유속의 변화를 매

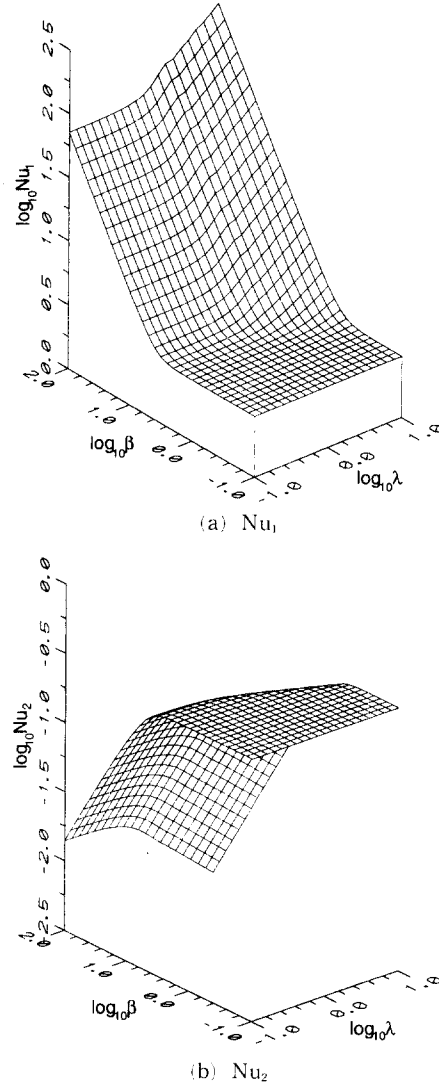
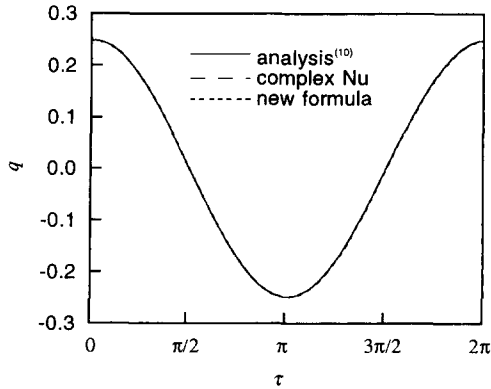
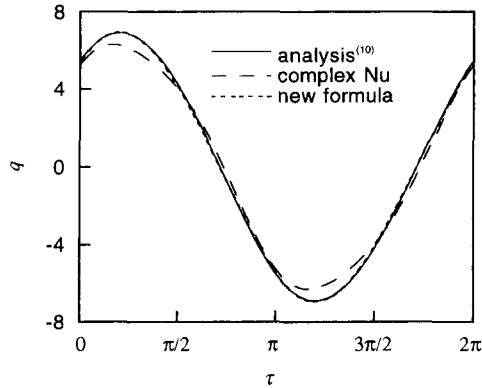


Fig. 6 Coefficients of the new formula considering the convection within thermal boundary layer

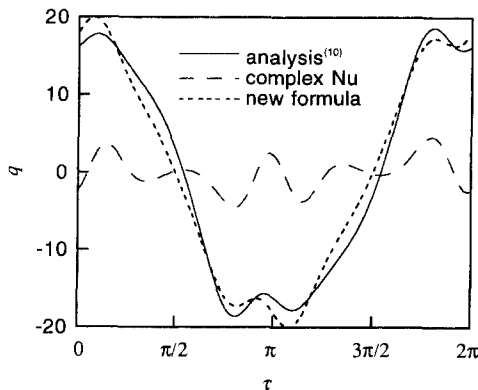
우 잘 예측하고 있다. 또한 영역 II에서도 두 관계식 모두 해석해로 구한 열유속의 변화를 잘 예측하고 있는데, 특히 열경계층을 고려한 관계식 (32)로 예측한 것이 더욱 잘 맞고 있다. 영역 III의 경우에는 복소 열전달계수를 도입한 관계식으로는 열전달현상을 전혀 예측하지 못하지만 경계층을 고려한 관계식은 그런대로 예측이 가능하다. 따라서 본연구에서 새로이 도입한 관계식이 열전달현상을 훨씬 더 잘 반영함을 알 수 있다. Fig. 8에는 관계식 (32)와 이론해로부터 구한 열유속과의 상대오차를



(a) Regime I



(b) Regime II



(c) Regime III

Fig. 7 Comparison of the predictions by two formulae with the analytical result

도시하였다. $\beta-\lambda$ 전 영역에서 상대오차 20% 이하로 열유속의 예측이 가능하였다. 따라서 본 연구에서 도입한 경계층내의 대류항이 벽온도 구배에 비례한다는 가정이 적절하였음을 알 수 있다.

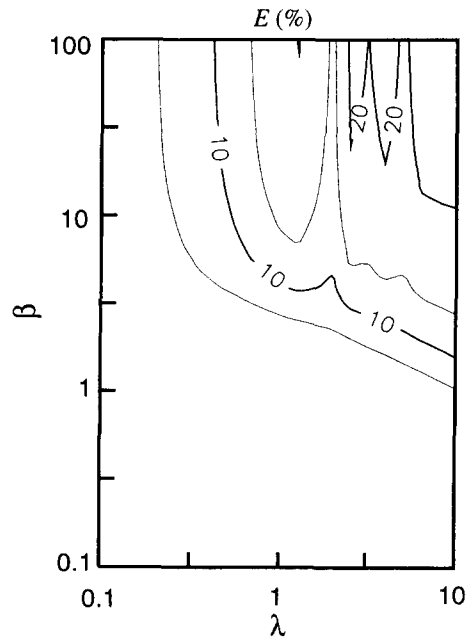


Fig. 8 Contours of the relative error of the new formula considering the thermal boundary layer

이렇게 경계층내의 대류를 고려하면, 열전달 현상을 복잡한 관계식을 사용하지 않더라도 두 개의 항만으로 나타낼 수 있는데, 관계식 (32)를 시간에 대하여 한주기동안 적분을 취하면 두번째 항은 0이 되므로 첫번째 항의 계수 Nu_1 은 주기평균한 열전달량을 대표한다. 실제로 주기평균한 열유속과 온도차로 주기평균 열전달계수 Nu_0 를 정의하면⁽¹⁰⁾ Nu_0 는 Nu_1 과 거의 같은 값을 가짐을 확인할 수 있다.

한편, 일방향유동의 경우에는 β 또는 λ 가 0이므로 관계식 (32)의 두번째 항이 없어져서 일반적인 Newton의 냉각법칙에 따른 관계식과 같은 형태를 가지게 된다. 또한 주기평균한 유속이 유한한 값을 가지는 맥동유동의 경우에도 관계식 (32)를 적용할 수 있다.

열전달 관계식 (32)의 둘째항에서 본연구에서 도입한 벽면온도의 축방향 기울기 대신 시간-단면 평균한 유체온도의 축방향 기울기를 사용하여도, 유체온도의 축방향 기울기가 벽온도 기울기에 비례하기 때문에 유사한 결과를 얻을 수 있으리라 생각된다. 유체온도의 축방향 기울기를 사용한 경우에는 벽면의 경계조건이 등온으로 주어진 경우에 적용할 때 유리하지만, 유체온도의 기울기를 측정하는 것

이 벽온도 기울기에 비해 매우 어렵다는 단점이 있다.

본 연구에서 도입한 관계식을 검정하기 위하여 이용한 이론해석은 균일유동 가정 (slug flow assumption)이 수반되어 유동경계층을 고려하지 못했지만, 균일유동을 Pr이 극단적으로 작은 경우로 생각한다면, 왕복유동에서의 열전달 특성이 β 가 같고 $Pr < 1$ 인 경우 Pr에 대한 변화가 작기 때문⁽¹⁰⁾에 실제상황을 정성적으로 묘사할 수 있다. 물론 실제 상황과는 정량적인 차이가 있겠지만, 본 연구의 목적이 정량적인 열전달계수의 제시에 있는 것이 아니라 왕복유동에 적용할 수 있는 열전달 관계식 형태의 도입에 있기 때문에, 본 연구에서 도입한 관계식은 새로운 방법론으로서 의미가 있다. 또 열경계층이 유동경계층에 비해 두꺼운, Pr이 비교적 작은 유체에 대해서는 본 해석에서 구한 열전달계수의 정량적인 이용이 가능할 것이다. 그리고 비교적 간단한 형태이므로 왕복유동이 나타나는 스팀터링 또는 VM기기의 열교환기 해석 등에 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

5. 결 론

축방향 벽온도분포가 정현파로 분포된 원관내에서 작동유체가 왕복하는 경우에 대한 이론해석을 이용하여 Newton의 냉각법칙이 성립하지 않는 왕복유동에 의한 열전달현상을 묘사할 수 있는 관계식을 구하였고 이 과정에서 다음과 같은 결론을 도출하였다.

왕복유동에 의한 순간 열전달현상은, 왕복유동의 두가지 특성인 왕복주파수와 왕복거리를 나타내는 β 와 λ 에 의하여 결정되고, 그 특성에 따라 세 영역으로 나누어짐을 확인하였다. 영역 I에서는 일방향유동에서와 마찬가지로 열유속이 평균온도차에 비례하고, 영역 II에서는 열유속과 평균온도차간에 약 45°의 위상차가 발생하지만 모두 1차 조화성분이 주로 나타났다. 한편 영역 III의 경우에는 위상차가 생길뿐만 아니라 평균온도차에 고차 조화성분이 나타났다.

기존의 방법인 복소 Nusselt 수를 고차 조화성분까지 확장하면 열유속을 평균온도차로 나타낼 수 있지만 각 조화성분의 정보를 다 알아야하므로 실제 적용이 불가능하였다.

단순히 두 개의 계수로 이루어진 수정된 복소

Nusselt 수를 도입하여 최소 오차자승법으로 복소 Nusselt 수를 구하였다. 영역 I과 영역 II에서는 평균온도차로 열유속의 표현이 가능하지만, 단면평균 유체온도에 고차 조화성분이 나타나는 경우(영역 III)에는 열전달현상을 반영하지 못하였다.

Newton의 냉각법칙에 의한 열전달 관계식에 왕복유동에 의하여 나타나는 열경계층내의 대류를 고려한 항을 부가한 관계식을 제시하였고, 이 관계식은 영역 III을 포함한 전 영역에서 기존의 방법에 비하여 열유속을 잘 예측하였다.

후 기

본 연구는 서울대학교 터보·동력기계연구센터의 지원에 의하여 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) West, C. D., 1986. *Principles and Applications of Stirling Engines*, VNR Company, New York.
- (2) 강병하, 1992, "Vuilleumier 사이클 열펌프, "공기조화·냉동공학회논문집, Vol. 21, No. 1, pp. 19~25.
- (3) Pfriem, H., 1943, "Periodic Heat Transfer at Small Pressure Fluctuations," *NACA TM-1048*.
- (4) Overbye, V. D., Bennethum, J. E., Uyehara, O. A. and Myers, P. S., 1961, "Unsteady Heat Transfer in Engines," *SAE Trans.*, Vol. 69, pp. 461~493.
- (5) Annand, M. J. D. and Pinfold, D., 1980, "Heat Transfer in the Cylinder of a Motored Reciprocating Engines," *SAE paper No. 800457*.
- (6) Lee, K. P., 1983, "A Simplistic Model of Cyclic Heat Transfer Phenomena in Closed Spaces." *Proc. 18th IECEC*, pp. 720~723.
- (7) Kornhauser, A. A. and Smith Jr., J. L., 1994, "Application of a Complex Nusselt Number to Heat Transfer During Compression and Expansion," *ASME Trans. J. Heat Transfer*, Vol. 116, pp. 536~542.
- (8) Gedeon, D., 1986, "Mean-Parameter Modeling of Oscillating Flow," *ASME Trans. J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 513~518.

- (9) Kornhauser, A. A. and Smith Jr., J. L., 1989, "Heat Transfer with Oscillating Pressure and Oscillating Flow," *Proc. 24th IECEC*, pp. 2347~2353.
- (10) Lee, D. -Y., Park, S. -J. and Ro, S. T., 1995, "Heat Transfer by Oscillating Flow in a Circular Pipe with a Sinusoidal Wall Temperature Distribution," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, No. 14, pp. 2529~2537.