

〈논 문〉

## 상계해석법을 이용한 평면변형 열간 판압연공정해석

문영훈\* · 천명식\* · 이준정\*

(1995년 9월 25일 접수)

### Upper Bound Analysis of Plane Strain Hot Strip Rolling Process

Young Hoon Moon, Myeong Sik Chun and Joon Jeong Yi

**Key Words :** Finishing Mill(마무리 압연), Hot Strip Rolling(열간압연), Finite Element Method(유한요소해석), Upper Bound Analysis(상계해석), Kinematically Admissible Velocity Field(동적 가용속도장), Constant Friction Factor(전단마찰계수), Neutral Point(중립점), Pseudo-Independent Parameter(준-독립인자), Rolling Force(압연하중), Forward Slip(선진율)

#### Abstract

An upper bound solution is obtained to perform the process analysis of hot strip rolling process. The material flows within the roll bite at various geometries and frictional conditions are obtained from finite element analysis and the typical flow pattern which is necessary to determine the kinematically admissible velocity field is assumed. From the kinematically admissible velocity field, the upper bound energy is calculated and the rolling load, angle of neutral point and forward slip ratio at various operational conditions are obtained from upper bound energy. The process analyses of above mentioned parameters at various operational conditions have provided valuable information which is hard to obtain during rolling operation and the predicted ranges of quantitative values from these analyses lie within the bound of actual operational data.

기 호 설 명			
$J^*$	: 상계에너지	$h_0$	: 입측두께
$W_i$	: 내부에너지	$h_1$	: 출측두께
$W_f$	: 마찰에너지	$h_n$	: 중립점에서의 두께
$W_b$	: 후방 장력에너지(back tension)	$h_p$	: 임의의 점 P에서의 두께
$W_a$	: 전방 장력에너지(front tension)	$w$	: 판 폭
$\sigma_0$	: 단축인장시 항복응력	$v_0$	: 입측속도
$m$	: 전단마찰계수	$v_1$	: 출측속도
$\sigma_{xb}$	: 후방장력	$v_n$	: 중립점에서의 속도
$\sigma_{xf}$	: 전방장력	$v_p$	: 임의의 점 P에서의 속도
$R_0$	: 롤 반경	$\theta_n$	: 중립각
$U$	: 롤 주속	$\theta_p$	: 임의의 점 P에서도 각도
		$\alpha_2$	: 바이트각도
		$a_0$	: 롤 입측에서의 타원의 x축 반경
		$b_0$	: 롤 입측에서의 타원의 y축 반경

\*회원, 산업과학기술연구소 철강제품연구소본부

$a_p$	: 임의의 점 $P$ 에서의 타원의 $x$ 축 반경
$b_p$	: 임의의 점 $P$ 에서의 타원의 $y$ 축 반경
$D_o$	: 타원의 원주
$S$	: 동적 가용속도장의 계적
$\beta$	: 기하학적 인자 ( $= a_o/b_o$ )
$T$	: 톨 토크 (torque)
$L_a$	: 투영 접촉길이 (Fig. 1)
$a$	: Moment arm의 길이 (Fig. 1)
$P$	: 압연하중
$P/\sigma_o$	: Normalized 평균 압연하중
$f(\%)$	: 선진율
$\mu$	: Coulomb 마찰계수

## 1. 서 론

소성가공의 여러공정들중에서 압연공정은 기하학적 변수, 마찰변수 및 재료변수 등 많은 가변조업 변수들이 복합적으로 작용하므로 이론해석에 여러 제한이 따르긴 하나, 현장조업분석에 의존한 압연 해석은 단일변수의 변화에 대한 해석이 어려우므로 이론에 근거한 압연이론해석이 병행되어야만 복잡한 압연현상의 정확한 해석이 가능해 진다. 근래의 압연이론해석의 연구사례를 보면 유한요소법을 이용한 압연해석의 경우, 수평압연 (horizontal rolling) 및 에저압연 (vertical rolling) 압연시 선단부 (top) 또는 후단부 (bottom)와 같은 비정상부의 2차원, 3차원 해석, 도그 본 (dog bone) 프로파일 해석 등의 변형형상과 톨과 스톨의 온도해석 등이 있으며, <sup>(1-5)</sup> 상계해석법의 경우는 압연하중, <sup>(6)</sup> 압연 Pass schedule 계산, <sup>(7)</sup> 비대칭 압연해석 <sup>(8)</sup> clad plate의 압연해석 <sup>(9)</sup> 등이 있다. 상계해석법은 유한요소법과 같이 응력, 변형이력 및 변형패턴에 대한 자세한 정보를 제공하지 못하는 단점이 있으나, 상계해석근이 얻어지면 관련변수를 자유로이 변화시키며 빠른시간내에 폭넓은 조업정보를 손쉽게 얻을 수 있는 장점이 있는 반면 유한요소법은 가공과정의 자세한 정보를 제공해 주긴 하지만 관련변수의 변화시 추가작업을 반복해야 하고 계산시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

본 연구에서는 결과의 해석이 용이하고 조업변수를 폭넓게 고려할 수 있는 상계해석법을 이용하여 압연현상을 이론적으로 해석하고자 하였는데, 상계해석법의 최적속도장을 구하기 위해 유한요소법을

이용하여 얻어진 변형패턴으로부터 동적 가용속도장 (kinematically admissible velocity field)을 계산하는 방법을 사용함으로써 유한요소법을 상호보완적으로 사용하였다. 유한요소해석은 범용 탄소성 유한요소 프로그램인 MARC를 사용하여 평면변형 조건의 2차원 압연해석을 실시하였는데 향후 본 해석결과와 적용대상인 열간 마무리압연 (finish rolling) 각 스탠드별 입측두께, 압하율, 마찰계수 등의 압연조건에 근거하여 롤바이트 (roll bite) 내의 변형패턴 (deformation pattern)을 관찰하였다. 상계해석근을 구하기 위해 내부에너지를 계산하였고 사상압연시 스탠드간 Looper의 장력으로 인해 발생될 수 있는 인접스탠드간 전, 후방 장력에너지가 고려되었다. 현장조업분석에 의존한 압연해석은 여러 조업변수가 가변적으로 상호관련되어 있으므로 어떤 특정변수만의 효과를 파악하기가 용이하지 않다. 따라서 본 연구에서는 상계해석을 통해 얻어진 상계에너지를 적절히 변환시켜 열간압연의 주요 조업인자인 압연하중, 중립각 및 선진율 등을 구한 후, 관련변수를 광범위하게 변화시키면서 조업인자의 변화추이를 관찰함으로써 압연공정해석을 하였다. 압연하중의 계산은 상계에너지로부터 톨에 전해지는 톨 (torque)를 계산한 후 이때의 모멘트 (moment)를 이용하여 압연하중을 계산하였다. 압연하중은 압연시 톨갭 (roll gap) 설정에 필수적으로 계산되어야 하는 주요조업자로서 현재 여러 실험식이 제시되어 부분적으로 사용되고 있으나 압연재의 치수, 소재의 금속학적 특성 및 마찰조건에 민감한 변수이므로 이론적 예측이 어려운 실정이다. 따라서 본 연구에서는 압연치수 (입측두께, 출측두께, 톨경) 및 마찰조건을 변화시키면서 압연하중의 변화추이를 제시함으로써 압연조업설계시 강종특성 (해당 유동응력)만 고려하면 이론적 압연하중 계산이 가능하도록 하였다. 준-독립인자 (pseudo-independent parameter)로 사용된 중립각은 에너지 최소점에서 각도로부터 직접 구하였는데, 중립각의 위치에 의해 마찰조건 및 톨 바이트 내의 소성유동이 영향을 받게되므로 압연치수 및 마찰조건을 변화시키면서 중립각을 구했으며, 현재 많이 사용되고 있는 Ekelund식을 이용한 예측식와도 비교해 보았다. 선진율은 연속압연공정시 인접스탠드간의 mass balance 유지에 필수적으로 필요한 조업인자인데 톨 주속보다 빠르게 진행되는 실제 판의 선진 (forward slip) 정도를 톨 주속의 비

율로 나타낸 값이다. 선진율을 상계해석의 동적가용속도장으로부터 계산하였고, 특히 변화추이도 제시하였다. 본 연구에서는 이상의 조업인자들에 대한 이론적 예측에 치중하였고 실제 조업실적과의 비교는 비교가능한 범위에만 국한하였는데, 이는 실제 압연시 상기 조업변수들의 실측이 대부분 불가능하고 이론해석에 적용한 값과 동일한 조업변수(물경변화, 마찰계수 변화, 전·후방 장력변화 등)들을 실조업에 적용하여 해당값을 얻어내는 데는 한계가 있기 때문이다.

## 2. 압연변형패턴의 유한요소해석

### 2.1 해석방법

2차원 압연해석의 경계조건은 Fig. 1과 같이 압연방향의 속도성분을  $V_x$ , 두께방향의 속도성분을  $V_y$ 로 정의하였으며, 소재의 대칭축 AB면은 y방향으로 구속을 받고, 롤과 소재간의 접촉면 ED면은 법선방향으로 구속을 받는다. 또한, 소재의 대칭성을 고려하여 전체의 절반만을 해석범위로 잡았다. 소재는 탄소성체(elasto-plastic body), 롤은 강체(rigid body)로 가정하였으며, 소재는 롤의 회전에 따라 치입되도록 롤에 일정한 양의 time step을 주어 해석하였다.

해석은 Newton-Raphson 법을, 항복조건은 Von-Mises 조건을 각각 이용하였다. 해석에 사용한 유한요소 모델은 사각형 등계수 요소(isoparametric quadrilateral element)를 사용하였으며, 요소분할은 수렴성을 양호하게 하기 위하여 격자롤 미세하게 나누었다. 해석방법은 우선, Non-steady 상태의 압연조건으로 계산하고, 충분한 time step을 주어 소재가 롤의 회전에 의해 롤 출측으로부터 완전히 빠져 나와 steady 상태에 도달할 때까지 계산을 계속 수행하도록 하였다. Table 1은 압연

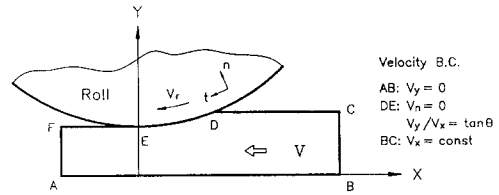


Fig. 1 The boundary conditions for the finite element analysis

해석에 사용된 계산조건을 나타낸 표이다. 사상압연 스탠드 중 홀수 4개 스탠드에 대해서 대표적인 압축두께를 선정하여 압하율과 마찰계수를 변화하였다.

또한, 계산에 사용된 고온강에 대한 변형저항식은 식 (1)을 사용하였다.<sup>(10)</sup>

$$\sigma = 10.5 \exp(0.126(0.126 - 1.75C + 0.594C^2)) \epsilon^{0.21} \dot{\epsilon}^{0.13} \exp\left(\frac{2851 + 2968 - 1120C^2}{T}\right) \text{ (kg/mm}^2\text{)} \quad (1)$$

여기서,  $T = 1023 - 1473^\circ \text{K}$ ,  $\epsilon < 0.5$ ,  $\dot{\epsilon} = 30 - 200 \text{ sec}^{-1}$ ,  $C(\%) < 1.2$  이다. 본 해석에서는 소재온도가  $1000^\circ \text{C}$ 로 균일하다고 가정하였으며, 탄소함유량이 0.2%인 일반강에 대해서 계산하였다.

따라서 식 (1)은 다음과 같은 식 (2)의 꼴로 표현된다.

$$\sigma = 8.446 \epsilon^{0.21} \dot{\epsilon}^{0.13} \exp\left(\frac{3400}{T(^{\circ}\text{K})}\right) \text{ (N/mm}^2\text{)} \quad (2)$$

### 2.2 압하율의 변화에 따른 유효변형도

유효변형도(effective strain) 분포 계산은 소재가 롤로부터 충분히 빠져나와 정상상태에 도달할때까지 계산한 결과로, 계산시간(computer time)은 계산조건에 따라서 다소 차이가 있으나 Workstation DEC 3000에서 대략 20000~25000초 정도 소

Table 1 The input variables for the finite element analysis

Roll diameter (mm)	Friction coefficient	Thickness entry (mm)	Reduction (%)	Roll speed (m/min)	Rolling temperature ( $^{\circ}\text{K}$ )
750	$\mu = 0.1$	40	10, 30, 50	300	1273
	0.2	12			
	0.3	6			
	0.4	3			

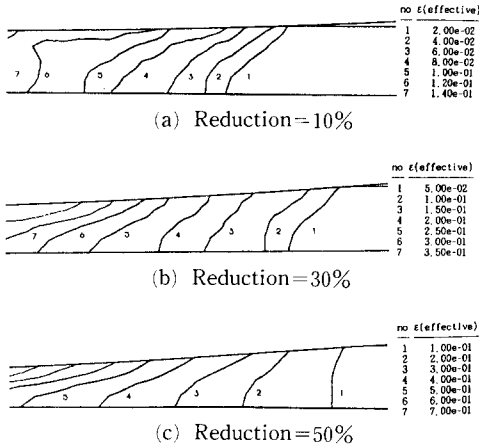


Fig. 2 Distribution of effective strain at different reduction ( $H_0=12$  mm)

요되었다.

Fig. 2는 초기 입측두께 12 mm, 마찰계수  $\mu=0.3$  일 때 압하율에 따른 유효변형도의 분포를 나타낸 것이다.

롤 바이트내 유효변형도의 크기는 입측으로부터 출측으로 향할수록 증가하며, 이 값은 압하율이 증가함에 따라 증가함을 보인다. 또한, 두께방향을 생각해 보면 롤과 소재간의 접촉면 부근에서 변형이 가장 크며, 롤 출측으로 향할수록 점점 증가해 간다. 롤바이트내 변형장의 모양을 살펴보면 소재의 두께 방향을 기준으로 포물선형태를 유지하면서 롤 입측으로부터 롤 출측에 이르기까지 점점 확장되어 발전하다가 출구근방에서 변형장의 모양이 급격히 바뀌게 된다. 초기 입측두께 6 mm, 마찰계수  $\mu=0.3$  일 때 압하율에 따른 유효변형도의 분포를 동일하게 분석하면 압하율의 증가에 따라서 변형장의 포물선 모양의 확장정도가 더 증가하나 변형패턴은 유사하게 나타났다.

### 3. 동적 가용속도장의 유도

유한요소 해석결과를 이용한 변형패턴으로부터 동적가용 속도장을 유도하기 위해 전형적인 압연 변형패턴을 정하였는데, 입출측 소재의 치수조건과 마찰조건에 따라 변형패턴이 바뀌게 되므로 Fig. 3에 보인 바와 같이 기하학적 인자(geometrical factor)  $\beta$ 를 이용하여 치수별로 가변적인 변형패턴을 묘사하였다. 유한요소해석 결과로부터 얻어진

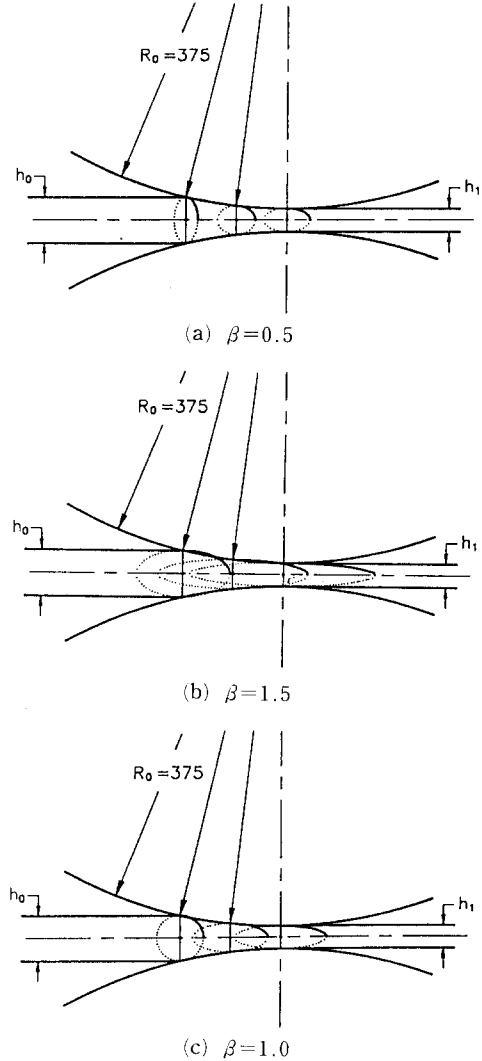


Fig. 3 The typical deformation pattern for the upper bound analysis

소성유동의 형태로 볼때 롤 바이트내의 소성유동은 근사적으로 타원의 궤적과 유사한 형태를 가지므로 본 해석에서는 x축 반경( $a_0$ )과 y축 반경( $b_0$ )의 비  $\beta (=a_0/b_0)$ 를 통하여 초기 타원(롤 입측의 변형패턴)을 정한 후 이로부터 롤 바이트내 단위체적의 이동이 동일하다는 가정하에서 롤 바이트내의 변형거동을 묘사하였다.

#### 3.1 압연변형패턴

상계해석을 위한 변형패턴을 Fig. 4에 도식적으로 나타내었다.

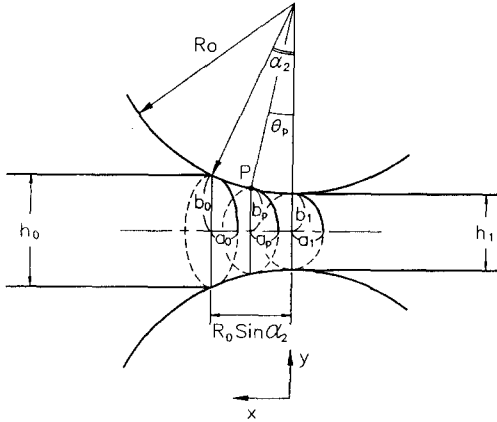


Fig. 4 The geometry of roll bite

타원의 일반식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

최적변형장을 결정짓는 기하학적 인자(geometric factor),  $\beta$ 를 가정하면 타원의 방정식은 롤 입측에서 식 (4)를 만족시킨다.

$$\frac{(x - R_0 \sin \alpha_2)^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1 \quad (4)$$

롤 입측에서  $b_0/2$

$a_0$ 는  $b_0$ 의 일정분율  $\beta$ 로 정의하면

$$a_0 = b_0 \beta = h_0 \beta / 2 \quad (5)$$

따라서 롤 입측의 변형장은 다음의 타원방정식 식 (6)을 따른다.

$$\frac{(x - R_0 \sin \alpha_2)^2}{(h_0 \beta / 2)^2} + \frac{y^2}{(h_0 / 2)^2} = 1 \quad (6)$$

롤에 판이 치입된 후 롤 바이트를 통과하면서 변형장이 변화하게 되는데 동일 체적의 순간적 이동량이 일정하다는 가정하에 롤 바이트내에서의 타원의 변화를 예측해 낼 수 있다.

입측타원의 체적  $V_0$ 는

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi a_0 b_0 w = \pi (h_0 / 2) (h_0 \beta / 2) \\ w &= (\pi / 4) h_0^2 \beta w \end{aligned} \quad (7)$$

롤 바이트내에서  $y$ 축 높이 변화와 타원의  $y$ 축 반경  $b$ 를 롤 바이트내에서 동일하게 보면 어떤 위치  $P$ 에서의  $y$ 축 높이,  $b_p$ 를 이용하여 순간적으로 변화는 타원의 형태를 예측할 수 있는데 어떤 위치

$P$ 에서의  $y$ 축 높이,  $b_p$ 는  $P$  점에서의 각도  $\theta_p$ 로 표현할 수 있다.

$$b_p = h_1 / R_0 (1 - \cos \theta_p) \quad (8)$$

따라서 롤 바이트내의 임의의 점  $P$ 에서의 타원의 체적  $V_p$ 는 입측타원의 체적  $V_0$ 와 동일한 것으로 가정할 때 식 (9)가 성립된다.

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi a_0 b_0 w = (\pi / 4) h_0^2 \beta w = V_p \\ &= \pi a_p b_p w = \pi a_p [h_1 / 2 + R_0 (1 - \cos \theta_p)] w \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 점  $P$ 에서의  $X$ 축 방향 타원의 반경,  $a_p$ 는 식 (10)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{h_0^2 \beta}{4 [h_1 / 2 + R_0 (1 - \cos \theta_p)]} \\ &= \frac{h_0^2 \beta}{2 h_1 + 4 R_0 (1 - \cos \theta_p)} \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 임의의 점  $P$ 에서의 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{(x - R_0 \sin \theta_p)^2}{\{h_0^2 \beta [2 h_1 + 4 R_0 (1 - \cos \theta_p)]\}^2} \\ + \frac{y^2}{\{h_1 / 2 + R_0 (1 - \cos \theta_p)\}^2} = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,  $A = h_0^2 \beta$ ,  $B = h_1 + 2 R_0 (1 - \cos \theta_p)$ 라 정의하면 타원의 방정식은 식 (12)가 된다.

$$\frac{(x - R_0 \sin \theta_p)^2}{(A / 2 B)^2} + \frac{y^2}{(B / 2)^2} = 1 \quad (12)$$

### 3.2 동적 가용속도장

식 (12)의 타원의 원주  $D_0$ 는 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned} D_0 &= 2\pi [(a^2 + b^2) / 2]^{1/2} \\ &= \pi \{ [A / B]^2 + B^2 \} / 2^{1/2} \end{aligned} \quad (13)$$

$\theta$ 가 충분히 작을 경우

$$\sin \theta = \theta - \theta^3 / 3! + \theta^5 / 5! + \dots = \theta$$

$$\cos \theta = 1 - \theta^2 / 2! + \theta^4 / 4! + \dots = 1 - \theta^2 / 2$$

따라서  $A = h_0^2 \beta$ ,  $B = h_1 + 2 R_0 (1 - \cos \theta_p) = h_1 + R_0 \theta_p^2$ 이 된다.

실제 변형장의 길이는 타원원주의 반에 해당하므로 본 가용속도장에서의 체적  $S_0$ 는

$$\begin{aligned} S &= \pi [(a^2 + b^2) / 2]^{1/2} \\ &= (\pi / 2) \{ [A / B]^2 + B^2 \} / 2^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

$\theta$ 가 변함에 따른 체적의 변화량,  $dS/d\theta$ 를 구해

보면

$$dS/d\theta = (\pi/2^{1/2}) R_0 \theta \frac{B^4 - A^2}{B^2(A^2 + B^4)^{1/2}} \quad (15)$$

롤 바이트내에서 부피가 일정하므로 식 (16)이 성립한다.

$$v_0 h_0 w = v_n h_n w = v_1 h_1 w = v_p h_p w \quad (16)$$

중립점에서  $V_n = U$  이므로

$$v_p = (v_n h_n) / h = (U h_n) / h \quad (17)$$

중립점의 위치에서 롤 바이트 높이  $h_n$ 은 중립각  $\theta_n$ 을 pseudo-independent parameter로 하여 표현할 수 있다.

$$h_n(\theta = \theta_n) = h_1 + 2R_0(1 - \cos\theta_n) \quad (18)$$

입의 각도,  $\theta_p$ 에서 롤 바이트의 높이는

$$h_p(\theta = \theta_p) = h_1 - 2R_0(1 - \cos\theta_p) \quad (19)$$

따라서 식 (17)은 식 (20)의 형태로 바뀌어 진다.

$$V_p = \frac{U h_n}{h_p} = \frac{U[h_1 + 2R_0(1 - \cos\theta_n)]}{[h_1 + 2R_0(1 - \cos\theta_p)]} = U(B_n/B) \quad (20)$$

동적 가용속도장으로부터 변형률장(strain rate field)은 다음과 같이 계산된다.

$$d\theta/dt = v/R_0 = -U(B_n/B)/R_0 \quad (21)$$

$$dS/dt = (d\theta/dt)(dS/d\theta) = -(\pi/2^{1/2})U\theta \frac{(B^4 - A^2)B_n}{B^3(A^2 + B^4)^{1/2}} \quad (22)$$

따라서  $\theta$ 방향의 변형률장은

$$\dot{\epsilon}_\theta = (dS/dt)/S = -2U\theta \frac{(B^4 - A^2)B_n}{(A^2 + B^4)B^2} \quad (23)$$

$R$ 방향의 변형률장은 평면변형하에서의 체적불변의 법칙으로부터 구해진다.

$$\dot{\epsilon}_R = -\dot{\epsilon}_\theta = 2U\theta \frac{(B^2 - A^2)B_n}{(A^2 + B^4)B^2} \quad (24)$$

## 4. 상계에너지 계산

### 4.1 내부에너지

롤 바이트내의 압연변형에 따른 내부에너지(internal power of deformation)는 정의에 의해

식 (25)를 통해 구했다.<sup>(11)</sup>

$$W_i = (2/3^{1/2}) \sigma_0 [(\dot{\epsilon}_R \dot{\epsilon}_\theta)/2]^{1/2} \quad (25)$$

식 (23)과 식 (25)의  $\dot{\epsilon}_R$ 과  $\dot{\epsilon}_\theta$ 를 위식에 대입하면

$$W_i = (2/3^{1/2}) \sigma_0 [(\dot{\epsilon}_R^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2)/2]^{1/2} \quad (26)$$

$\dot{\epsilon}_R = -\dot{\epsilon}_\theta$  이므로

$$W_i = (2/3^{1/2}) \sigma_0 (\dot{\epsilon}_R^2)^{1/2} = (2/3^{1/2}) \sigma_0 \dot{\epsilon}_R = (2/3^{1/2}) \sigma_0 \dot{\epsilon}_\theta \quad (27)$$

단위폭당 체적을 적분하면

$$W_i = (2/3^{1/2}) \int_{\theta=\alpha_2}^{\theta=0} \left[ \int_s \sigma_0 \dot{\epsilon}_\theta dS \right] R_0 d\theta = (2/3^{1/2}) \sigma_0 R_0 \int_{\theta=\alpha_2}^{\theta=0} \left[ \int_s \dot{\epsilon}_\theta dS \right] d\theta \quad (28)$$

$\dot{\epsilon}_\theta = (dS_\theta/dt)/S$  이므로 이것을 대입하면 내부에너지를 계산하면 식 (29)와 같다.

$$W_i = (2/3^{1/2}) \sigma_0 R_0 \int_{\theta=\alpha_2}^{\theta=0} \left\{ \int_s [(dS/dt)/S] dS \right\} d\theta = - (2/3^{1/2}) \pi U \sigma_0 R_0 B_n \int_{\theta=\alpha_2}^{\theta=0} \frac{(B^4 - A^2)}{B^3(A^2 + B^4)^{1/2}} \theta d\theta \quad (29)$$

### 4.2 마찰에너지

롤 표면과 변형소재의 경계부위에서 소요되는 마찰에너지(frictional power of deformation)는 식 (30)에 의해 구했다.<sup>(11)</sup>

$$W_f = (m \sigma_0/3^{1/2}) \int_s |\Delta v| dS \quad (30)$$

롤 입측에서 중립점까지는  $U > v$ 이고, 중립점에서 롤 출측까지  $U < v$  이므로 마찰에너지를 구분하여 구했다.

롤 입측에서 중립점까지( $U > v$ )의 마찰에너지를  $W_{fa}$ 라 하면 식 (30)으로부터 식 (31)이 얻어진다.

$$W_{fa} = (m \sigma_0/3^{1/2}) \int_{\theta=\theta_n}^{\theta=\alpha_2} |U - v| R_0 d\theta = (m \sigma_0/3^{1/2}) U R_0 \int_{\theta=\theta_n}^{\theta=\alpha_2} [1 - (B_n/B)] d\theta \quad (31)$$

여기서,

$$\int_{\theta=\theta_n}^{\theta=\alpha_2} [1 - (B_n/B)] d\theta = \alpha_2 - \theta_n + (h_1/R_0)^{1/2} \tan^{-1}[\theta_n / (h_1/R_0)^{1/2}]$$

$$\begin{aligned}
& -\tan^{-1}[\alpha_2/(h_1/R_0)^{1/2}] \\
& +[\theta_n^2/(h_1/R_0)^{1/2}][\tan^{-1}[\theta_n/(h_1/R_0)^{1/2}] \\
& -\tan^{-1}[\alpha_2/(h_1/R_0)^{1/2}]
\end{aligned}$$

중립점에서 톨 출측까지 ( $U < v$ )의 마찰에너지를  $W_{fb}$ 라 하면 식 (30)으로부터 식 (32)가 얻어진다.

$$\begin{aligned}
W_{fb} &= (m \sigma_0/3^{1/2}) \int_{\theta=\theta_n}^{\theta=0} |v-U| R_0 d\theta \\
&= (m \sigma_0/3^{1/2}) U R_0 \int_{\theta=\theta_n}^{\theta=0} |(B_n/B) - 1| d\theta
\end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
\text{여기서, } \int_{\theta=\theta_n}^{\theta=0} |(B_n/B) - 1| d\theta \\
&= -\theta_n + (h_1/R_0)^{1/2} \tan[\theta_n/(h_1/R_0)^{1/2}] \\
&\quad + [\theta_n^2/(h_1/R_0)^{1/2}] \tan^{-1}[\theta_n/(h_1/R_0)^{1/2}]
\end{aligned}$$

#### 4.3 전후방 장력에너지

압연시 인접스탠드간의 장력에 의한 에너지는 다음과 같이 구했다.

후방장력 (back tension)에 의한 에너지  $W_b$ 는

$$W_b = F_b v_b = \sigma_{xb} h_0 v_0 = \sigma_{xb} h_n v_n = \sigma_{xb} h_n U \quad (33)$$

전방장력 (front tension)에 의한 에너지  $W_a$ 는

$$W_a = F_a v_a = \sigma_{xf} h_1 v_1 = \sigma_{xf} h_n v_n = \sigma_{xf} h_n U \quad (34)$$

따라서 전후방 장력이 동시에 걸리는 경우는 식 (35)와 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
W_b - W_a &= (\sigma_{xb} - \sigma_{xf}) h_n U \\
&= (\sigma_{xb}/\sigma_0 - \sigma_{xf}/\sigma_0) \sigma_0 B_n U
\end{aligned} \quad (35)$$

#### 4.5 Power Balance

이상의 상계에너지로부터 전체 상계에너지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
J^* &= W_i + 2W_{fa} + 2W_{fb} + W_b - W_a \\
&= -(2/3)^{1/2} \pi U \sigma_0 \\
&\quad R_0 B_n \int_{\theta=\alpha_2}^{\theta=0} \frac{(B^4 - A^2)}{B^3(A^2 + B^4)^{1/2}} \theta d\theta \\
&\quad - 2(m\sigma_0/3^{1/2}) UR_0 \int_{\theta=\theta_n}^{\theta=\alpha_2} |1 - (B_n/B)| d\theta \\
&\quad + 2(m\sigma_0/3^{1/2}) UR_0 \int_{\theta=\theta_n}^{\theta=0} |(B_n/B) - 1| d\theta \\
&\quad + (\sigma_{xb}/\sigma_0 - \sigma_{xf}/\sigma_0) \sigma_0 B_n U
\end{aligned} \quad (36)$$

본 연구의 상계해석근을 계산하기 위해서는 톨

바이트내의 소성유동을 잘 묘사해줄 수 있는 최적  $\beta$ 값의 결정이 선행되어야 한다.  $\beta$ 를 pseudo-independent parameter로 처리하여 에너지 최소점에서의  $\beta$ 값을 통해 최적  $\beta$ 값을 결정할 수도 있으나, 이를 위해서는 또 다른 pseudo-independent parameter인 중립각이 결정되어야 함으로 대량의 계산이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 톨 바이트내의 변형해석시 보다 중요하게 다루어져야 할 중립각을 pseudo-independent parameter로 다루고  $\beta$ 값은 유한요소 분석결과 얻어진 변형패턴으로 부터 근사적으로 선정하였는데 유한요소 해석결과 얻어진 변형패턴에 가장 유사한 값인  $\beta=0.9$ 를 본 해석에서 사용하였다. 많은 변수에 의해 변형거동이 변할 수 있는 압연공정에서는 압연조건에 따른  $\beta$ 값의 가변적 적용이 보다 정확한 해석을 가능하게 하나, 모든 경우의  $\beta$ 값을 경우별로 유한요소해석을 통해 얻는것에는 한계가 있으므로, 본 연구에서는 압연시 변형패턴의 변화폭이 크지 않은 범위에 국한하여 일정범위의 변형패턴을 대표하는 특정  $\beta$ 값을 적용하였다. 이상의 상계해석근은 준 독립인자를 연속적으로 변화시키면서 에너지변화를 관찰해 보았을때 상계해석의 기본이론상<sup>(11)</sup> 어느 특정 준-독립인자값에서 에너지 최소점을 가지는 것이 필수적으로 요구된다. 계산결과 Fig. 5에 보인바와 같이 특정  $\theta_n$ 값(중립각)에서 최소 에너지를 나타내고 있는데, 이는 최소 상계에너지(lowest upper bound energy)가 이점에서 얻어짐을 의미하며 본 상계해석근을 이용한 압연공정해석이 가능함을 의미한다.

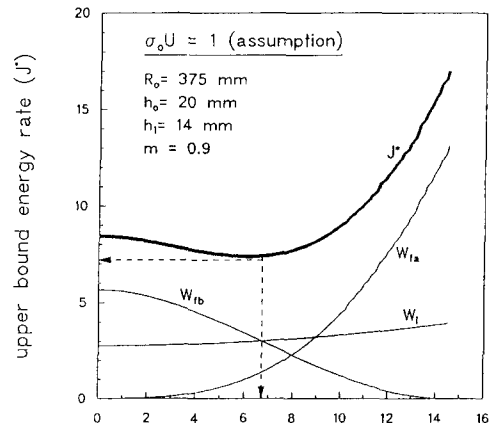


Fig. 5 The energy minimum point obtained from upper bound solution

### 5. 상계해석근을 이용한 압연공정해석

#### 5.1 압연하중 계산

이전에 구한 내부에너지, 마찰에너지 및 전후방장력에너지를부터 전체 상계에너지는 식 (37)과 같이 표현할 수 있다.

$$J^* = W_i + 2W_{fa} + 2W_{fb} + W_b - W_a \quad (37)$$

상하부 롤을 통해 가해지는 전체 torque(상, 하부 각각의 torque의 2배)는

$$T = R_0 J^* / U \quad (38)$$

실제로 압연하중은 접촉면에 걸쳐 Friction-Hill 하중분포를 하고 있으므로 압연하중을 Torque로 계산하기가 용이하지 않다. 그러나 Fig. 6에 보인 바와 같이 전체 압연하중이 롤의 출측으로부터  $a$  만큼 떨어진 거리에 집중된다고 가정하면 압연하중을 구할수 있는데 일반적으로 접촉투영거리  $L_a (=R_0(h_0-h_1))$ 에 대한 moment arm의 길이  $a$ 의 비를  $\lambda$ 로 나타낸 후 적절한  $\lambda$  값을 정함으로써 압연하중을 구할 수 있게 된다.

$$\lambda = a / L_a = a / R_0(h_0 - h_1) \quad (39)$$

열간압연의 경우  $\lambda$ 는 0.5로 통상 사용하는데<sup>(12)</sup> 이 값을 이용한 압연하중식은 다음 식 (40)으로 표현할 수 있다.

$$P = T / 2a = (R_0 J^* / U) / [R_0(h_0 - h_1)] \\ = J^* / [U(h_0 - h_1)] \quad (40)$$

본 연구에서는 단위 폭당 normalized 평균압연하중 ( $P/\sigma_0$ ) 값을 구함으로써 순수 이론계산치를 제시하였고, 해당 소재의 유동응력 (flow stress,  $\sigma_0$ ) 과 판폭을 곱해주면 소요 압연하중을 계산할 수 있

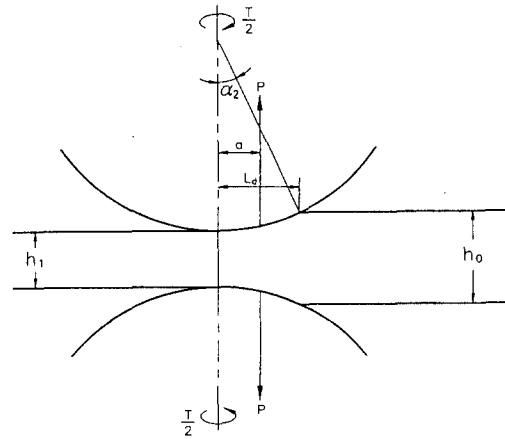


Fig. 6 Schematic drawing of strip rolling showing roll torque and separating force

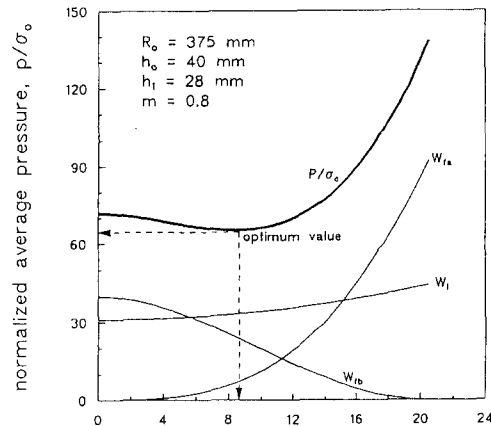


Fig. 7 Variation of normalized average pressure ( $P/\sigma_0$ ) with neutral angle. ( $R_0=375$  mm,  $h_0=40$  mm,  $h_1=28$  mm,  $m=0.8$ )

도록 하였다. Fig. 7에 중립각을 변화시키면서 구해본 단위폭당 평균압연하중 ( $P/\sigma_0$ ) 변화를 나타내었다.

Table 2 Rolling load obtained from operational (load cell) data

Steel specification	Roll diameter (mm)	Thickness entry (mm)	Delivery thickness (mm)	Strip width (mm)	Flow stress ( $\sigma_0$ ) kg/mm <sup>2</sup>	Measured roll force (ton)
JS-SPCC-S	375	42.0	27.0	907	21	1296
JS-SPCC-S	375	42.9	27.7	907	21	1298
JS-SPCC-S	375	42.8	27.5	907	21	1292
JS-SPCC-S	375	42.7	27.6	907	21	1293



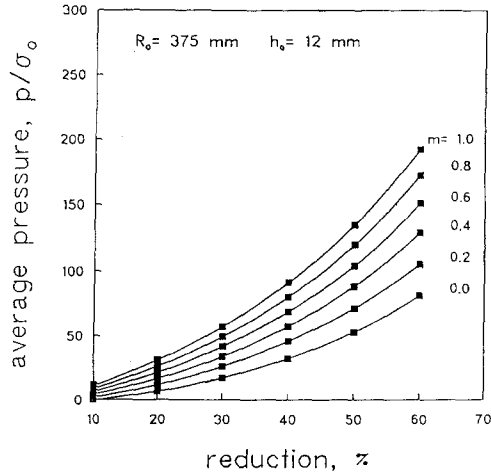


Fig. 8(a) Variation of normalized average pressure ( $P/\sigma_0$ ) with initial thicknesses ( $h_0$ )

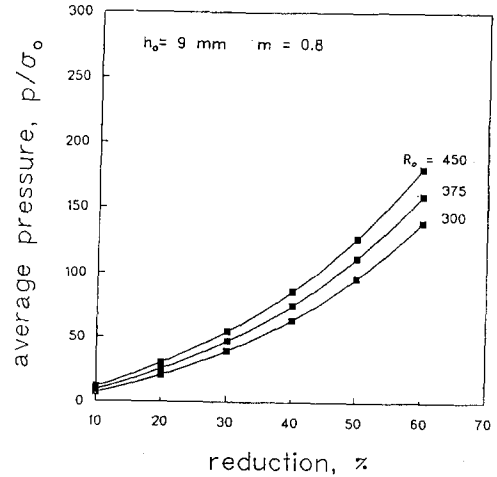


Fig. 8(c) Variation of normalized average pressure ( $P/\sigma_0$ ) with roll radius ( $R_0$ )

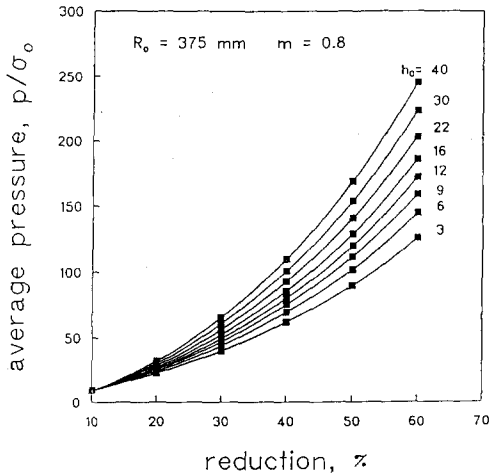


Fig. 8(b) Variation of normalized average pressure ( $P/\sigma_0$ ) with constant friction factor ( $m$ )

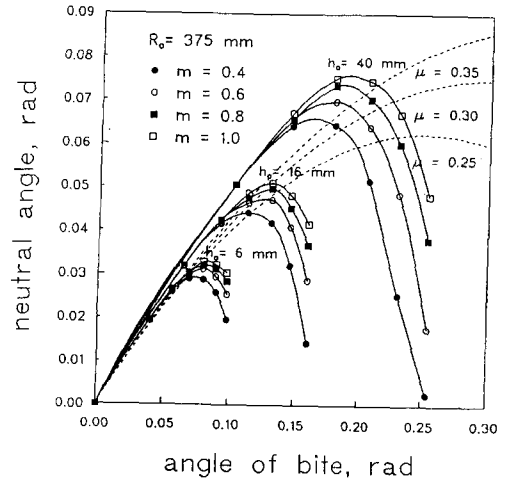


Fig. 9 Superimpose neutral angle of this study with Ekelund's predicted value

중립각이 증가함에 따라 내부에너지( $W_i$ )와 입측부터 중립점까지의 마찰에너지( $W_{fa}$ )는 증가하는 반면 중립점으로부터 출측까지의 마찰에너지( $W_{fb}$ )는 감소하고 있다. Fig. 1(a)의 경우, 이러한 값들의 합인 압연하중은 중립점이 0 인점으로 부터 감소해 나가다가 약  $8.6^\circ$  부근에서 최소점을 보인 후 다시 급격히 증가해 나감을 보여준다. 즉 물경 375 mm, 입측두께 40 mm, 출측두께 28 mm(압하율: 30%), 전단마찰계수 0.8 (열간압연시 통상 사용범위: 0.7-1.0)<sup>(13)</sup>인 상태로 압연할 경우, 중립점은 예저니 최소점인  $8.6^\circ$ 가 되고 단위폭당 평균

압연하중(normalized- $P/\sigma_0$ )은 약 65가 된다. 이러한 예측치가 실제 조업을 통해 구한 값과 정량적으로 비교해보기 위해 주어진 압연온도와 속도에서 유동응력( $\sigma_0$ )이 21 kg/mm<sup>2</sup>이고 폭이 907 mm 인 일반 탄소강 관재를 압연할 때 압연하중 P를 구한 후 실적치와 비교해 보았다. 상계해석결과로부터 구한 평균 압연하중은 식 (41)의 계산을 통해 약 1238 ton이 얻어졌는데 유사조건의 실제조업 측정치가 Table 1에 보인 바와 같이 약 1278-1296 ton 이므로 상계해석의 압하량(40 mm - > 28 mm : 30% 입하)보다 실압연의 압하량이 다소 큰(42 mm

- >27.5 mm : 34.5% 압하) 것을 고려하면 유사한 값을 보임을 알 수 있다.

$$P = 21 \text{ kg/mm}^2 \times 907 \text{ mm} \times 65 = 1238055 \text{ km} = 1238 \text{ ton} \quad (41)$$

이상의 방법으로 조업변수를 광범위하게 변화시키면서 단위폭당 평균 압연하중( $P/\sigma_0$ )를 구한 결과를 Fig. 8에 나타내었다.

Fig. 8(a)에서 볼수 있듯이 동일 압하량을 가정할 때 초기두께가 클수록 압연하중이 증가하는데 이는 절대 압연체적의 증가로 인한 내부에너지 증가에 기인한다. Fig. 8(b)에는 마찰계수가 증가함에 따른 마찰에너지 증가로 인한 압연하중 증가추이를 보이고 있다. Fig. 8(c)에는 압연 롤의 반경을 변화시켰을 때 압연하중 변화추이를 나타내고 있는데 동일압하량을 가정할 때 롤 반경이 클수록 압연하중이 큼을 보여주고 있다. 이는 물경의 증가에 따른 롤과 소재사이의 접촉면적 증가로 마찰에너지가 증가함에 크게 기인한다.

5.2 중립각 계산

중립각은 에너지 최소점에 해당하는 각도로 부터 구하였는데 준 독립인자인 중립각을 0 으로부터 롤 바이트각도까지 1/100 간격으로 연속적으로 변화시키면서 압연하중을 계산한 후 최소 에너지를 만족시키는 각도를 해당조건에서의 최적중립각으로 간주하여 에너지 최소점에서의 각도로부터 구했는데, 압연소재의 치수 및 마찰조건 등을 변화시키면서 구한 중립각을 해당 바이트각도와 대비해 Fig. 10에 나타내었다. 이와 함께 현재 많이 사용되어지고 있는 Ekelund의 중립각 예측식과 본 결과를 비교하기 위해 식 (42)에 보인 Ekelund의 예측식<sup>(14)</sup>을 Fig. 9에 동일 스케일(scale)로 나타내었다.

$$\theta = \alpha_2/2 - (\alpha_2/2)^2/\mu \quad (42)$$

그림에서 볼수 있듯이 바이트각도의 증가(즉, 압하량이 증가)와 함께 중립각이 증가해 가다가 정점(peak value)에 이른 후 다시 감소함을 보여주고 있다. 이는 압하 초기에는 중립점이 롤의 출측으로부터 내부로 이동하나 한계치를 지나면서 다시 중립점이 출구로 나옴을 의미한다. 이러한 중립각은 압연 초기두께( $h_0$ )에 의해 크게 영향을 받는데 초기두께가 증가할수록 바이트각도가 증가하게 되므로 해당 중립각도 증가하게 됨을 알 수 있다. 전단

마찰계수도 중립각에 영향을 미치는데 동일 압하량을 가정할 때 마찰이 클수록 중립각이 크게 나타남을 보여주고 있다. Ekelund의 중립각 예측식도 본 연구와 유사하게 압하량이 증가함에 따라 증가하는 경향을 보이고 있으나, 본 연구에서는 바이트 각도의 증가에 따라 어느한계 압하량을 지나면 중립각이 출구측으로 되돌아가는 반면 Ekelund 예측의 경우는 중립각이 계속 증가하게 된다. 실제 압연시 한계 압연두께가 존재하는데<sup>(15)</sup> 이는 중립각이 롤의 출구에 놓이는 상태(즉, 중립각이 0 인 상태)임을 고려할 때 본 연구의 예측이 보다 현상을 잘 반영해 주고 있음을 알 수 있다. 열간압연시 통상 사용하는 Coulombic friction factor( $\mu$ )의 값이 0.25~0.35이고 전단마찰계수(m)의 값이 0.7~1.0 이므로<sup>(13)</sup> 유사마찰계수 영역에서 본 연구에서 예측된 중립각과 Ekelund 식을 통해 예측된 중립각을 중첩시킨 결과를 Fig. 4(c)에 나타내었다. 그림에서 볼수 있드시 바이트각도가 클수록(압하량이 크거나, 초기두께가 클 경우) 그 차이가 증가하고 있으나, 실압연에 보다 가까운 작은 바이트 각도에서는 유사한 값을 보이고 있다.

5.3 선진율 계산

정의로부터 선진율은 롤 주축 대비 출측 판속도의 비율이므로

$$f(\%) = (v_1/U - 1) \times 100 \quad (43)$$

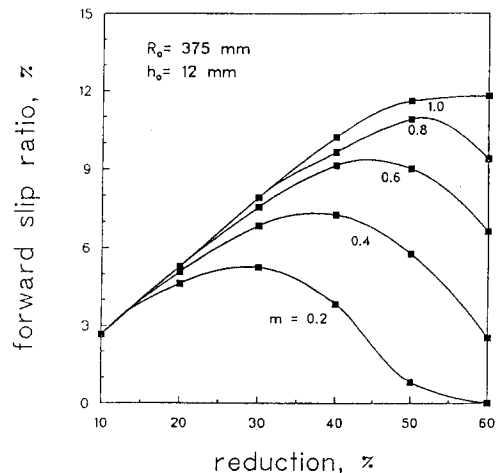


Fig. 10(a) Variation of forward slip ratio with constant friction factor(no tension)

Fig. 10 Continued

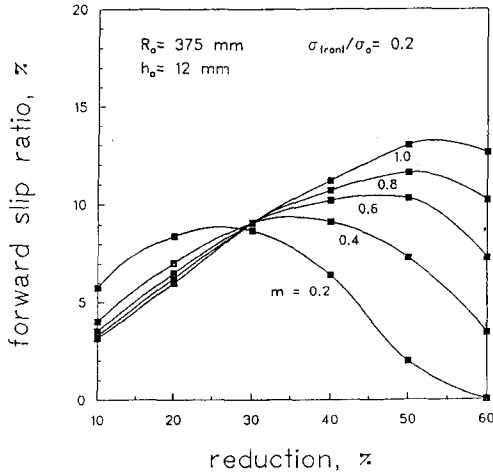


Fig. 10(b) Variation of forward slip ratio with constant friction factor (front tension)

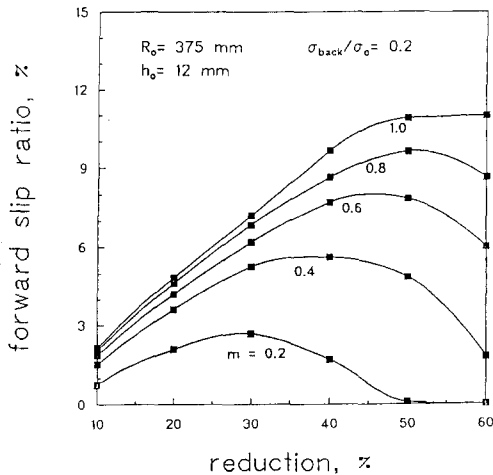


Fig. 10(c) Variation of forward slip ratio with constant friction factor (back tension)

롤 바이트내에서의 mass balance로부터

$$v_0 h_0 = v_n h_n = v_1 h_1 \quad (44)$$

중립점에서  $v_n = U$ 이고, 롤 바이트의 높이  $h_n$ 은  $h_n(\theta = \theta_n) = h_1 + 2R_0(1 - \cos \theta_n) = h_1 + R_0 \theta_n^2$  이므로, 출측속도  $v_1$ 은

$$v_1 = (v_n h_n) / h_1 = (U h_n) / h_1 = U (h_1 + R_0 \theta_n^2) / h_1 \quad (45)$$

따라서 선진율은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$f(\%) = (1 + R_0 \theta_n^2 / h_1) \times 100 \quad (46)$$

식 (46)으로부터 구한 선진율은 중립각에 크게

영향을 받게 되는데 Fig. 10에 여러 영양인자별 선진율을 나타내었다.

Fig. 10(a)에  $R_0=375$  mm,  $h_0=12$  mm 인 경우의 선진율을 나타내었는데, 마찰계수가 증가할수록 동일 압하량에서 선진율이 증가함을 보여주며, 압하량이 증가함에 따라 최대값을 보이다가 다시 한계압하량에 근접해감에 따라 감소하게 된다. 이는 한계압하량에 근접해 감에 따라 중립각의 출구쪽 이동때문인데 결국 이것은 전술한 바와 같이 한계압하량 부근으로 갈수록 압연이 불가능해 진다는 것을 의미한다 하겠다. Fig. 10(b)는 롤의 출측에서 전방장력(front tension)을 가할 경우 선진율의 변화거동을 나타낸 것인데, 마찰계수가 작을수록 또한 압하량이 적을수록 전방장력이 롤바이트에 직접 미칠 수 있는 장력효과가 크므로 그만큼 선진율이 증가함을 보이고 있으며 한계 압하량도 크짐을 보이고 있다. Fig. 10(c)는 반대로 롤의 입측에서 후방장력(back tension)을 가할 경우 선진율의 변화거동을 나타낸 것이다. 여기서도 마찰계수가 작을수록 또한 압하량이 적을수록 후방장력이 롤 바이트에 직접 미칠 수 있는 장력효과가 크므로 그만큼 선진율이 크게 감소함을 보이고 있고, 전체적으로 후방장력에 의해 선진율이 감소함을 잘 보여주고 있다. 전체적인 선진율의 값도 10~30% 압하량에서 3~8%의 값을 갖는데 이는 열간압연시 적용하고 있는 선진율의 범위와 일치하는 값이다.<sup>(16)</sup>

## 6. 결 론

(1) 상계해석법을 이용한 열간압연해석을 위해 유한요소해석을 통해 얻어진 변형패턴으로부터 기하학적 인자,  $\beta$ 를 포함하는 동적 가속속도장을 구하였고, 이로부터 내부에너지, 마찰에너지 및 장력 에너지를 포함하는 상계에너지를 계산한 결과 적정 중립점에서 최소점을 보임으로써 최적 상계해석근이 구해졌고 압연공정해석이 가능해졌다.

(2) 상계해석을 이용한 압연공정해석을 위해 압연하중, 중립각 및 선진율 등을 광범위한 조업변수를 이용하여 구해 본 결과, 실측으로 얻을 수 없거나 얻기 어려운 여러 조업인자들을 비교적 용이하게 구할 수 있었으며 많은 변수가 복합적으로 작용하는 압연공정해석에 유용한 접근방법임을 알 수 있었다.

(3) 상계해석근을 이용하여 구한 압연하중, 중립

각 및 선진율 등의 계산값들은 실제 열간압연 조업에서 사용하고 있는 값들과 유사한 값을 보였으며 이는 상계해석결과를 이용한 압연해석의 정량적 분석이 가능함을 보여주었다.

### 참고문헌

- (1) Kiuchi, M. and Yanagimoto, J., 1989, "Combined numerical analysis of shape rolling processes," *J. of the JSTP*, Vol. 30, No. 30, pp. 19~25.
- (2) Mori, K., Osaka, K. and Oda, T., 1984, "Simulation of Plane-Stain Rolling by the Rigid-Plastic Finite Element Method," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 24, pp. 519~527.
- (3) Lenard, J. G. and Pietrzyk, M., 1989, "The Prediction Capabilities of a Thermal Model of Flat Rolling," *Steel Research*, Vol. 60, pp. 403~406.
- (4) Montmitonnet, P. Cheot, J. L. et al., 1987, "A Mechanical Model of Cold Rolling Influence of the Friction Law on Roll Flattening Calculated by a Finite Element Method," *4th Int. Rolling Conf.*, Vol. 1, F9.1-9.9.
- (5) Buessler, P. and Schoenberger, P., 1987, "Analysis of Hot Rolling by an Elasto-Visco-Plastic Finite Element Method" *4th Int. Rolling Conf.*, Vol. 1, F8.1-F8.7.
- (6) Avitzur, B., 1964, "An Upper Bound Approach to Cold Strip Rolling," *Trans ASME*, Ser. B, Vol. 86, pp. 31~48.
- (7) Avitzur, B., 1962, "Pass Reduction Schedule for Optimum JProduction of a Hot Strip Mill," *Iron Steel Engineer*, No. 12, pp. 104~114.
- (8) Kiuchi, M., Hsiang, S. H. and Hwang, Y. M., 1987, "Analytical Model of Asymmetrical Rolling Processes of Sheets," *4th International rolling Conf.*, Vol. 2, F4.1-F4.9.
- (9) Dyja, H. and Pietrzyk, M., 1987, "A Study of Deformation During Rolling of Bimetal Plate and Sheet," *4th International rolling Conf.*, Vol. 2, F12.1-F12.7.
- (10) *Rolling Theory and its Application*, ed. ISIJ, 1969, Tokyo, pp. 157.
- (11) Avitzur, B. 1980, *Metal forming : The Application of Limit Analysis*, Merce Dekker, New York.
- (12) Thomsen, E. G. Yang, C. T. and Kobayashi, S., 1965, *Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing*, McMillan, New York, pp. 373~377.
- (13) Altan, T. Oh, S. I. and Gegel, H. L., 1983, *Metal Forming-Fundamentals and Applications*, ASM, Metals Park, pp. 83~85.
- (14) 판압연의 이론과 실제, 1983, 일본철강협회, pp. 18~19.
- (15) Avizur, B. 1968, *Metal Forming-Process and Analysis*, McGraw-Hill, New york
- (16) 문영훈 외 3인, 1995, "강판의 열간압연 선진율 예측모델 개발," 대한기계학회논문집, 제19권, 제7호, pp. 1597~1603.