

〈논 문〉

길이방향으로 보강된 복합재료 원통셸의 자유진동

이영신* · 김영완**

(1996년 2월 10일 접수)

Free Vibration of the Composite Laminated Cylindrical Shells Stiffened with the Axial Stiffeners

Young-Shin Lee and Young-Wann Kim

Key Words : Stiffener(보강재), Stringer(스트링거), Smeared Stiffener Theory(확산보강이론)

Abstract

The analytical solutions for the free vibration of cross-ply laminated composite cylindrical shell with axial stiffeners (stringers) are presented using the energy method. The stiffeners are taken to be smeared over the surface of shell with the smeared stiffener theory. The effect of the parameters such as the stacking sequences, the shell thickness, the shell radius-to-stringer depth ratio, the stringer depth-to-width ratio, the shell length-to-radius ratio are studied. By comparison with the previously published experimental results and the analytical results for the stiffened isotropic cylindrical shell and the unstiffened orthotropic composite laminated cylindrical shell, it is shown that natural frequencies can be determined with adequate accuracy.

기호 설명

- A_s : 스트링거의 단면적
 b_s : 스트링거의 폭
 d_s : 스트링거의 높이
 I_s : 스트링거의 중심에 대한 스트링거의 관성모멘트
 I_{os} : 셸의 중앙면에 대한 스트링거의 관성모멘트
 J_s : 스트링거의 비틀림강성
 J_{es} : 셸의 중앙면에 대한 스트링거의 극관성모멘트
 K_{ij} : 진동수방정식에서의 강성요소
 M_{ij} : 진동수방정식에서의 질량요소
 S : 셸의 중앙면에서 측정된 스트링거간의 중심거리
 u, v, w : 셸의 중앙면에서의 변위요소
 x, ϕ, z : 셸의 좌표계
 \bar{z}_s : 셸의 중앙면에서 스트링거의 중심까지의 거리

ω_{mn} : (m, n) 모드에서의 각진동수

1. 서 론

보강셸은 항공기, 우주선, 잠수함, 미사일 등에 널리 이용되고 있는 구조물로서 동적 하중을 받음으로써 진동이나 피로파괴 등을 유발시킬 수 있어 예전부터 많은 연구자들이 보강된 구조물에 대한 진동해석에 관심을 가져 왔다. 최근에 이르러 비강도 및 비강성이 우수한 복합재료를 채용하여 구조물의 두께를 얇게 할 수 있게 되어 일반 셸구조물에 복합재료가 활발히 이용되고 있다.

등방성 보강셸의 해석에 대해 Hoppman⁽¹⁾이 1958년 연구를 수행하였다. 그는 구조물의 표면에 보강요소를 확산시켜 등가굽힘 및 신장계수를 결정함으로써 전체적으로 보강된 원통셸의 동적해석을 하였다. Egle과 Sewall⁽²⁾은 다양한 경계조건을 갖는 링(ring) 및 스트링거(stringer)로 보강된 원통

*회원, 충남대학교 기계설계공학과

**회원, 충남대학교 대학원 기계설계공학과

셸에 대한 자유진동해석을 하였다. Rayleigh-Ritz 법이 대칭과 역대칭모드가 연성되고, 경계조건을 만족하는 가정된 변위식을 이용하여 적용되었다. 그러나 내평면관성이 무시되어 모든 결과가 측정치보다 약간 크게 나타났다. 그후 Wah와 Hu⁽³⁾는 링과 셸 요소의 미분운동방정식을 풀어 링보강셸의 자유진동에 대한 이론해를 제시하여 Hoppman⁽¹⁾의 실험값과 비교하였으나, 불일치가 발생되었다. 링보강셸의 동적 특성이 다양한 경계조건에 대해 이론 및 실험적으로 Sewall 등⁽⁴⁾에 의해 연구되었다. 이들 해석은 고려된 셸에 비해 상대적으로 큰 강성을 갖고 7개의 링을 갖는 셸에 대해 확산이론을 기초로 하였으나, 이 접근방법은 실험과 이론간의 불일치가 있었다. Sewall과 Naumann⁽⁵⁾은 Ref.[4]에서 인용된 링보강셸의 해석에 이용된 방법과 유사한 접근방법으로 스트링거의 효과를 셸의 표면에 확산시켜 해석하였다. 이들은 셸의 횡방향보강을 고려하였고, 이는 보강재가 존재함으로써 셸의 굽힘강성을 증가시킨다. Egle과 Sewall⁽²⁾와 유사하지만 포괄적인 방법이 Egle과 Soder⁽⁶⁾에 의해 제시되었으며, 여기서, 두 수직축에 대한 굽힘, 보강재의 신장 및 비틀림이 고려되었다. 편심되어 보강된 셸의 고유진동수에서 내평면 및 회전관성의 효과가 Parthan과 John⁽⁷⁾에 의해 연구되었다. 해석은 대칭 보강재로 제한하였고, 단지 하나의 주축에 대한 굽힘이 고려되었다. Rinehart와 Wang⁽⁸⁾은 전단 Diaphragm 경계조건을 갖는 스트링거 보강셸의 에너지범함수에 스트링거의 warping 강성을 포함시켰다. 축방향력을 받고 스트링거 또는 링보강셸에 대한 고유진동수는 Rosen과 Singer⁽⁹⁾에 의해 연구되었으며, 이들은 확산보강이론(smearred stiffener theory)을 해석에 사용하였으며, 이때 보강재의 회전관성이 무시되었으나 진동수의 실험 및 이론간에 비교적 좋은 일치치를 보였다. Singer 등⁽¹⁰⁾은 직선단을 따라 다양한 경계조건을 갖는 예하중 보강원통판넬의 진동해석을 위한 방법을 개발하였다. 이들 또한 이론해석에서 확산이론을 이용하였다. 보강이 되지 않은 판넬의 고유진동수는 다른 기존 문헌의 결과와 잘 일치하였으나, 보강판넬에 대한 예측 고유진동수는 제시하지 않았다. 1989년에 Mustafa 등⁽¹¹⁾은 에너지범을 이용하여 스트링거 또는 링으로 보강된 셸에 대한 진동해석을 수행하였으며, 두가지 보강재를 동시에 고려한 셸에 대해서도 해석을 하였다. Langley⁽¹²⁾는 확산이론을 이

용하여 스트링거 및 셸의 내부에 바닥판(floor)으로 보강된 구조물에 대해 진동해석을 했다. 현재까지 많은 연구자들이 복합재료의 기계적 우수성을 고려하여 복합재료로 만들어진 보강되지 않은 셸구조물에 대한 진동해석을 비교적 많이 수행하였으나 앞에서 제시된 바와 같이 보강구조물이 모두 등방성재료로 이루어 졌으며, 본 연구에서 수행하고자 하는 복합재료적층원통셸에 대해서는 그다지 많은 연구가 이루어지지 않았다. Reddy 등⁽¹³⁾은 단지 원통셸만이 서로 물성이 다른 등방성재료로 적층이 되고 보강재는 등방성재료로 단일적층된 셸에 대해 좌굴을 수행하였으며, 최근 1995년에 Schokker 등⁽¹⁴⁾은 복합재료로 적층된 링보강원통셸에 대해 동적환경에서의 좌굴거동을 연구하였다. 그리고 국내에서는 이영신 등이 보강원통셸의 최적구조설계에 대한 연구⁽¹⁵⁾와 보강적층원통셸, 판넬의 진동해석 및 좌굴해석^(16,17)과 유체로 채워진 보강원통셸의 자유진동해석⁽¹⁸⁾을 수행하였다.

이와 같이 복합재료적층 보강셸에 대한 진동해석 결과는 매우 미미한 상태이다. 따라서 본 연구에서는 복합재료로 적층된 길이방향 보강재로 보강된 원통셸에 대해 에너지범을 이용하여 진동해석을 수행하였으며 보강재에 대해서는 확산 보강이론을 근거로 하여 해석에 이용되었다.

2. 수식화

본 연구에서 고려된 복합재료 적층원통셸의 각층은 완전하게 결합되었으며, Fig. 1과 같이 길이 L ,

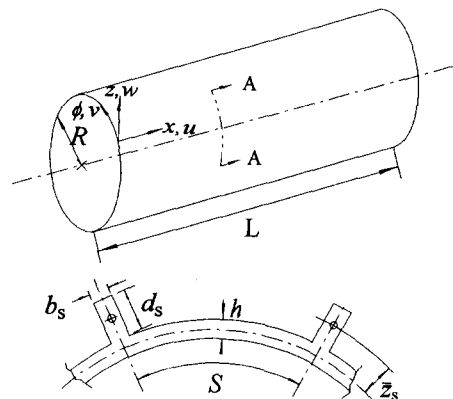


Fig. 1 Coordinate system and stiffener cross-section for the composite cylindrical shell
Stringer: Section A-A

두께 h 및 반경 R 을 갖는다. 이 때의 좌표계는 (x, ϕ, z) 로 표현되며, x 는 축방향, ϕ 는 원주방향이고, z 는 반경방향을 나타내며, 각각의 방향에 대한 변위성분을 u, v, w 로 표현하였다. 그리고 복합재료 원통셸은 길이방향 보강재인 스트링거로 보강이 되었으며, 보강재의 형태를 Fig. 1에 나타냈다.

여기서 d_s 와 b_s 는 각각 스트링거의 높이 및 폭을 나타내며, \bar{z}_s 는 셸의 중앙면에서 보강재의 중심까지의 거리이다.

2.1 변형에너지

먼저 원통셸에 대한 변형에너지는 다음과 같이 된다.

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^L [N_x \epsilon_x + N_\phi \epsilon_\phi + N_{x\phi} \epsilon_{x\phi} + M_x \kappa_x + M_\phi \kappa_\phi + M_{x\phi} \kappa_{x\phi}] dx d\phi dz \quad (1)$$

여기서, $N_x, N_\phi, N_{x\phi}, M_x, M_\phi, M_{x\phi}$ 는 합응력 및 합모멘트로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_\phi \\ N_{x\phi} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\phi \\ \sigma_{x\phi} \end{bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}_{ij}^{(k)}] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\phi \\ \epsilon_{x\phi} \end{bmatrix} dz \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}_{ij}^{(k)}] \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\phi \\ \kappa_{x\phi} \end{bmatrix} z dz \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_\phi \\ M_{x\phi} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\phi \\ \sigma_{x\phi} \end{bmatrix} z dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}_{ij}^{(k)}] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\phi \\ \epsilon_{x\phi} \end{bmatrix} z dz \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}_{ij}^{(k)}] \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\phi \\ \kappa_{x\phi} \end{bmatrix} z^2 dz \quad (3)$$

여기서, N 은 적층셸에서의 적층수를 나타내고, h_k 와 h_{k+1} 는 Fig. 2에 도시된 것처럼 셸의 중앙면에서 k 번째층의 내외면까지의 거리를 나타낸다. 그리고 $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 는 k 번째층에 대한 변환축소 강성계수이다. 따라서 식 (2)와 (3)을 이용하면 변형에너지는 다음과 같이 재정리된다.

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \{ \bar{Q}_{11}^{(k)} \epsilon_x^2 + 2 \bar{Q}_{12}^{(k)} \epsilon_x \epsilon_\phi \\ &\quad + \bar{Q}_{22}^{(k)} \epsilon_\phi^2 + \bar{Q}_{66}^{(k)} \epsilon_{x\phi}^2 \\ &\quad + z (2 \bar{Q}_{11}^{(k)} \epsilon_x \kappa_x + 2 \bar{Q}_{22}^{(k)} \epsilon_\phi \kappa_\phi) \\ &\quad + z^2 (\bar{Q}_{11}^{(k)} \kappa_x^2 + 2 \bar{Q}_{12}^{(k)} \kappa_x \kappa_\phi + \bar{Q}_{22}^{(k)} \kappa_\phi^2 \\ &\quad + \bar{Q}_{66}^{(k)} \kappa_{x\phi}^2) \} (R+z) dz dx d\phi \end{aligned} \quad (4)$$

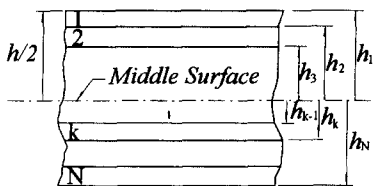
그리고 변형률 $\epsilon_i = (i=x, \phi, x\phi)$ 및 곡률 $\kappa_i = (i=x, \phi, x\phi)$ 은 Flugge⁽¹⁹⁾ 이론에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u, x \\ \epsilon_\phi &= \frac{v, \phi}{R} + \frac{w}{R+z} \\ \epsilon_{x\phi} &= \frac{u, \phi}{R+z} + \frac{R+z}{R} v, x \\ \kappa_x &= -w, xx \\ \kappa_\phi &= -\frac{w, \phi\phi}{R(R+z)} \\ \kappa_{x\phi} &= -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+z} \right) w, x\phi \end{aligned} \quad (5)$$

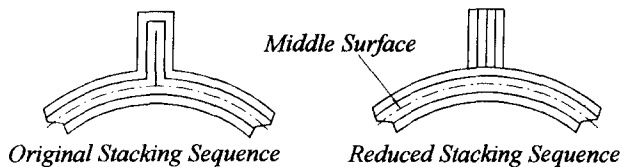
한편 고려된 셸은 양단이 단순지지된 경계조건을 가지며 다음과 같은 수학적 표현식을 갖는다.

$$\begin{aligned} v(x, \phi, t) &= w(x, \phi, t) = M_x(x, \phi, t) \\ &= N_x(x, \phi, t) = 0 \quad \text{at } x=0, L \end{aligned} \quad (7)$$

단순지지 경계조건을 만족하는 변위식을 삼각함수



(a) Stacking sequence for the laminated structure



(b) Stacking sequence for the stringer stiffener

Fig. 2 Stacking sequence of the stiffened laminated composite cylindrical shell

를 이용하여 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= u_{mn} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\phi \cos \omega_{mn} t \\ v &= v_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin n\phi \cos \omega_{mn} t \\ w &= W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\phi \cos \omega_{mn} t \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} 는 각 방향에 대한 진폭을 나타내며, ω_{mn} 은 각 모드에 대한 각진동수를 나타낸다. 가정된 변위식 (8)과 변형률 및 곡률식 (5, 6)을 이용하면 식 (4)의 변형에너지는 다음과 같이 진폭항으로 정리된다.

$$\begin{aligned} U_c &= [\alpha_{11}^c U_{mn}^2 + \alpha_{22}^c V_{mn}^2 + \alpha_{33}^c W_{mn}^2 \\ &\quad + 2\alpha_{12}^c U_{mn} V_{mn} + 2\alpha_{23}^c U_{mn} W_{mn}] \frac{L\pi}{4} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, 계수 α_{ij}^c 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^c &= \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (A_{11}R + B_{11}) \\ &\quad + n^2 \left(\frac{A_{66}}{R} - \frac{B_{66}}{R^2} + \frac{D_{66}}{R^3} \right) \\ \alpha_{22}^c &= \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(A_{66}R + \frac{3D_{66}}{R} \right) \\ &\quad + n^2 \left(\frac{A_{22}}{R} + \frac{B_{22}}{R^2} \right) \\ \alpha_{33}^c &= D_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 R \\ &\quad + \left(\frac{mn\pi}{L} \right)^2 \frac{D_{12}}{R} + \frac{n^4 D_{22}}{R^3} \\ &\quad + \frac{A_{22}}{R} + \frac{D_{22}}{R^3} - \frac{2n^2 D_{22}}{R^3} \\ &\quad + 4 \left(\frac{mn\pi}{L} \right)^2 \frac{D_{66}}{R} \\ \alpha_{12}^c &= \frac{mn\pi}{L} (A_{12} + A_{66}) \\ \alpha_{13}^c &= - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 (B_{11}R + D_{11}) \\ &\quad + \frac{m\pi}{L} A_{12} + \frac{mn^2\pi}{L} \left(\frac{2B_{66}}{R} - \frac{D_{66}}{R^2} \right) \\ \alpha_{23}^c &= \frac{m^2 n \pi^2}{L^2 R} D_{12} + \frac{n^3}{R^2} B_{22} + \frac{n}{R} A_{22} \\ &\quad + \frac{m^2 n \pi^2}{L^2} \left(2B_{66} + \frac{3D_{66}}{R} \right) \end{aligned} \quad (9a)$$

여기서, A_{ij} , B_{ij} 와 D_{ij} 는 복합재료 적층재에 대한 신장, 연성 및 굽힘강성계수로 다음과 같이 정의된다.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} [h_k - h_{k+1}]$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} [h_k^2 - h_{k+1}^2] \quad (10)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} [h_k^3 - h_{k+1}^3]$$

한편 길이방향 보강재인 스트링거에 대한 변형에너지는 확산이론을 이용하면 다음과 같은 표현식으로 이루어진다.

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2S} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[E_{xs} (A_s u, x^2 - 2\bar{z}_s A_s u, x w, xx \right. \\ &\quad \left. + I_{os} w, xx) + G_{x\phi s} J_s \left(\frac{w, x\phi}{R} - \frac{V, x}{R} \right)^2 \right] dx d\phi \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 아래첨자 (s)는 스트링거를 나타내며, S는 보강재간의 거리이고 \bar{z}_s 는 쉘의 중앙면에서 보강재의 중심까지의 거리이다. A_s 는 보강재의 단면적, I_{os} 는 쉘의 중앙면에 대한 보강재의 관성모멘트이고, J_s 는 보강재의 비틀림강성으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} I_{os} &= I_s + A_s \bar{z}_s^2 \\ I_s &= b_s d_s^3 / 12 \\ J_s &= d_s b_s^3 / 3 \end{aligned} \quad (12)$$

스트링거는 Fig. 2에서 나타난 것처럼 대칭적층되기 때문에 각 방향에 대한 탄성계수는 다음식을 이용하면 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{xs} &= (A_{11s} A_{22s} - A_{12s}^2) / A_{22s} \\ G_{x\phi s} &= A_{66s} \end{aligned} \quad (13)$$

가정된 변위식을 대입하여 적분을 취하면 다음과 같이 스트링거 보강재에 대한 변형에너지 진폭의 항으로 만들어진다.

$$\begin{aligned} U_s &= [\alpha_{11}^s U_{mn}^2 + \alpha_{22}^s V_{mn}^2 + \alpha_{33}^s W_{mn}^2 \\ &\quad + 2\alpha_{13}^s U_{mn} W_{mn} + 2\alpha_{23}^s V_{mn} W_{mn}] \frac{L\pi}{4} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^s &= \frac{E_{xs} A_s}{S} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \\ \alpha_{13}^s &= - \frac{\bar{z}_s E_{xs} A_s}{S} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \\ \alpha_{22}^s &= \frac{G_{x\phi s} J_s}{S} \left(\frac{m\pi}{RL} \right)^2 \\ \alpha_{23}^s &= \frac{G_{x\phi s} J_s n}{S} \left(\frac{m\pi}{RL} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\alpha_{33}^s = \frac{1}{S} \left[E_{xs} I_{os} \left(\frac{m\pi}{RL} \right)^4 + G_{x\phi s} J_s \left(\frac{m\pi}{RL} \right)^2 \right] \quad (14a)$$

2.2 운동에너지

고려된 복합재료 원통셸의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_c = \frac{1}{2} \rho_t \int_0^L \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R \, dx \, d\phi$$

$$\rho_t = \sum_{k=1}^N \rho_k h_k \quad (15)$$

여기서, (\cdot) 는 시간에 대한 미분을 나타내며, ρ_k 는 k 번째층의 밀도이다. 정의된 운동에너지에 가정된 변위식을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$T_c = \omega_{mn}^2 [\beta_{11}^t (U_{mn}^2 + V_{mn}^2 + W_{mn}^2)] \frac{L\pi}{4}$$

$$\beta_{11}^t = \rho_t R \quad (16)$$

한편 스트링거보강재에 대한 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_s = \frac{1}{2S} \rho_s \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[A_s (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2A_s \bar{z}_s \left(-\dot{u}\dot{w}_x + \frac{\dot{v}^2}{R} - \frac{\dot{v}\dot{w}_\phi}{R} \right) + I_{os} \dot{w}_x^2 + \frac{J_{es}}{R^2} (\dot{v} - \dot{w}_\phi)^2 \right] dx \, d\phi \quad (17)$$

여기서, J_{es} 는 셸의 중앙면에 대한 보강재의 극관성모멘트이다. 이에 대해 가정된 변위식을 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$T_s = \omega_{mn}^2 [\beta_{11}^s U_{mn}^2 + \beta_{22}^s V_{mn}^2 + \beta_{33}^s W_{mn}^2 + 2\beta_{13}^s U_{mn} W_{mn} + 2\beta_{23}^s V_{mn} W_{mn}] \frac{L\pi}{4} \quad (18)$$

여기서,

$$\beta_{11}^s = \frac{\rho_s A_s}{S}$$

$$\beta_{22}^s = \frac{\rho_s}{S} \left(A_s + \frac{2A_s \bar{z}_s}{R} + \frac{J_{es}}{R^2} \right)$$

$$\beta_{33}^s = \frac{\rho_s}{S} \left(A_s + I_{os} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{J_{es} n^2}{R^2} \right)$$

$$\beta_{13}^s = -\frac{\rho_s A_s \bar{z}_s}{S} \frac{m\pi}{L}$$

$$\beta_{23}^s = \frac{\rho_s}{S} \frac{n}{R} \left(A_s \bar{z}_s + \frac{J_{es}}{R} \right) \quad (18a)$$

2.3 진동수방정식

스트링거로 보강된 원통셸에 대한 총 변형에너지 및 운동에너지는 각각의 에너지를 합하면 된다.

$$U_t = U_c + U_s$$

$$T_t = T_c + T_s \quad (19)$$

보강된 원통셸에 대한 진동수방정식은 다음의 Rayleigh-Ritz법을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial X} (U_t - T_t) = 0$$

$$X = U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} \quad (20)$$

식 (20)을 적용하면 다음과 같은 행렬형태의 진동수방정식이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \omega_{mn}^2 M_{11} & K_{12} & K_{13} - \omega_{mn}^2 M_{13} \\ & K_{22} - \omega_{mn}^2 M_{22} & K_{23} - \omega_{mn}^2 M_{23} \\ \text{Symmetric} & & K_{33} - \omega_{mn}^2 M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

계수 K_{ij} , M_{ij} 는 각각 강성 및 질량요소로서, $K_{ij} = \alpha_{ij}^s + \alpha_{ij}^t$, $M_{ij} = \beta_{ij}^s + \beta_{ij}^t$ ($i, j=1, 2, 3$)이다. 따라서 이 고유치문제를 풀어 보강된 원통셸에 대한 진동수를 예측할 수 있다.

3. 수치결과 및 토의

본 연구에서 얻을 해의 정확도를 검증하기 위해 먼저 보강되지 않은 복합재료 적층원통셸에 대한 결과를 참고문헌 (20)과 비교하였다. 사용된 재료 물성 및 기하형상은 Table 1에 제시된 것처럼 glass/epoxy 복합재료로 직교이방성매개변수 (E_{11}/E_{22})는 비교적 작은 2.5이며, 셸의 두께는 2 mm이다. 고려된 적층방법은 셸의 중앙면에 대해 대칭이고, cross-ply로 3적층된 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 로 되어 있다.

Table 2는 Table 1에서 제시된 원통셸에 대해

Table 1 Properties of the glass/epoxy composite

Material properties	Layer thickness (h=2 mm)
$E_{22}=7.6\text{GPa}$	Inner layer=h/3 ($\theta=0^\circ$)
$E_{11}/E_{22}=2.5$	Middle layer=h/3 ($\theta=90^\circ$)
$G_{12}=4.1\text{GPa}$	Outer layer=h/3 ($\theta=0^\circ$)
$\nu_{12}=0.26$	
$\rho=1643 \text{ kg/m}^3$	

다양한 원주방향 반파수에 대한 진동수매개변수를 참고 Ref. (20)의 결과와 함께 제시하였다. 이 때 진동수 매개변수는 $\bar{\omega} = \omega \sqrt{\rho R^2 / E_{22}}$ 로 정의되며, 여러가지 길이 대 반경비가 고려되었다. Table 2에 나타난 것처럼 셸의 길이 대 반경비 L/R 가 클수록 서로간의 차이가 커진다. 즉, L/R 가 1일 때는 거의 같으나, $L/R=5$ 일 때는 최대 2.5%, $L/R=10$ 일 때는 최대 3.5%, 그리고 $L/R=20$ 일 때는 최대 4.05%의 불일치를 보이고 있으나 Donnell 이론을 이용하여 결과를 제시한 참고문헌과 잘 일치하고 있다.

한편 길이방향 보강재에 의해 보강된 원통셸에 대한 진동해석결과의 비교를 위해 Ref. (11)의 결과를 이용하였다. 이 때 고려된 원통셸은 등방성이고, 60개의 길이방향 보강재가 셸의 외부에 보강되

었으며 Table 3 같은 재료물성 및 기하형상을 갖는다. 여기서 셸의 길이 대 반경 $L/R=2.52$, 셸의 두께 대 반경 $h/R=0.0027$, 보강재의 높이 대 폭 $d_s/b_s=2.75$ 이고, 보강재의 폭 대 셸의 두께 $b_s/h=3.93$ 이다.

주어진 자료를 이용하여 해석한 결과를 Table 4에 제시하였다. 고려된 길이방향 반파수 $m=1$ 이고, 원주방향 반파수의 변화에 다른 결과를 이산이론(discrete theory)을 이용하여 구한 Refo (11)과 실험을 통하여 구한 Ref. (2)의 결과를 비교하였다. Table 4에서 나타난 것처럼 이산보강이론을 통하여 구한 Ref. (11)의 결과와의 차이는 최대 5% 미만으로 1차 모드가 나타나는 $(m, n)=(1, 7)$ 에서 4.79%의 차이를 보이고 있다. 그리고 실험을 통해 구한 Ref. (2)간의 차이는 저차모드($n <$

Table 2 Comparison of the fundamental frequency parameter $\bar{\omega} = \omega \sqrt{\rho R^2 / E_{22}}$ for a $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ laminated cylindrical shell ($m=1$, $h/R=0.002$, $h=2$ mm)

m=1		Circumferential wave number (n)					
L/R	Method	1	2	3	4	5	6
1	Ref. (20)	1.061285	0.804058	0.598340	0.450163	0.345288	0.270814
	Present	1.061159	0.803994	0.598273	0.450024	0.344993	0.270249
5	Ref. (20)	0.248635	0.107214	0.055140	0.033591	0.026129	0.026362
	Present	0.248649	0.107215	0.055086	0.033758	0.025700	0.025720
10	Ref. (20)	0.083910	0.030044	0.015376	0.012605	0.015784	0.021763
	Present	0.083917	0.030018	0.015204	0.012179	0.015217	0.021153
20	Ref. (20)	0.023594	0.008032	0.006324	0.009588	0.014823	0.021394
	Present	0.023594	0.007919	0.005894	0.009037	0.014246	0.020805

Table 3 Geometric and structural properties of the stiffened isotropic cylindrical shell

Geometric properties		Structural properties	
No. of stringers	60	E (GPa)	68.95
Radius (mm)	242	ν	0.3
Length (mm)	609.6	ρ (kg/m ³)	2714
Shell thickness (mm)	0.65		
Depth of stiffener (mm)	7.02		
Width of stiffener (mm)	2.554		
Stringer type	External		

Table 4 Natural frequencies (Hz) of an isotropic cylindrical shell stiffened with 60 external stringers

Method	Circumferential wave number (n)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ref. (11) Discrete	1141	674	427	297	226	191	179	185	204	233	269	312
Discrepancy (%)	0.18	0.15	0.47	0.67	2.17	3.54	4.79	4.64	4.23	2.92	1.47	0.00
Ref. (2) Experiment	—	—	—	—	231	197	189	199	219	252	290	336
Discrepancy (%)	—	—	—	—	0.00	0.51	0.53	2.51	2.74	4.76	5.52	7.14
Present	1143	675	429	299	231	198	188	195	213	240	274	312

9)에서는 3% 미만이고, $n=12$ 에서 최대 7.14%의 차이를 보이고 있으나 비교적 잘 일치하고 있다.

일반적으로 구조물의 진동수를 높이거나 낮춤으로써 공진을 피할 수 있다. 그러나 진동수를 낮추기 위해서는 질량을 키우거나 강성을 저하시켜야 하는데 이것은 구조적으로 많은 불이익이 발생할 수 있기 때문에 일반적으로 강성을 크게 함으로써 진동수를 높여 공진을 피하려고 한다. 이러한 목적에 따라 본 연구에서도 진동수를 높이려는 측면에서 여러가지가 논의될 것이다.

Fig. 3에서는 대칭적층 및 역대칭적층한 보강원

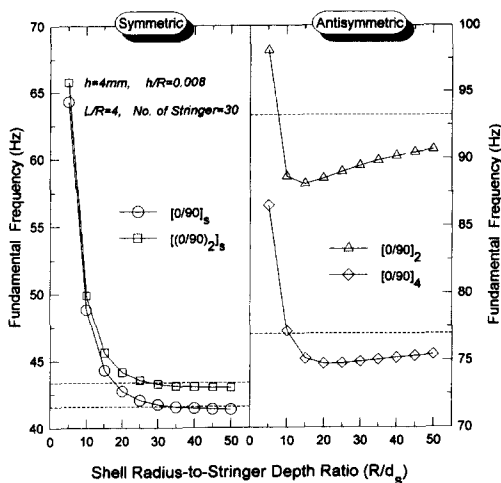


Fig. 3 Variation of the fundamental frequency with R/d_s ratio for the symmetric and antisymmetric cylindrical shells ($h=b_s=4$ mm, $h/R=0.008$, $L/R=4$, No. of stringer=30)

통셸의 반경 대 보강재의 높이비(R/d_s)에 따른 기본진동수의 변화를 보여 주고 있다. 여기서 보강재의 수는 30개이며, 셸의 두께 및 보강재의 폭은 4 mm, $h/R=0.008$, $L/R=4$ 이다. 대칭 및 역대칭적층인 경우 작은 R/d_s 에서는 보강을 함으로써 보강이 되지 않은 셸의 기본진동수(점선)보다 큰 진동수를 얻을 수 있으나, R/d_s 가 증가할 수록, 즉 보강재의 높이가 작아질수록 기본진동수는 감소하여 비보강 원통셸의 기본진동수보다 작아 지나, 어느 일정비 이상이 되면 보강하지 않은 원통셸의 기본진동수에 접근을 한다. 또한 대칭적층인 경우 비보강원통셸의 기본진동수보다 큰 진동수에서 작은 진동수로 변환되는 변환점이 R/d_s 가 비교적 큰 곳에서 발생이 되나, 역대칭적층인 경우에는 매우 작은 R/d_s 비에서 변환이 된다. 이와 같은 현상은 대칭적층인 경우에는 보강을 함으로써 전반적으로 보강셸에 대해 강성이 커졌으나, 역대칭적층에서는 강성의 증가보다는 중량증가의 효과가 더 크게 작용하기 때문에 나타나는 현상이다. 따라서 길이방향 보강재로 보강을 하여 진동수를 높이기 위해 대칭적층인 경우에는 보강재의 높이를 적절히 선택하여 얻을 수 있으나, 역대칭적층인 경우에는 쉽게 진동수를 높일 수가 없다. 즉 역대칭적층에 대해서는 작은 R/d_s 비에 대해서만 진동수를 높일 수 있으나, 원통셸의 반경에 비해 보강재의 높이를 크게 할 수 없기 때문이다. 이와 같이 보강을 함으로써 대칭적층이 역대칭보다 진동수를 쉽게 높일 수 있다.

한편 Fig. 4의 결과는 $[0^{\circ}/90^{\circ}]_2$ 역대칭 및 $[0^{\circ}/90^{\circ}]_s$

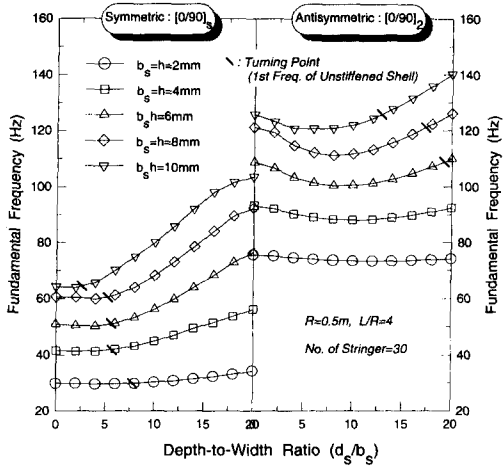


Fig. 4 Variation of the fundamental frequency with d_s/b_s ratio for the antisymmetric and symmetric cylindrical shells ($R=0.5$ m, $L/R=4$, No. of stringer=30)

대칭적층에 대한 것으로 아래첨자(s)는 적층방법 [...]에 대한 대칭을 나타내고, 숫자로 된 아래첨자는 [...] 안의 반복수를 나타낸다. 고려된 기하형상은 $R=0.5$ m, $L/R=4$ 이며, 30개의 보강재를 갖는 원통셸에 대해 보강재의 크기(d_s/b_s)변화에 따른 기본진동수의 거동을 나타내고 있으며 (\\)는 보강되지 않은 셸의 기본진동수로서 비보강셸의 기본진동수보다 큰 곳에서 작은 곳으로 변환되는 지점을 나타낸다. 고려된 역대칭 원통셸에 대해 그림에서처럼 실린더의 두께를 2 mm로 하였을 때 변환점이 발생되지 않고 있으나, 매우 큰 (d_s/b_s)비에서 변환될 것이다. 그리고 $h=4$ mm일 때는 변환되는 지점이 $d_s/b_s=19.8$ 에서 발생되며 $h=6$ mm에서는 약 $d_s/b_s=19$, 그리고 $h=8$ mm에서는 $d_s/b_s=17$ 에서 변환되는 것처럼 두께가 두꺼울 수록 작은 d_s/b_s 비에서 변환된다. 즉 두께가 두꺼울 수록 보강재의 높이를 폭에 비해 높게 하지 않아도 보강되지 않은 셸보다 진동수를 높게 할 수 있다. 그러나 역대칭 적층의 경우 변환이 비교적 큰 d_s/b_s 에서 일어나고 있어 실제적으로 큰 d_s/b_s 는 이용가치가 그리 크지 않다. 그리고 대칭적층으로 하였을 경우 역대칭적층에 비해 비교적 작은 d_s/b_s 비에서 변환이 일어나며, 역대칭적층보다 보강재의 높이를 높게 하지 않아도 진동수를 비보강셸보다 높게 할 수 있다.

Fig. 5에서는 $[0^\circ/90^\circ]_2$ 역대칭 및 $[0^\circ/90^\circ]_s$ 대칭

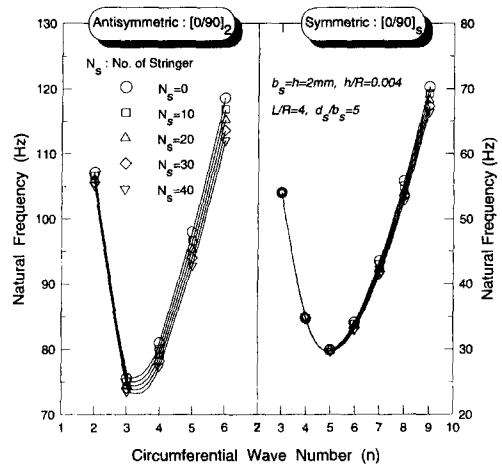


Fig. 5 Variation of the natural frequencies with various number of stringer for $[0^\circ/90^\circ]_2$ antisymmetric and $[0^\circ/90^\circ]_s$ symmetric cylindrical shell ($m=1$, $h=b_s=2$ mm, $d_s/b_s=5$, $h/R=0.004$, $L/R=4$)

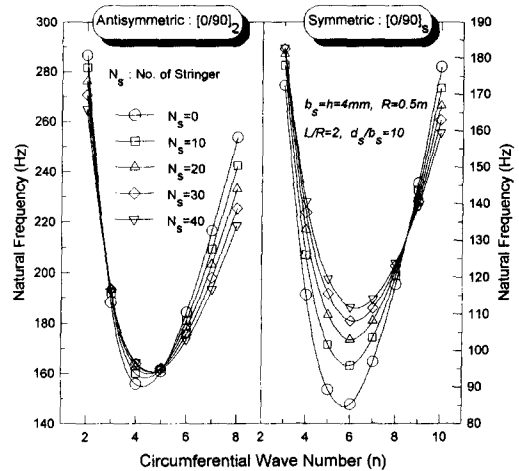


Fig. 6 Variation of the natural frequencies with various number of stringer for $[0^\circ/90^\circ]_2$ antisymmetric and $[0^\circ/90^\circ]_s$ symmetric cylindrical shell ($m=1$, $h=b_s=4$ mm, $d_s/b_s=10$, $h/R=0.008$, $L/R=2$)

4적층된 복합재료 원통셸에 대해 스트링거의 보강개수 변화에 따라 진동수에 어떠한 영향을 미치는가를 검토하였다. 고려된 길이방향 반파수 $m=1$ 이고, 보강재수는 최대 40개까지 고려하였으며, 보강재의 두께는 셸의 두께와 같은 2 mm이고, $d_s/b_s=5$, $L/R=4$, 그리고 $h/R=0.004$ 이다. 그림에 나타난 것처럼 역대칭 및 대칭적층에 대해 보강을 함

으로써 진동수는 모든 원주방향 반파수에 대해서는 전반적으로 감소를 하며, 이와 같은 현상은 앞의 Figs. 3, 4에서 제시된 것처럼 보강을 함으로써 진동수가 감소되는 셸의 두께나 보강재의 폭을 선택하였기 때문에 나타나는 현상이다. 그리고 전반적으로 보강의 효과가 작은 원주방향 반파수보다 큰 원주방향 반파수에 큰 영향을 미치고 있다. 그러나 Fig. 6에서는 Fig. 5의 같은 적층에 대해 셸 및 보강재의 기하형상을 바꾸었을 때, 즉 보강재의 두께 및 셸의 두께를 2 mm, $d_s/b_s=10$, $L/R=2$, 그리고 $h/R=0.008$ 로 하면, 그림에 제시된 것처럼 대칭적층에 대해 작은 원주방향 반파수 ($n < 8$)에서는 고유진동수가 보강재수의 증가에 따라 증가를 하나 큰 원주방향 반파수 ($n > 8$)에서는 고유진동수가 반대로 감소하는 경향을 나타내고 있다. 그리고 역대칭 적층에 대해서도 유사한 경향을 나타내고 있으나 원주방향 반파수 $n < 5$ 에서 고유진동수가 증가를 하며 그 이상이 되면 고유진동수가 감소를 한다. 그리고 대칭 및 역대칭적층 모두에 대해 기본진동수는 증가하는 거동을 하며, 기본진동수의 증가량이 역대칭적층에 비해 대칭적층에서 보다 크게 나타나고 있어 대칭적층이 역대칭적층에 비해 보강의 영향이 크게 작용한다.

한편 Fig. 7에서는 $[0^\circ/90^\circ]_N$ 역대칭 및 $[(0^\circ/90^\circ)_N]_s$ 대칭적층에 대해 적층수를 변화시켰을 때의 영향을 나타내고 있으며, 아래첨자(N)은 $(0^\circ/90^\circ)$ 적층의 반복수를 나타낸다. 이 때 셸의 두께 및 보강재의 폭은 모든 적층방법에 대해 $h=b_s=2$ mm이며, d_s/b_s 는 5, h/R 는 0.004, L/R 는 4이며, 30개의 스트링거로 보강되었다. 그림에 나타난 것처럼 역대칭적층에 대해서는 적층수에 따라 기본진동수(1차 고유진동수)가 나타나는 원주방향 반파수가 변하고 있다. 즉, $[0^\circ/90^\circ]$ 및 $[0^\circ/90^\circ]_2$ 에 대해서는 $n=3$ 에서 기본진동수가 결정이 되나, $[0^\circ/90^\circ]_4$ 및 $[0^\circ/90^\circ]_8$ 에 대해서는 $n=4$ 에서 기본진동수가 나타났으며, 대칭적층에 대해서는 적층수가 증가하여도 기본진동수가 나타나는 반파수는 변하지 않는다. 그리고 적층수를 증가시키므로써 진동수는 역대칭적층에 대해서는 감소하고, 대칭적층에 대해서는 증가하는 경향을 갖으며, 이 때 진동수의 증감율은 적층수에 따라 급격히 감소를 한다. 그리고 적층수의 영향이 작은 원주방향 반파수보다 큰 원주방향 반파수에 대해 크게 작용하고 있다.

원통셸의 길이 대 반경비의 영향을 Fig. 8에 제

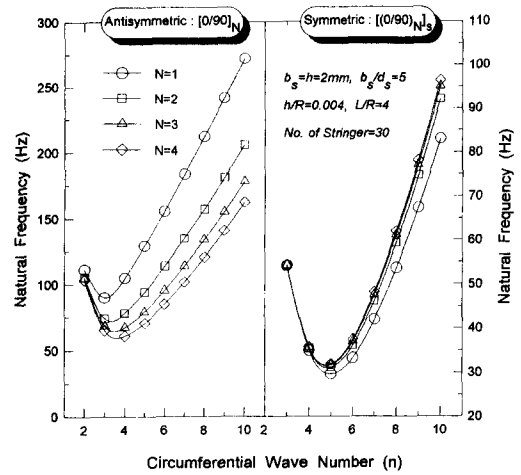


Fig. 7 The natural frequencies for $[0^\circ/90^\circ]_N$ antisymmetric and $[(0^\circ/90^\circ)_N]_s$ symmetric cylindrical shell with 30 stringers ($m=1$, $h=b_s=2$ mm, $d_s/b_s=5$, $h/R=0.004$, $L/R=4$)

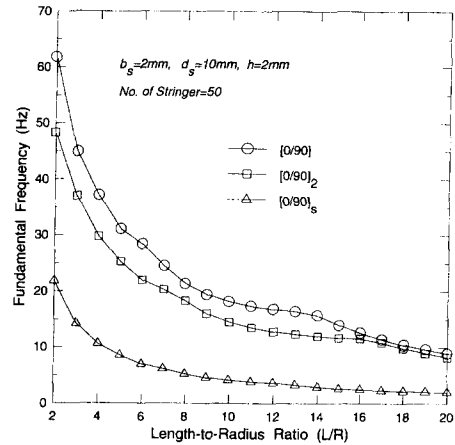


Fig. 8 Variation of the fundamental frequency with L/r ratio for the composite cylindrical shells with 50 stringers ($h=b_s=2$ mm, $d_s/b_s=5$, $h/R=0.002$)

시하였다. 이 때 고려된 원통셸은 50개의 스트링거를 가지며, $h/R=0.002$, $L/R=5$, $b=h=2$ mm, $d_s/b_s=5$, 적층방법은 대칭 적층 및 역대칭 적층을 모두 고려하였다. 그림에서처럼 역대칭적층이 대칭적층보다 큰 진동수를 가지며, Fig. 3에서 나타난 것처럼 적층수가 많으면, 진동수가 감소하는 거동을 한다. 그리고 길이 대 반경비가 커질 수록 진동수는 감소를 하며, 작은 L/R 비에 대해 진동수의

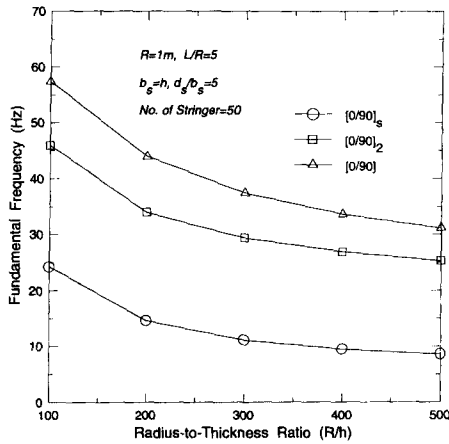


Fig. 9 Variation of the fundamental frequency with R/h ratio for the composite cylindrical shells with 50 stringers ($b_s=h$, $d_s/b_s=5$, $L/R=5$, $R=1$ m)

감소정도가 매우 급하며, L/R 비가 매우 커지면 진동수는 거의 일정한 값으로 수렴함을 예측할 수 있다.

Fig. 9에서는 여러가지 적층방법에 대해 쉘의 반경 대 두께비 R/h 의 변화에 따른 진동수의 변화를 보여 주고 있다. 이 때의 기하형상은 $R=1$ m, $L/R=5$, $b_s=h$, $d_s/b_s=5$ 이며 50개의 스트링거로 보강되었다. 그림에서처럼 역대칭 2 적층된 원통쉘이 가장 큰 진동수를 갖으며, 역대칭 적층이 대칭적층보다 큰진동수를 갖는다. 그리고 R/h 가 커질수록 즉, 두께가 얇아질수록 진동수는 감소하는 경향을 갖으며, R/h 비가 매우 커지면 진동수가 거의 일정한 값으로 접근함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 길이방향으로 보강된 복합재료 원통쉘에 대해 에너지법을 기초로 하여 진동해석을 수행하였으며, 보강되지 않은 복합재료원통쉘과 보강된 등방성원통쉘에 대해 기존의 자료와 비교한 결과 잘 일치하고 있다.

일반적으로 복합재료 원통쉘에 대해 보강유무에 관계없이 역대칭적층이 대칭적층보다 큰 진동수를 가지며, 길이방향으로 보강을 함으로써 보강재의 크기에 따라 진동수를 높일 수 있으나 역대칭적층에 대해서는 진동수를 높이기 쉽지가 않으며, 전반

적으로 진동수가 감소하는 결과를 낳았다. 보강재 수를 증가시키면 기하형상에 따라 모든 적층에 대해 기본진동수가 증가 또는 감소하기 때문에 보강재의 적절한 선택이 필요하다. 적층수의 증가는 역대칭적층에 대해서는 진동수가 감소하고, 대칭적층에 대해서는 진동수가 증가하며, 적층수가 매우 많아지면 일정한 값으로 접근한다. 그리고 적층수의 영향이 작은 원주방향 반파수 보다는 큰 원주방향 반파수에 대해 크게 작용한다. 모든 쉘에 대해 쉘의 길이 대 반경비 및 쉘의 두께 대 반경비가 증가할수록 진동수는 감소한다.

참고문헌

- (1) Hoppmann, W.H., 1958, "Some Characteristics of Flexural Vibrations of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shells," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 30, pp. 77~83.
- (2) Egle, D.M. and Sewall, J.L., 1968, "An Analysis of the Free Vibration of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shells with Stiffeners Treated as Discrete Elements," *AIAA Journal*, Vol. 3, pp. 518~526.
- (3) Wah, T. and Hu, W.C.L., 1968, "Vibration Analysis of Stiffened Cylinders Including Inter-Ring Motion," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 43, pp. 1005~1016.
- (4) Sewall, J.L., Clary, R.R. and Leadbetter, S.A., 1968, "An Experimental and Analytical Vibration Study of Ring Stiffened Cylindrical Shell Structures with Various Support Conditions," *NASA TN-D 2398*.
- (5) Sewall, J.L. and Nauman, E.C., 1968, "An Experimental and Analytical Vibration Study of Thin Cylindrical Shells with and without Longitudinal Stiffeners," *NASA TN-D 4705*.
- (6) Egle, D.M. and Soder, K.E., 1969, "A Theoretical Analysis of the Free Vibration of Discretely Stiffened Cylindrical Shells with Arbitrary End Conditions," *NASA CR-1316*.
- (7) Parthan, S. and Johns, D.J., 1970, "Effects of Inplane and Rotatory Inertia on the Frequencies of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 253~261.

- (8) Rinehart, S.A. and Wang, J.T., 1972, "Vibration of Simply Supported Cylindrical Shells with Longitudinal Stiffeners," *J. Sound and Vibration*, Vol. 24, pp. 151~163.
- (9) Rosen, A. and Singer, J., 1974, "Vibrations of Axially Loaded Stiffened Cylindrical Shell," *J. Sound and Vibration*, Vol. 34, pp. 357~378.
- (10) Singer, J., Rand, A. and Rosen, A., 1984, "Vibrations of Axially Loaded Stiffened Cylindrical Panels with Elastic Restraints," *J. Sound and Vibration*, Vol. 93, pp. 397~408.
- (11) Mustafa, B.A.J. and Ali, R., 1989, "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells," *Computers and Structures*, Vol. 32, No. 2, pp. 355~363.
- (12) Langley, R.S., 1992, "A Dynamic Stiffness Technique for the Vibration Analysis of Stiffened Shell Structures," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 156, No. 3, pp. 521~540.
- (13) Reddy, J.N. and Starnes, Jr, J.H., 1993, "General Buckling of Stiffened Circular Cylindrical Shells According to a Layerwise Theory," *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 4, pp. 605~616.
- (14) Schokker, A., Kasagi, A. and Sridharan, S., 1995, "Dynamic Interactive Buckling of Ring-Stiffened Composite Shells," *AIAA J.*, Vol. 33, No. 10, pp. 1956~1962.
- (15) 이영신, 김대원, 1989, "보강원통셸의 최적구조설계에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제13권, 제2호, pp. 205~212.
- (16) 이영신, 허남일, 1993, "구멍이 있는 보강된 적층원통셸의 좌굴 및 진동해석," 한국항공우주학회, 93년도 추계학술대회논문집, pp. 437~440.
- (17) 이영신, 강윤기, 1994, "보강된 적층복합재료 판넬의 좌굴 및 진동해석," 한국항공우주학회, 94년도 추계학술대회논문집, pp. 408~414.
- (18) 이영신, 염기언, 1995, "내부가 유체로 채워진 보강원통셸의 자유진동해석," 대한기계학회, 95년도 춘계학술대회논문집, pp. 721~725.
- (19) Flugge, W., 1962, *Stresses in Shells*, Springer, Berlin.
- (20) Lam, K.Y. and Loy, C.T., 1995, "Analysis of Rotating Laminated Cylindrical Shells by Different Thin Shell Theories," *J. Sound & Vibration*, Vol. 186, No. 1, pp. 23~35.