

<논 문>

## 7075-T6 Al 합금의 피로균열진전의 변동성에 대한 확률론적 해석

김정규\* · 심동석\*\*

(1995년 12월 30일 접수)

### A Stochastic Analysis of Variation in Fatigue Crack Growth of 7075-T6 Al alloy

Jung-Kyu Kim and Dong-Suk Shim

**Key Words :** Stochastic Markov Chain Model(확률론적 마르코프 연쇄모델), Fatigue Crack Growth(피로균열진전), 3-Parameter Weibull Distribution(3-변수 와이블분포), Stress Intensity Factor Range(응력확대계수 범위), Paris-Erdogan's Equation(P-E의 균열진전법칙), Random Variable(랜덤변수)

#### Abstract

The stochastic properties of variation in fatigue crack growth are important in reliability and stability of structures. In this study, the stochastic model for the variation of fatigue crack growth rate was proposed in consideration of nonhomogeneity of materials. For this model, experiments were conducted on 7075-T6 aluminum alloy under the constant stress intensity factor range. The variation of fatigue crack growth rate was expressed by random variables  $Z$  and  $r$  based on the variation of material coefficients  $C$  and  $m$  in the Paris-Erdogan's equation. The distribution of fatigue life with respect to the stress intensity factor range was evaluated by the stochastic Markov chain model based on the Paris-Erdogan's equation. The merit of proposed model is that only a small number of tests are required to determine this function, and fatigue crack growth life is easily predicted at the given stress intensity factor range.

#### 기 호 설 명

$P$  : 확률전이행렬

$q$  : 천이확률(성공확률)

$p$  : 실패확률

$P_0$  : 초기 손상확률벡터

$P_x$  : 임의의 손상상태  $x$ 에서의 손상확률벡터

$a_i$  : 임의의 손상상태  $i$ 에서의 균열길이

$a_0$  : 초기 균열길이

$a_n$  : 최종 균열길이

$\Delta K$  : 응력확대계수 범위

$C$  : Paris-Erdogan 식의 재료상수

$m$  : Paris-Erdogan 식의 재료상수

$da/dN$  : 균열진전속도

$E[\delta N]$  : 듀티사이클의 기대값

$Var[\delta N]$  : 듀티사이클의 분산

$Z$  : 재료상수  $C$ 에 대한 랜덤변수

$r$  : 재료상수  $m$ 에 대한 랜덤변수

$C_0$  :  $C(x)$ 의 기대값

$m_0$  :  $m(x)$ 의 기대값

$B$  : 시험편의 두께

\*회원, 한양대학교 기계설계학과

\*\*한양대학교 대학원

R : 응력비

## 1. 서 론

기계 구조물의 피로파손을 고려한 설계에 있어서는 재료의 안전성 및 신뢰성 확보가 중요하며 이를 위해 재료의 피로특성을 충분히 묘사할 수 있는 많은 실험데이터의 수식화가 필요하다.

일반적으로 재료에 대한 피로균열진전시험은 일정진폭 하중하에서 하중반복수에 대한 균열길이의 관계로부터 일정한 규칙성을 찾기 위하여 행하여져 왔다. 그러나 균열진전 과정은 재료의 공간적 요인에 의한 불균질성으로 인하여 피로균열진전 특성에는 여러 가지 불균일한 물리적 현상이 나타나는 경우가 많다. 따라서 이러한 변동성을 고려하기 위하여, 확률론적으로 피로균열진전 과정을 수식화하고 이와 관련된 확률적인 성질을 명확히 하려는 연구가 많다.

이러한 연구는 방법론적인 면에서 두 가지 형태로 구분된다. 하나는 피로균열진전에 대한 기본법칙인 Paris-Erdogan의 균열진전법칙<sup>(1)</sup>에 근거하여 얻어지는 모델<sup>(2-5)</sup>이고, 나머지는 이의 균열진전법칙에 근거하지 않는 것이다.<sup>(6-13)</sup> 첫번째 형태의 연구는 Paris-Erdogan의 균열진전법칙으로부터 Fokker-Planck의 방정식을 유도하고, 이 방정식의 해를 사용함으로써 균열진전에 대한 피로수명의 분포를 추정한다.<sup>(2,3)</sup> 이는 불확실성을 포함하는 피로균열진전을 분석하는데는 매우 타당하지만 피로균열진전에 대한 표본적인 모델을 정확하게 유도하기는 어렵다. 두번째는 Bogdanoff와 Kozin 등에 의하여 제시된 모델<sup>(6-13)</sup>로서, 불연속적인 Markov chain에 의하여 피로균열진전거동이 묘사된다.<sup>(11-13)</sup> 이 모델은 변동성을 포함한 피로균열진전의 표본적 과정을 묘사할 수 있으나 Paris-Erdogan의 식에 근거하지 않기 때문에 모델의 균열진전에 대한 물리적 의미가 불명확해진다.

한편 피로균열진전속도를 평가하기 위한 실험은 재료의 불균질성에 따른 균열진전의 변동성을 충분히 고려하여야 하므로 이에 따라 많은 실험이 필요할 뿐만 아니라, 경제적인 어려움도 따른다.

따라서 본 연구에서는 Paris-Erdogan의 균열진전법칙에 근거한 Markov chain 모델을 도입하고 응력확대계수 제어실험을 통하여 적은 수의 시험으

로도 피로균열진전속도에 대한 변동성을 고려할 수 있는 확률론적 방법을 제시하였다.

## 2. 피로균열진전에 대한 확률론적 모델

피로누적손상에 대한 Markov chain 모델에서는 균열길이  $\delta a$ 의 단계적 증가를 가정한다. 따라서 손상상태  $i$ 에서의 균열길이는 다음과 같이 정의된다.

$$a_i = a_0 + i\delta a \quad i=0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

손상상태  $i$ 에서 다음 단계로 천이할 확률(성공확률)  $q_i (q_i = 1 - p_i)$ 를 균열길이로 나타나는 응력확대계수의 함수로 보면 식 (2)라 할 수 있다.

$$q_i = q(\Delta K_i) = q(\Delta K(a_i)) \quad (2)$$

여기서, 천이확률  $q$ 는 Paris-Erdogan의 균열진전법칙 식 (3)을 사용하여 다음과 같은 과정에 의하여 구한다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3)$$

이 식에서 재료상수인  $C$ 와  $m$ 을 확률 변수로 가정하고, 균열선단의 위치  $x$ 에서의  $C$ 를  $C(x)$ ,  $m$ 을  $m(x)$ 라고 하면 식 (4)로 된다.

$$\frac{da}{dN} = C(x)(\Delta K)^{m(x)} \quad (4)$$

한편 응력확대계수 범위  $\Delta K$ 가 일정하면, Paris-Erdogan의 균열진전법칙에서 균열진전속도는 일정하다. 따라서 균열을  $\delta a$ 만큼 진전시키기 위한 듀티사이클(duty cycles)의 기대값  $E[\delta N]$ 은 재료상수  $C$  및  $m$ 의 변동을 고려한 랜덤변수  $Z$ ,  $r$ 을 도입하여 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\delta a}{E[\delta N]} = ZC_o(\Delta K)^{r m_o} \quad (5)$$

확률  $p^{(\delta n-1)}$ 을 갖는 듀티사이클( $\delta n-1$ )을 가정하면, 균열은 이 사이클 동안 진전하지 않는다. 그러나  $\delta n$ 번째의 사이클이 가해지면 균열은 진전하고 이때의 천이확률은  $q$ 이다. 따라서  $\delta N$ 의 확률분포의 기하분포는 다음과 같다.

$$P[\delta N = \delta n] = f_{\delta n}(\delta n) = qp^{\delta n-1} \quad (6)$$

그리고 듀티사이클 수의 평균과 분산은 기하분포의 1차, 2차 모멘트로 식 (7) 및 식 (8)과 같이 주

어진다.<sup>(6,7)</sup>

$$E[\delta N] = \sum_{\delta n=0}^{\infty} \delta n f_{\delta n} \\ = \sum_{\delta n=0}^{\infty} \delta n q(1-q)^{\delta n-1} = \frac{1}{q} \quad (7)$$

$$Var[\delta N] = E[\delta N^2] - (E[\delta N])^2 = \frac{1-q}{q^2} \quad (8)$$

위의 두 식을 이용하면 천이확률  $q$ 는 다음과 같다.

$$q = \frac{ZC_o}{\delta a} (\Delta K)^{m_o} \quad (9)$$

그러므로 확률천이행렬  $P$ 는 손상상태  $i$ 에서의 실패확률  $p_i$ 와 다음 단계로의 천이확률  $q_i$ 로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서, 실패확률  $p_i > 0$ 이며, 실패확률  $p_i$ 와 천이확률  $q_i$ 의 합은 1이다. 또한 초기 손상상태에 대한 확률벡터  $P_o$ 는 다음과 같다.

$$P_o = [p_o(1), p_o(2), p_o(3), \cdots, p_o(n)] \\ \sum_{i=1}^n p_o(i) = 1 \quad (11)$$

여기서,  $p_o(i)$ 는 손상이  $i$ 상태에 존재할 확률이다.

Markov chain 이론에 의하여 임의의 상태  $x$ 에 대한 피로손상확률벡터  $P_x$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$P_x = P_o P^x \quad (12)$$

따라서 피로손상의 과정은 초기 확률벡터와 천이행렬의 연속적인 곱에 의하여 나타내어진다.

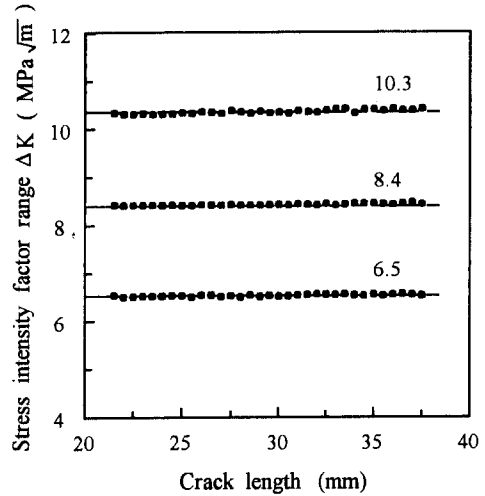
### 3. 실험방법

#### 3.1 재료 및 시험편

사용재료는 항공기 구조용으로 사용되고 있는 두

**Table 1** Chemical composition(wt%)

Designation	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Al
7075-T6	0.10	0.38	1.25	0.14	9.15	0.22	7.30	Re.



**Fig. 1** Stress intensity factor range  $\Delta K$  vs. crack length  $a$

께가 25.4 mm와 3.2 mm인 7075-T6 고강도 알루미늄합금이며, 이 재료의 화학성분과 기계적 성질은 Table 1, Table 2에 보이는 바와 같다. 시험편은 ASTM E647-88<sup>(14)</sup>에 따른 폭(W)이 50.8 mm인 CT(compact tension)형이다. 또한 시험편의 채취 방향은 입연방향과 부하방향이 평행하고 균열진전 방향이 이에 수직인 L-T방향이다.

#### 3.2 피로시험

피로시험은 상온의 대기중에서 100 kN용 유압서어보식 피로시험기에 마이크로컴퓨터를 사용한 제어시스템을 구성하고, ASTM E647-88<sup>(14)</sup>의 규정에 따라 응력확대계수 범위( $\Delta K$ )값 제어의 피로시험을 행하였다. 사용된 하중은 작용응력비( $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ ) 0.3, 실험주파수 10 Hz의 정현파이며, 응력확대계수 범위 제어실험은 응력확대계수 범위  $\Delta K = 6.5$

**Table 2** Mechanical properties of 7075-T6 Al alloy

Yield strength (MPa)	Tensile strength (MPa)	Elongation (%)
492.1	559.8	12.9

Crosshead speed : 1 mm/min, Specimen thickness : 3.2 mm

MPa√m,  $\Delta K=8.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  및  $\Delta K=10.3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ 에 대하여 실험을 행하였다. Fig. 1은 균열길이에 대한  $\Delta K$ 의 제어상태를 나타낸 예이다.

균열길이의 측정은 컴플라이언스법(compliance method)을 이용하였으며, 균열길이가 0.1 mm 증가할 때마다 시험데이터를 컴퓨터에 자동적으로 기록하였다. 또한 CT 시험편에 대한 응력확대계수 범위  $\Delta K$ 의 산출은 ASTM E399-90<sup>(15)</sup>에서의 식을 이용하였으며 피로균열진전속도는 시이컨트법(secant method)에 의하여 구하였다.

### 4. 실험결과 및 고찰

#### 4.1 피로균열진전의 변동성

Fig. 2는  $\Delta K$  일정상태하에서 하중반복수에 대한 균열길이와의 관계를 나타낸 그래프이다. 응력확대계수범위가 일정함에도 불구하고 하중반복수와 피로균열길이 사이에는 변동성이 존재하고 있음을 알 수 있다. 이러한 변동성은 응력확대계수 범위  $\Delta K$ 의 값이 작아짐에 따라 더욱 커지고 있다.

또한 Fig. 3(a) 및 (b)는  $B=25.4 \text{ mm}$ ,  $B=3.2 \text{ mm}$ 에 대한 피로균열진전속도와 응력확대계수 범위 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 동일한  $\Delta K$ 임에도 피로균열진전속도는 각각 다른 값을 나타내고 있다. 이는 재료의 불균질성에 따르는 공간적 요인에 기인한 것으로 생각된다.<sup>(16,17)</sup> 따라서 재료의 피로균열진전은 결정론적인 과정이 아니라 불확실성을 동반한 확률론적인

과정이라고 할 수 있으므로 재료의 공간적 요인에 따르는 변동성을 식 (3)의 Paris-Erdogan의 균열진전법칙에 의해 묘사하기에는 불충분하다.

#### 4.2 변동성에 따른 확률변수의 추정

재료의 불균질성에 따른 균열진전속도의 변동성을 Paris-Erdogan의 균열진전법칙에서의 재료상수  $C$ 와  $m$ 의 변화에 따른 것으로 보고, 균열선단의 위치  $x$ 에서의 재료상수  $C$ 를  $C(x)$ ,  $m$ 을  $m(x)$ 라고 하여, 일정 균열길이다  $C(x)$ 와  $m(x)$  값을 최소자승법으로 구하였다. Fig. 4(a) 및 (b)는 두께 3.2 mm에 대한 이의 결과를 나타내고 있다. 그림에서

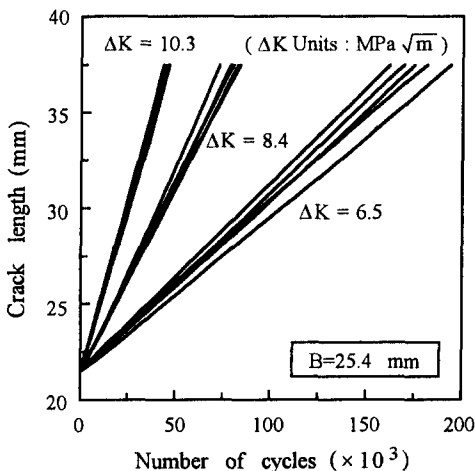


Fig. 2 a-N curves under constant stress intensity factor range

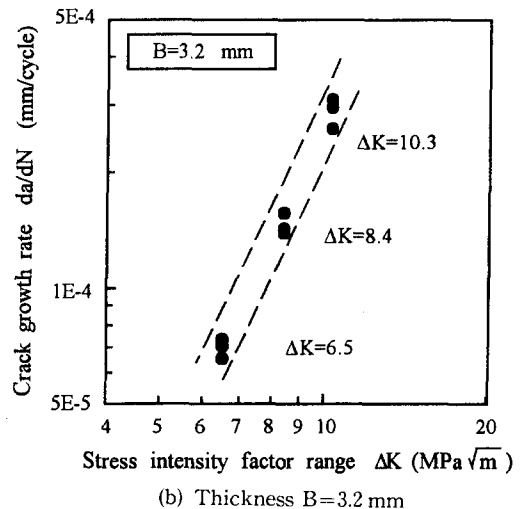
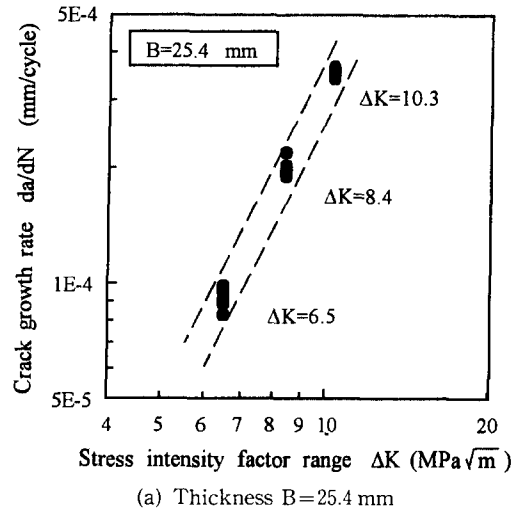


Fig. 3 Variation of crack growth rate under constant stress intensity factor range

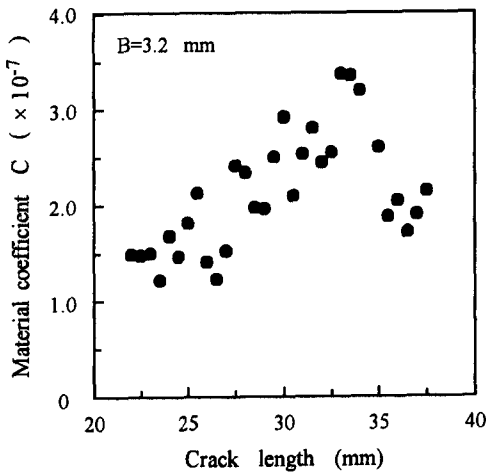
보는 바와 같이 재료상수  $C$ 와  $m$ 은 모두 변동성을 보이고 있으므로 이들 값을 확률변수로 취급하는 것이 타당하다.

따라서 재료상수  $C$ 와  $m$ 의 변화를 고려할 수 있는 랜덤변수  $Z$ 와  $r$ 을 도입하였다.

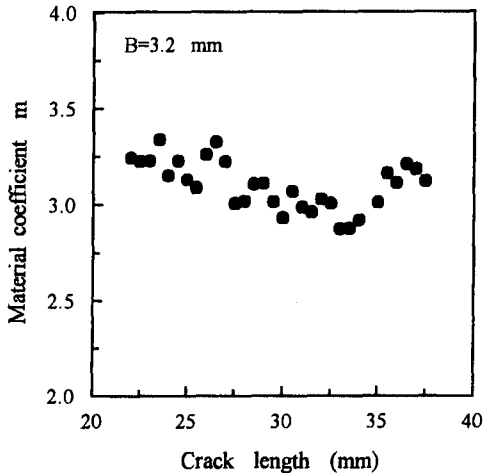
$$Z = \frac{C(x)}{C_o} \quad \text{여기서, } C_o = E[C(x)] \quad (13)$$

$$r = \frac{m(x)}{m_o} \quad \text{여기서, } m_o = E[m(x)] \quad (14)$$

랜덤변수  $Z$ 와  $r$ 의 통계적 특성을 구하기 위하여, 실험결과를 Fig. 5(a), (b)에서와 같이 3-변수 Weibull 분포(3-parameter Weibull distribution)에

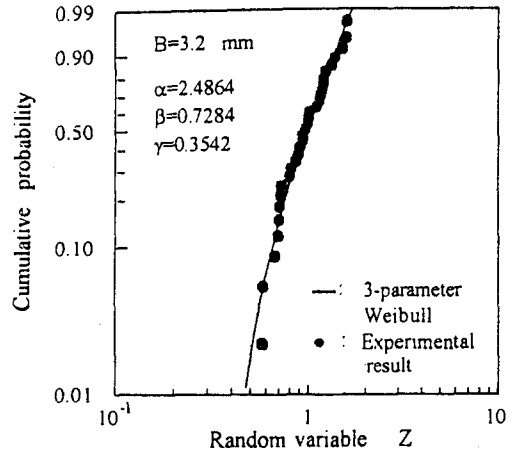


(a) Distribution of material constant C

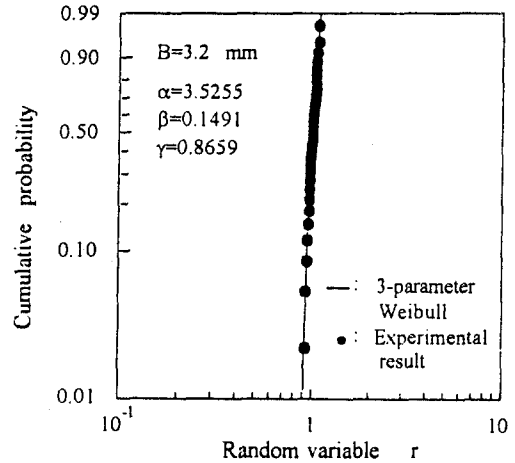


(b) Distribution of material constant m

Fig. 4 Distribution of material constants (B=3.2 mm)



(a) Random variable for C



(b) Random variable for m

Fig. 5 Distribution of random variables using 3-parameter Weibull (distribution B=3.2 mm)

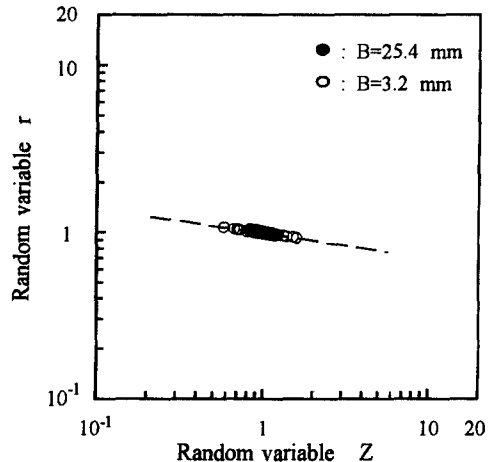


Fig. 6 Relationship between random variables Z and r

나타내었다.

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right) \quad (15)$$

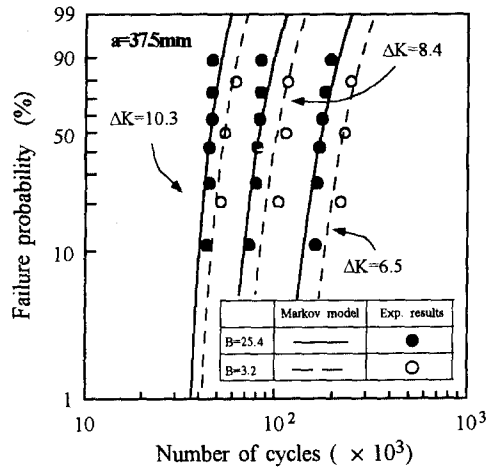
여기서,  $\gamma$ 는 위치계수,  $\beta$ 는 척도계수,  $\alpha$ 는 형상계수이다.

그림에서 실선은 3-변수 Weibull 분포곡선이며, 검은 점은 실험결과이다. 그림에서 보는 바와 같이 랜덤변수  $Z$ 와  $r$ 은 이 분포곡선에 의하여 잘 묘사되고 있으므로  $C$ 와  $m$ 의 변화를 고려한 랜덤변수  $Z$ 와  $r$ 은 3-변수 Weibull 분포에 따른 랜덤변수라 할 수 있다.

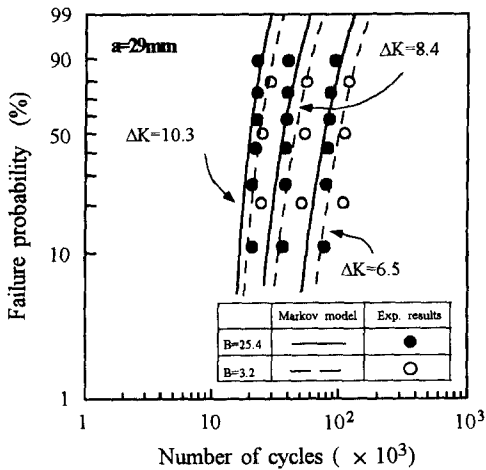
또한 Fig. 6은 랜덤변수  $Z$ 와  $r$ 과의 관계를 나타낸 것으로, 이들 사이에는 시험편 두께의 대소에 관계없이 선형적인 연관성이 존재하며, 변동의 폭은 두께 3.2 mm에서 크게 나타남을 알 수 있다.

### 4.3 피로균열진전수명의 예측

임의의 응력확대계수 범위에 대하여 균열길이 0.5 mm 증가를 한 단계로 보고 듀티사이클을 1000으로 하여 천이확률을 식 (9)로부터 구하고, 이 값을 이용하여 확률천이행렬을 구성한다. 한편 피로손상의 과정은 식 (12)와 같이 초기 확률벡터와 천

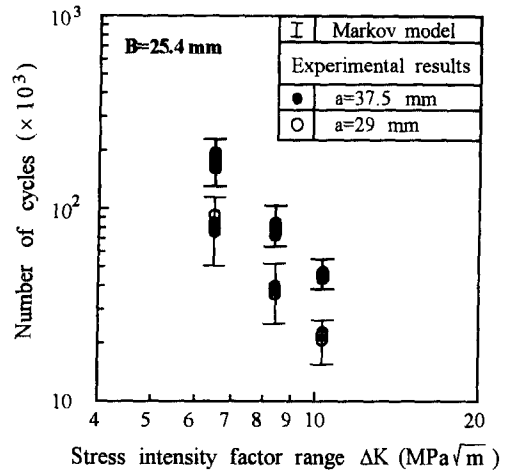


(a) Crack length 37.5 mm

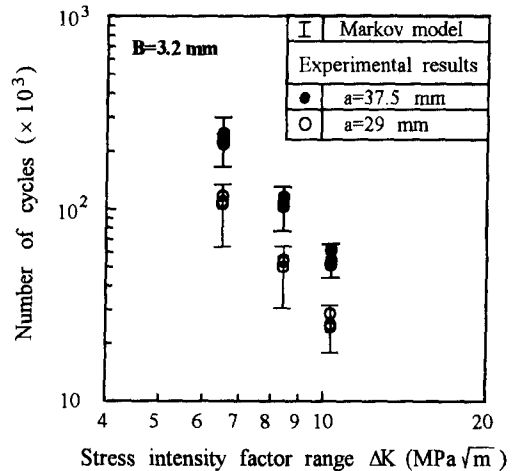


(b) Crack length 29 mm

Fig. 7 Comparison between the experimental results and the predicted fatigue crack growth life distribution using Markov chain model



(a) Thickness B=25.4 mm



(b) Thickness B=3.2 mm

Fig. 8 Comparison between the experimental results and the predicted fatigue crack growth life

이행렬의 연속적인 곱에 의하여 나타내어질 수 있으므로 초기 확률벡터를 다음과 같이 가정하여 피로균열진전수명을 예측하였다.

$$P_0 = [1, 0, 0, \dots, 0] \quad (16)$$

Fig. 7(a), (b)는 두께 25.4 mm와 3.2 mm에 대하여, 임의의 균열길이에 대한 하중반복수에 따른 파손확률을 나타낸 것이다. 이들 그림에서 보는 바와 같이 식 (9)의 Markov chain 모델에 의한 예측결과는 시험결과와 잘 일치하고 있다.

또한 Fig. 8(a), (b)는 파손확률 최소 5%, 최대 95%를 가정하여 피로균열진전수명의 하한값과 상한값을 나타낸 것이다. 두께 25.4 mm, 3.2 mm의 시험편에 대하여 모든 실험결과가 예측한 피로균열진전수명의 한계를 벗어나지 않음으로 제시된 모델은 기계 구조물의 피로파손에 대한 안전설계의 좋은 기준을 제시할 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구는 항공기 구조용 재료로서 사용되고있는 7075-T6 고강도 알루미늄합금을 이용하여 재료의 불균질성에 따르는 피로균열진전의 변동성을 고찰하고, 이를 고려한 확률론적 모델을 제시하여, 피로균열진전수명을 예측하였다.

이 결과 피로균열진전의 변동성은 Paris-Erdogan의 균열진전법칙에서의 재료상수  $C$ 와  $m$ 의 변화에 따른 것으로 보고, 이의 확률론적 성질을 명확히 하기 위하여 랜덤변수  $Z$ 과  $r$ 을 도입하여 평가하였다. 도입된 랜덤변수는 3-변수 Weibull 분포에 의하여 잘 묘사되었고, 두 랜덤변수는 선형적인 연관성을 나타내었다.

이로부터 피로균열진전의 천이확률을 확률론적 Markov chain 모델에 의하여 다음 식과 같이 제안하고, 피로균열진전수명을 예측하였다.

$$q = \frac{ZC_0}{\delta a} (\Delta K)^{m_0}$$

피로균열진전의 변동성을 고려한 이 Markov chain 모델은 피로균열진전 과정에서 임의의 응력 확대계수범위에 따르는 피로균열진전수명의 분포를 쉽게 예측할 수 있고, 수식이 간단하므로 사용이 편리할 뿐만 아니라 적은 수의 시험으로도 피로균열진전 과정을 예측할 수 있다.

## 참고문헌

- (1) Paris, P. and Erdogan, F., 1963, "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws," *J. Basic Eng., Trans. of the ASME*, pp. 528~534.
- (2) Lin, Y. K. and Yang, J. N., 1985, "A Stochastic Theory of Fatigue Crack Propagation," *AIAA Vol. 23, No. 1*, pp. 117~124.
- (3) Ishikawa, H. and Tsurui, A., 1987, "Stochastic Fatigue Crack Growth Model and Its Wide Applicability in Reliability-Based Design," *Current Japanese Material Research*, Vol. 2, Elsevier, pp. 45~58.
- (4) 板垣 浩, 石塚鐵夫, 黃 培彦, 1990, "疲勞き裂進展壽命の確率分布推定に關する實驗的研究," *日本機械學會論文集*, 56卷, 525號, pp. 1082~1090.
- (5) 윤한용, 양영순, 윤장호, 1992, "균열진폭 하중하에서의 확률론적 균열진전수명 해석," *대한기계학회논문집*, 제16권, 제9호, pp. 1691~1699.
- (6) Bogdanoff, J. L., 1978 "A New Cumulative Damage Model-Part 1," *Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME*, Vol. 45, pp.246~250.
- (7) Bogdanoff, J. L., 1978, "A New Cumulative Damage Model-Part 2," *Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME*, Vol. 45, pp. 251~257.
- (8) Bogdanoff, J. L. and Krieger, W., 1978, "A New Cumulative Damage Model-Part 3," *Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME*, Vol. 45, pp. 733~739.
- (9) Bogdanoff, J. L. and Kozin, F., 1980, "A New Cumulative Damage Model-Part 4," *Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME*, Vol. 47, pp. 40~44.
- (10) Kozin, F. and Bogdanoff, J. L., 1983, "On the Probabilistic Modeling of Fatigue Crack Growth," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 18, pp. 623~632.
- (11) Lise Gansted, Rune Brincker and Lars Pilegaard Hassen, 1991, "Fracture Mechanical

- Markov Chain Crack Growth Model," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.38, No. 6, pp. 475~489.
- (12) 島田佳弘, 中川降夫, 徳納久睦, 1983, "マルコフ連鎖を用いた疲労き裂進展壽命の信頼性解析," *材料*, 第33卷, 第367號, pp. 105~111.
- (13) 김정규, 김도식, 1995, "원공을 가진 CFRP 복합재료의 피로누적손상 및 피로수명에 대한 확률론적 해석," *대한기계학회논문집*, 제19권, 제8호, pp. 1915~1926.
- (14) *ASTM E647-88*, "Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates."
- (15) *ASTM E399-90*, "Standard Test Method for Plain-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials."
- (16) 佐佐哲也, 酒井信介, 岡村弘之, 1992, "疲労き裂進展抵抗の不規則性に及ぼす板厚の影響," *日本機械學會論文集*, 58卷, 548號, pp. 509~514.
- (17) 김선진, 오세규, Itagaki, H., 1993, "재료의 공간적 변동이 통계적 특성에 미치는 영향에 관한 연구," *대한기계학회 추계학술대회논문집 (I)*, pp. 439~442.