

〈논 문〉

유전 알고리즘을 이용한 회전기계의 최적 현장평형잡이

최원호* · 양보석** · 주호진***

(1995년 11월 13일 접수)

Optimum Field Balancing of Rotating Machinery Using Genetic Algorithm

Won-Ho Choi, Bo-Suk Yang and Ho-Jin Joo

Key Words : Balancing(평형잡이), Unbalance(불평형), Correction Mass(수정질량), Influence Vector(영향벡터), Genetic Algorithm(유전 알고리즘), SUMT Method(순차 비재약 최소화기법)

Abstract

This paper presents the calculating method of optimum correction mass within permissible vibration limits for rotating machinery in two-plane field balancing. Basic technique of this method is based on influence coefficient method, and graphic vector composition that the resultant of two influence vectors obtained by trial mass have to be equilibrium with initial vibration vector in the each correction plane. Genetic algorithm which is a search algorithm based on the mechanism of natural selection and natural genetics is used for vector composition, and SUMT method is used to objective function which seeks optimum correction mass for balancing a rotor.

I. 서 론

회전 기계에서 발생하는 진동 원인 중 약 60~80%가 불평형(unbalance)에 의한 진동으로 알려져 있다. 불평형은 기계의 과도한 진동을 유발 시킬 뿐 아니라 베어링의 수명 단축 및 소음을 발생시킨다. 따라서, 기계의 수명을 연장시키고, 기계의 성능을 향상시키며 부드럽고 진동이 없는 운전을 위해서는 평형잡이(balancing)가 절대적으로 중요하다.

불평형은 축 중심선에 대하여 회전체의 질량분포가 비대칭이기 때문에 발생하는데, 그 원인으로는 부품 자체가 비대칭에서 오는 설계 또는 제도오차,

주물의 기포 및 용접의 불균일 등에 의한 재질상의 결함, 그리고 부품조립사 형상누적공차 등에 의한 가공·조립오차 등이 있다.

ISO의 정의⁽¹⁾에 따르면, 평형잡이는 회전체의 질량 분포를 조사하고 필요하다면 저널의 진동과 베어링의 작용력들이 운전속도에 대응하는 주파수에서 특정한 학계 내에 있도록 보증하게 하기 위한 조정을 하는 절차이다.

모든 회전체는 초기 불평형(initial unbalance)이라 불리는 임의의 불평형을 가지고 출발한다. 평형 잡이 작업의 목적은 완벽하게 회전체를 평형잡이하는 것은 아니다. 경제적인 이유에서, 회전체는 일반적으로 요구되는 적절한 허용잔류 불평형량 이상으로는 평형잡이를 하지 않는다.

오늘날 산업계에서는 회전체를 현장평형잡이(field balancing)하는 것이 주요한 경향이다. 이것 은 현장평형잡이가 회전체의 실제 설치상태와 운전

*회원, 효성중공업(주) 기술연구소

**회원, 부산수산대학교 기계공학과

***부산수산대학교 대학원 기계공학과

조건하에서 평형잡이를 수행하므로 보다 양호한 결과를 얻을 수 있기 때문이다. 현장평형잡이로 가장 꽃넓게 이용되어지고 있는 기법은 양면 영향계수법이다. 현장평형잡이로 영향계수법을 사용할 경우, 가끔 계산된 수정질량이 매우 크게 되는 경우가 발생한다. 이러한 경우 기계의 구조나 설치 조건상 큰 수정질량을 부착하기가 곤란하게 된다. 따라서, 실제 부착이 가능한 작은 수정질량으로 혼용 진동범위내에서 평형잡이를 실시할 수 있다면 기계의 안정성과 경제적인 측면에서 매우 유리할 것이다.⁽²⁾

최근 생물의 진화원리(선택도태, 돌연변이, 교차)에 착상을 얻은 학습 알고리즘으로 유전학과 자연도태의 개념을 근거로 한 화률적 탐색방법의 하나인 유전 알고리즘^(3,4)(genetic algorithms : GA)이 공학분야에의 적용이 시도되고 있다.

유전 알고리즘이란 우수한 형질을 가진 개체가 자연계에 잘 적응하여 큰 생존확률을 가지고, 더 많은 교배에 참가하여 우수한 자손을 생성한다는 자연계의 법칙과 생식(reproduction), 교차(crossover), 돌연변이(mutation)의 과정을 수행하는 유전학에 착상을 얻은 탐색법이다.

따라서 본 연구에서는 양면 영향계수법(influence coefficient method : ICM)의 기본 개념과 유전 알고리즘을 이용하여 회전기계의 혼용진동 범위내에서의 최적 수정질량을 계산하는 새로운 현장평형잡이에 적합한 방법을 제시하고, 기존의 영향계수법과 비교하여 본 방법의 유효성을 확인하였다.

2. 양면 영향계수법

Thearle⁽⁵⁾에 의해 제안된 영향계수법은 오늘날 산업계에서 현장평형잡이의 방법으로 꽃넓게 사용되고 있다. 영향계수법에 의한 평형잡이에서는 회전축계의 질량이나 베어링의 특성값 등의 정보가 필요없다. 영향계수법의 기본 개념으로 고정된 회전속도와 특정 위치에서 측정된 진동값은 불평형과 축계의 영향계수의 곱이다. 따라서, 영향계수는 불평형뿐만 아니라 회전속도의 함수이며, 회전축계의 운동방정식은 선형적이라 가정한다.⁽⁶⁾ 영향계수법에 의한 양면평형잡이 방법은 회전속도를 고정하고, 2개의 진동 측정면에서 축회전 동기성분의 진폭과 위상을 측정한다.

양면에서의 초기 진동값은

$$V_{10} = V_{10} \angle \theta_{10}, \quad V_{20} = V_{20} \angle \theta_{20} \quad (1)$$

여기서, V_{ij} 와 θ_{ij} 는 각각 $i (= 1 \sim 2)$ 면에서의 진폭과 상대 위상각이다. 진폭 V_{10} , V_{20} 는 미지의 불평형 U_1 , U_2 와의 선형관계로 가정하면, 이들 사이는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

첫번째 수정면에 시험질량 U_{t1} 을 부착하고, 다시 진동을 측정하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 + U_{t1} \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, V_{11} 과 V_{21} 은 첫번째 수정면에 시험질량을 부착하였을 때의 첫번째와 두번째 면에서 다시 측정된 진동값이다. 식 (2)와 (3)에서 영향계수 I_{11} , I_{21} 은 다음과 같이 표현된다.

$$I_{11} = \frac{V_{11} - V_{10}}{U_{t1}}, \quad I_{21} = \frac{V_{21} - V_{20}}{U_{t1}} \quad (4)$$

첫번째 시험질량을 제거하고 두번째 면에 시험질량 U_{t2} 을 부착하고, 진동을 측정하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 + U_{t2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

식 (2)와 (5)에서, 영향계수 I_{12} , I_{22} 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$I_{12} = \frac{V_{12} - V_{10}}{U_{t2}}, \quad I_{22} = \frac{V_{22} - V_{20}}{U_{t2}} \quad (6)$$

식 (4)와 (6)을 식 (2)에 대입하면, 평형잡이를 위한 수정질량 U_{b1} 과 U_{b2} 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} U_{b1} \\ U_{b2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} \quad (7)$$

3. 최적 수정질량의 계산

평형잡이에 유전 알고리즘을 사용하기 위해서, 식 (4)와 (6)을 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} I_{11}U_{t1} &= V_{11} - V_{10}, \quad I_{21}U_{t1} = V_{21} - V_{20} \\ I_{12}U_{t2} &= V_{12} - V_{10}, \quad I_{22}U_{t2} = V_{22} - V_{20} \end{aligned} \quad (8)$$

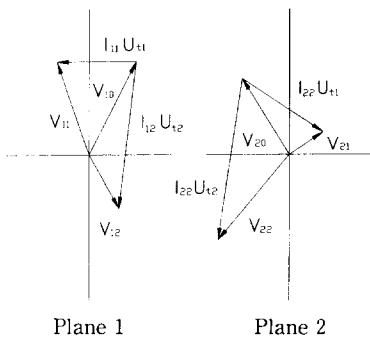


Fig. 1 Vibration diagram vector

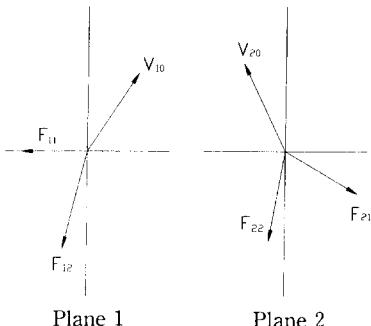


Fig. 2 Vibration diagram vector

식 (1)과 (8)을 도식적으로 표시하면 Fig. 1과 같고, Fig. 1은 다시 Fig. 2와 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$F_{11} = I_{11}U_{t1}, \quad F_{21} = I_{21}U_{t1}$$

$$F_{12} = I_{12}U_{t2}, \quad F_{22} = I_{22}U_{t2}$$

여기서, F_{ij} 는 시험질량 U_{ij} 을 j 면에 부착하였을 때 i 면에서의 초기진동 V_{io} 를 변화시키는 영향벡터이다. 따라서, 평형잡이는 다음 식이 만족될 때 이루어 진다.

$$F_{11} + F_{12} + V_{10} = 0 \quad (9)$$

$$F_{21} + F_{22} + V_{20} = 0 \quad (10)$$

시험질량을 양면에 각각 부착한 후 결과가 식 (9)와 (10)을 만족하지 못하면, 수정면 1에서의 영향벡터 F_{11} , F_{12} 가 식 (9)를 만족하도록 유전 알고리즘을 이용하여 새로운 영향벡터 F'_{11} , F'_{12} 를 구한다.

$$F'_{11}(F'_{11}, \theta'_{11}), \quad F'_{12}(F'_{12}, \theta'_{12})$$

여기서, $F'_{11} = F_{11}r_1$, $F'_{12} = F_{12}r_2$, $\theta'_{11} = \theta_{11} + \Delta\theta_1$, $\theta'_{12} = \theta_{12} + \Delta\theta_2$.

F_{11} 과 F_{12} 는 각각 시험질량 U_{t1} 과 U_{t2} 의 함수이며, θ_{11} 과 θ_{12} 는 각각 시험질량이 각 수정면에 부착된 위상각이다. $r_i(i=1 \sim 2)$ 는 최적 수정질량을 구하기 위한 시험질량의 비이고, $\Delta\theta_i(i=1 \sim 2)$ 는 수정면의 각도를 구하기 위한 수정질량이 부착된 위상각이다. 수정면 2에서의 영향벡터 F_{21} 과 F_{22} 는 각각 F'_{11} 과 F'_{12} 에 의해 종속되어 변화한다. 따라서 수정면 2에서의 새로운 영향벡터는 다음과 같다.

$$F'_{21}(F'_{21}, \theta'_{21}), \quad F'_{22}(F'_{22}, \theta'_{22})$$

여기서, $F'_{21} = F_{21}r_1$, $F'_{22} = F_{22}r_2$, $\theta'_{21} = \theta_{21} + \Delta\theta_1$, $\theta'_{22} = \theta_{22} + \Delta\theta_2$.

따라서 식 (8)과 (9)를 만족하는 새로운 영향벡터 F'_{11} , F'_{12} , F'_{21} 및 F'_{22} 는 유전 알고리즘을 이용하여 구하게 된다.

회전기계의 허용진동한계치 (permissible vibration limit : PVL) 이하로 최적 수정질량을 구하기 위한 목적함수는 다음과 같다.

$$F_{11} + F_{12} + V_{10} < PVL \quad (11)$$

$$F_{21} + F_{22} + V_{20} < PVL \quad (12)$$

수정질량의 최적화를 위해 순차 비제약 최소화 기법⁽⁷⁾ (Sequential Unconstrained Minimization Technique : SUMT)을 사용한다. n 개의 부등식 제약이 있는 목적함수 $f(x, y)$ 를 제약이 없는 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize } P(x, y)$$

$$= f(x, y) + m \sum_{i=1}^2 [\min\{0, h_i(x, y)\}]^2 + m \sum_{i=1}^2 \{g_i(x, y)\}^2 \quad (13)$$

여기서, 페널티계수 $m(\geq 0) = m_0, m_1, m_2, \dots, m_k$.

$$f(x, y) = (F_{11} + F_{12} + U_1) + (F_{21} + F_{22} + U_2)$$

$$h_i(x, y) = PVL - (F_{i1} + F_{i2} + U_i)$$

$$g_i(x, y) = PVL - (F_{ii} + F_{i2} + U_i)$$

$h_i(x, y)$, $g_i(x, y)$ 는 각각 부등호와 등호구속식이고, 설계 파라메터로서는 F_{11} , F_{12} , θ_{11} , θ_{12} 이다. $f(x, y)$ 는 원래의 목적함수이며, 구속조건으로서는 다음과 같다.

$$F_{11} + F_{12} + V_{10} < PVL ; \text{수정면 1}$$

$$F_{21} + F_{22} + V_{20} < PVL ; \text{수정면 2}$$

$m_k = m_{k-1} \times c (c > 1)$ 에 따라 순차적으로 페널티 계수를 증가시키면서 변환된 목적함수를 최소화시

기면, 제약조건을 만족하면서 원래의 목적함수 $f(x, y)$ 를 최소화하는 해가 얻어진다.

4. 유전 알고리즘에 의한 최적 평형잡이

4.1 최적 평형잡이에 대한 표현형과 유전자형

본 연구에서는 각 개체에 존재하는 염색체를 수정면 1, 2에 부착한 시험질량의 영향에 의한 수정면 1의 전동진폭과 위상각으로 4개의 파라메터 ($F_{11}, \theta_{11}, F_{12}, \theta_{12}$)로서 나눈다. 유전 알고리즘에 사용된 탐색파라메터는 Table 1과 같다. Fig. 3은 한 개체(string)를 4개의 파라메터로 코딩한 예를 보여준다.

4.2 탐색절차

Fig. 4는 본 논문에 사용된 유전 알고리즘의 흐름도이다. 최적 수정질량을 얻기 위한 탐색절차는 다음과 같은 단계로 이루어진다.

Step 1(start) : 설계 파라메터 정보를 담고 있는 개체(string)를 이진수(1과 0)로 표현하며, 개체의 길이는 60bit로 하고 개체수(집단크기)는 100개로 한다.

Step 2(generation) : 초기집단은 단계 1에서 정해진 개체길이와 개체수로 랜덤(random)하게 구성한다.

Step 3(calculation of fitness) : 집단내의 각 개체의 유전자형(genotype)을 십진수의 표현형(phenotype)으로 바꿔 적응도(fitness)를 평가한다. 각 개체의 적응도는 목적함수 $P(x, y)$ 에 의해 결정된다.

Step 4(selection) : 다음 세대를 구성하기 위해, 상위 10%의 개체를 적응도 비례선택(roulette seleciton strategy)⁽³⁾에 따라서 선택한다.

Step 5(reproduction) : 적응도가 높은 개체는 교차를 하기 위해 임시적으로 교배지(mating pool)로 복제된다.

Step 6(crossover) : 교배지에서 교배할 개체 쌍을 랜덤하게 선택한 후, 교차조작자(operator)에 의해서 부모 개체의 bit를 교차화률에 따라 선택하여 자손의 개체를 만든다. 교차는 일정교차(uniform crossover)를 사용하며, 일정교자는 교차율(P_c)에 의해 부모 염색체 A 또는 B의 bit가 순차적으로 선택된다. 교자는 파라메터 각각에 대해서 조작되며, 이 교차과정을 각 세대마다 반복한다.

Step 7(mutation) : 돌연변이는 일정한 돌연변이 확률에 따라 개체의 bit를 대립형질로 변화시키는 조작이다. 본 연구에서는 돌연변이는 네가지 파라메터에 대해서 임의의 돌연변이 확률에 따라 이전 개체의 임의의 bit를 대립형질(0은 1, 1은 0)로 바꾸어 주는 역할을 한다. 본 연구에서는 돌연변이 확률(P_m)을 지수적으로 감소시켰고, 초기에 국소최적해에 수렴하는 것을 방지하기 위하여 초기값을 크게 주어 초반부에서 넓은 해공간을 탐색하도록 하였다. 다음 식은 돌연변이 확률에 대한 지수함수식을 나타낸 것이다.

$$P_m = 0.97 \times \exp(-12 \times G_r) \quad (14)$$

여기서, G_r 은 총 세대수에 대한 임의 세대수의 비이다.

Step 8(evaluation of fitness) : 각 개체의 적응도를 평가한 후, 최상의 적응도값을 갖는 개체를 허용진동한계치(PVL)로 평가한다. 적응도값이 허용진동한계치를 만족하면, 그 값을 최적해로 하고 탐색을 종료한다. 그렇지 않으면, 목적함수의 패널티계수를 증가시켜서 step 4 이하의 과정을 세대수

Table 1 Searching parameter

Population size	Chromosome length	Crossover probability	No. of generation
100	60	50%	300

001001011000101	010101110100000	110101000101111	010101001101100
F_{11}	θ_{11}	F_{12}	θ_{12}

Fig. 3 Coding example

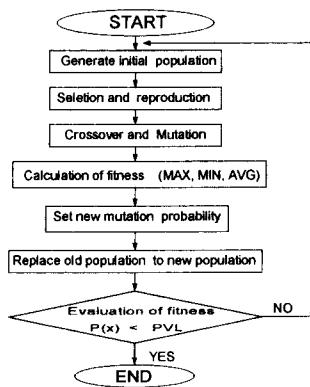


Fig. 4 Flow chart of genetic algorithm

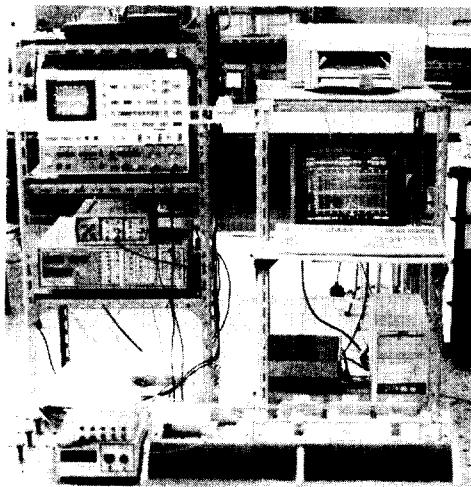


Fig. 5 Experimental set-up

만큼 다시 반복한다.

5. 최적 수정질량의 계산 결과 및 고찰

Fig. 5는 본 연구에서 평형잡이 실험에 사용한 실험 장치(rotor kit, Bently Nevada, RK-3)이다. 두개의 균접센서를 두개의 베어링 부근에 각각 설치하고, 진동 측정은 데 이 터 수직장치(Bently Nevada, ADRE3 108)를 사용하였다. 본 실험장치를 사용하여 구한 최적 수정질량 계산은 Table 2에 보이는 영향계수법으로 실험한 3가지의 평형잡이 예를 이용하였다. Table 3은 허용진동 한계치(PVL)를 0.3 mil에서 1.0 mil까지로 각각 제한한 조건하에서, 본 연구에서 제안한 방법을 사용하여 얻어진 최적 수정질량과 표준 영향계수법에 의해 구한 염밀해를 나타낸다. 이 최적 수정질량에 대한

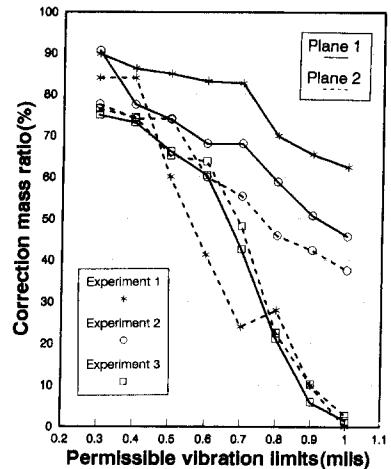


Fig. 6 Correction mass

Table 2 Balancing examples

Examples	Initial vibration (mils∠deg.)	Trial mass (grams∠deg.)	Vibration measurements (mils∠deg.)	
			Plane 1	Plane 2
1	Plane 1 1.2∠252	Plane 1 0.4∠202.5	1.3∠253	3.2∠340
	Plane 2 2.8∠347	Plane 2 0.4∠67.5	1.4∠229	2.7∠349
2	Plane 1 1.6∠32	Plane 1 0.4∠292.5	1.7∠29	2.3∠53
	Plane 2 1.8∠60	Plane 2 0.4∠180	1.5∠12	1.8∠62
3	Plane 1 1.0∠160	Plane 1 0.2∠180	1.4∠161	0.9∠264
	Plane 2 1.1∠291	Plane 2 0.4∠315	0.7∠189	1.6∠294

Table 3 The results of optimum correction mass

Permissible vibration limit(mils)	Correction mass(grams \angle deg.)					
	Example 1		Example 2		Example 3	
	Plane 1	Plane 2	Plane 1	Plane 2	Plane 1	Plane 2
0.3	2.03 \angle 67.2	0.63 \angle 317.3	1.25 \angle 151.3	0.66 \angle 110.2	2.48 \angle 162.0	2.24 \angle 346.5
0.4	1.95 \angle 74.0	0.63 \angle 322.3	1.07 \angle 142.9	0.63 \angle 112.6	2.42 \angle 168.4	2.18 \angle 352.3
0.5	1.92 \angle 76.6	0.45 \angle 313.4	1.02 \angle 145.9	0.63 \angle 97.8	2.19 \angle 168.6	1.91 \angle 351.6
0.6	1.88 \angle 67.7	0.31 \angle 304.0	0.94 \angle 149.0	0.51 \angle 111.6	2.00 \angle 190.2	1.87 \angle 14.1
0.7	1.87 \angle 56.4	0.18 \angle 313.9	0.94 \angle 156.9	0.47 \angle 96.3	1.41 \angle 184.5	1.41 \angle 12.4
0.8	1.58 \angle 61.0	0.21 \angle 345.4	0.81 \angle 154.4	0.39 \angle 112.6	0.70 \angle 168.0	0.66 \angle 356.2
0.9	1.48 \angle 59.7	0.075 \angle 305.6	0.7 \angle 140.7	0.36 \angle 121.6	0.20 \angle 187.3	0.30 \angle 37.1
1.0	1.41 \angle 57.6	0.001 \angle 340.2	0.63 \angle 151.4	0.32 \angle 91.2	0.05 \angle 180.2	0.08 \angle 44.2
Exact solution (ICM)	2.26 \angle 69.3	0.75 \angle 299.6	1.38 \angle 144.3	0.85 \angle 114.5	3.31 \angle 151.1	2.93 \angle 334.1

엄밀해의 수정질량 비를 Fig. 6에 나타낸다. 수정질량의 양은 허용진동한계치가 증가하면서 거의 선형적으로 감소하고 있다. 회전기계에서 매우 양호한 축진동값이 0.5 mil을 허용진동한계치로 하였을 때 최적 수정질량은 영향계수법에 의해 얻어진 엄밀한 수정질량의 약 25%로서 평형잡이가 충분하다는 것을 보여준다.

여기서, 회전기계의 진동상태를 잔류불평형으로 표현하지 않고 잔류진동값으로 표현한 것은 통상 현장엔지니어들이 잔류불평형을 측정하기 않고 진동의 크기로 평가하기 때문이다.

Fig. 7은 Table 2의 평형잡이 예에서 허용진동한

계치를 0.5 mil로 하였을 때, 평형잡이 결과를 도식적 방법으로 나타낸 것이다. F_{ij} ($i, j=1 \sim 2$)는 표준 영향계수법으로 구한 영향벡터이고 F'_{ij} ($i=1 \sim 2, j=1 \sim 2$)는 유전 알고리즘에 의해 최적 수정질량을 구한 영향벡터이다. 표준 영향계수법의 경우, F_{ij} 의 합성벡터가 불평형 U_i 와 완전 평형을 이루어 평형잡이가 된다.

최적 수정질량을 계산한 결과의 경우, 영향벡터 F'_{ij} 의 합성벡터와 불평형 U_i 의 합성벡터가 허용진동한계치 0.5 mil이내임을 알 수 있다. 즉, 유전 알고리즘에 의해 얻어진 수정질량을 적용했을 때 예상진동이 0.5 mil이라는 것을 의미한다.



Fig. 7 Continued

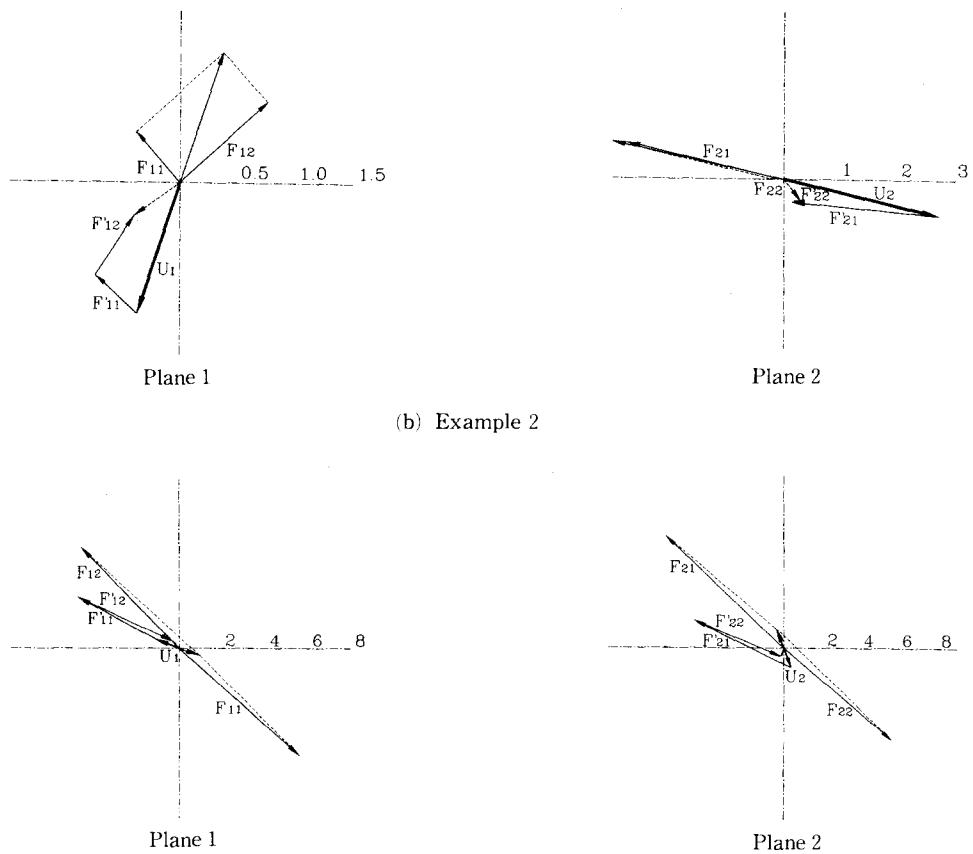


Fig. 7 Balancing results

능합을 보였다.

6. 결 론

현장 양면평형잡이에서 최적 수정질량 계산을 위하여 유전 알고리즘과 SUMT법을 적용하여 계산하였고, 영향계수법에 의한 결과와 비교하였다. 현장평형잡이가 공장에서의 평형잡이보다 더 좋은 결과를 얻을 수 있으며, 또한 평형잡이를 위한 기계의 공장 반입에 따른 경비 및 시간문제 등으로 인해 최근 현장평형잡이를 수행하는 추세에 있다. 그러나 평형잡이 계산결과 수정질량이 크게 될 경우에는 현장에서의 수정 작업이 어렵게 된다. 그리고, 허용잔류 불평형보다 더 정밀하게 평형잡이를 수행할 필요는 없다. 따라서, 본 연구에서는 회전기계가 허용진동 범위내에서 안정한 진동을 유지하면서 보다 작은 수정질량으로도 현장평형잡이가 가

참고문헌

- (1) ISO 1925, 1990, "Balkancing Vocabulary."
- (2) Schneider, H., 1991, "Balancing Technology," Schenk, pp. 179.
- (3) Goldberg, D.E., 1989, *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Company, pp. 1 ~146.
- (4) Davis, L., ed., 1991, *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold. New York, pp. 3~23.
- (5) Thearle, E.L., 1934, "Dynamic Balancing of Rotating Machinery in the Field," *Trans. ASME*,

- Vol. 56, pp. 745~753.
- (6) Darlow, M.S., 1989, *Balancing of High-Speed Machinery*, Springer-Verlag, pp. 81~103.
- (7) Jasbir S. Arora., 1989, *Introduction to Optimization Design*, McGraw-Hill, pp. 337~340.