

〈논 문〉

FCC 다결정재의 집합조직 발전에 따른 이방성의 변화

김응주* · 이용신**

(1995년 9월 20일 접수)

Anisotropy due to Texture Development in FCC Polycrystals

Eung-Zu Kim and Yong-Shin Lee

Key Words: Anisotropic Flow Potential(이방성 유동 포텐셜), Texture(집합조직), Crystal Plasticity(결정 소성학), Pole Figure(극점도)

Abstract

The present study is concerned with the development of anisotropy and deformation texture in polycrystals. The individual grain in an aggregate is assumed to experience the viscoplastic deformation with crystallographic slip that ensure uniqueness of the active slip systems and shearing rate on these systems. Two different methods for updating the grain orientation are examined. Texture development for some deformation modes such as plane strain compression, uniaxial tension and simple shear are found. Changes in anisotropic flow potential due to texture development during large deformation are also given. Anisotropic behavior of polycrystals with different textures are examined.

1. 서 론

모든 단결정 금속은 결정학적 측면에서 이방성을 갖고 있으며, 다결정 금속의 경우에는 주로 결정립들의 방위에 의해 이방성을 갖는다. 일례로 무질서 방위를 갖는 수많은 결정립들의 집합체는 등방성을 나타내게 된다. 소성변형 중인 결정립들은 변형특성에 따라 특정방향으로 배열하여 이방성을 갖게 되며, 이와 같이 결정립들이 특정 방향으로 배열되는 현상을 총칭하여 집합조직이라 한다.

결정학적인 측면에서 결정립 내부의 슬립을 바탕으로 하여 다결정재의 소성변형을 모델하는 이론들이 제시되어 왔다.^(1~4) Taylor는 다결정재의 모든 결정립은 결정립 집합체(aggregate)와 같은 변형률을 갖는 것으로 가정한 반면(상계해), Sachs

는 각 결정립들은 같은 응력상태를 갖는 것을 가정하였다(하계해). Taylor의 모델은 결정립들간의 평형이 만족되지 않지만 Kocks는 각 결정립들의 경계에서의 응력장에 의해 응력의 연속성이 보장될 수 있다고 하였다. Pehler 등은 입방정구조를 갖는 등방성재료의 항복곡선을 Schmid 텐서를 이용하여 얻었다. 최근에 이르러 이와 같은 미시역학과 매크로 연속체 역학을 접목시키려는 연구도 시도되고 있으며,^(5,6) 이를 위해서는 결정립 집합체의 변형을 정확히 이해하는 것이 필수적이다.

본 연구에서는 다결정 집합체 내의 각 결정립들은 모두 같은 변형률속도를 갖는 것을 가정하는데, 이때 슬립면에서의 점소성 거동은 작용 슬립시스템과 그 시스템에서의 전단변형률속도를 유일하게 결정한다. 또한 방위각의 변화를 계산하기 위하여 오일러 적분법과 텐서 지수함수 계산을 이용한 적분법을 실행 비교한다. 응용 예로서 평면변형률 압축, 일축인장 및 단순전단변형을 갖는 FCC 다결

*국민대학교 대학원

**회원, 국민대학교 기계공학과

정재의 집합조직의 발전과 그에 따른 소성유동 포텐셜 및 이방성의 변화를 조사한다.

2. 결정 소성학

결정 소성학에서는 재료내부의 결정학적 슬립 (crystallographic slip)으로부터 외형으로 관측할 수 있는 소성변형을 표현한다. 금속내부의 슬립은 슬립면상에서 슬립방향으로 전단변형을 일으키며, 여러 개의 작용 슬립시스템에 일어나고 있는 전단 변형의 조합으로 외부의 매크로 소성변형을 나타낸다. 이러한 경우에 각 결정립들은 변형경로 특성에 따라 처음 방위상태에서 우선하는 방위로 회전하게 되며 집합조직을 형성한다. 따라서 결정 소성학에서는 슬립에 의한 결정학적 운동학(Kinematics), 슬립현상을 규명하는 구성방정식 그리고 변형경화 및 방위변화 등 미세조직 상태의 변화에 대한 모델이 필요하게 된다.

2.1 단결정 운동학

금속결정의 탄소성변형에 대한 결정학적 운동학은 Asaro⁽⁷⁾에 의해 깊이 있게 고찰되었다. 본 연구에서는 방위변화에 거의 영향을 주지 못하는 탄성변형을 무시하고, 단결정의 변형을 Fig. 1과 같이 슬립에 의한 소성변형 (F^p)과 결정격자의 회전 (R^*)으로 구분한다.

$$F = R^* F^p \tag{1}$$

점소성 해석을 위하여 현재 형상에서의 속도구배 텐서(L)는 다음과 같이 얻어진다.

$$L = \dot{F}F^{-1} = \dot{R}^*R^{*T} + R^*\dot{F}^pF^{p-1}R^{*T} \tag{2}$$

윗식의 속도구배텐서는 다시 변형률속도텐서

($d^{(g)}$)와 스핀텐서($\omega^{(g)}$)의 합으로 표시될 수 있으며, 이들은 또한 각 슬립시스템의 전단변형률속도 ($\dot{\gamma}^{(a)}$)의 조합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d^{(g)} = \frac{1}{2}(L + L^T) = \sum_{a=1}^{N_s} P^{(a)} \dot{\gamma}^{(a)} \tag{3}$$

$$\omega^{(g)} = \frac{1}{2}(L - L^T) = \dot{R}^*R^{*T} + \sum_{a=1}^{N_s} Q^{(a)} \dot{\gamma}^{(a)} \tag{4}$$

윗식에서 $P^{(a)}$ 와 $Q^{(a)}$ 는 현재형상의 (a) 슬립시스템에서 슬립방향벡터 $s^{(a)}$ 와 슬립면 법선벡터 $n^{(a)}$ 로 정의된 Schmid 텐서의 대칭부와 비대칭부이다. 즉

$$P^{(a)} = \frac{1}{2}(s^{(a)} \otimes n^{(a)} + n^{(a)} \otimes s^{(a)}) \tag{5}$$

$$Q^{(a)} = \frac{1}{2}(s^{(a)} \otimes n^{(a)} - n^{(a)} \otimes s^{(a)}) \tag{6}$$

(두 벡터 a 와 b 의 텐서연산(tensor product) $a \otimes b$ 는 임의의 벡터 v 를 $(b \cdot v)a$ 로 변환시키는 선형 연산자가 된다. 이하 본 논문에서 사용된 표기법은 Gurtin⁽⁹⁾에 따른 것이다.) 위의 식들에서 결정립의 변형률속도를 구하기 위해서는 각 슬립시스템에서의 전단변형률속도($\dot{\gamma}^{(a)}$)와 분해전단응력(resolved shear stress, $\tau^{(a)}$)의 관계를 규명하는 마이크로 구성방정식을 필요로 한다. 격자의 회전을 포함하는 식 (4)에서 \dot{R}^* 에 관하여 정렬하면 다음과 같다.

$$\dot{R}^* = (\omega^{(g)} - \sum_{a=1}^{N_s} Q^{(a)} \dot{\gamma}^{(a)}) R^* \tag{7}$$

윗식은 각 결정격자의 회전속도를 나타내는 것으로 이를 적분하여 새로운 결정립의 방위를 얻을 수 있다.

2.2 구성방정식

슬립시스템의 전단 변형률속도와 분해전단응력의 관계에 슬립시스템의 변형경화를 반영하는 구성방정식을 사용하였다.^(3,5,10)

$$\dot{\gamma}^{(a)} = \dot{a}^{(a)} \frac{\tau^{(a)}}{\bar{\tau}^{(a)}} \left| \frac{\tau^{(a)}}{\bar{\tau}^{(a)}} \right|^{(1/m-1)} \tag{8}$$

윗식에서($\dot{a}^{(a)}$)는 a 슬립시스템에서의 분해전단응력이 그 시스템의 하드니스($\bar{\tau}^{(a)}$)에 도달했을 때의 전단변형률속도이다. a 슬립시스템에서의 분해전단응력($\tau^{(a)}$)은 결정립의 진응력을 현재 형상에서의 슬립시스템에 투영하여 다음과 같이 구한다.

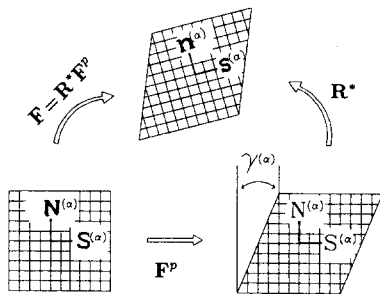


Fig. 1 Kinematics of single crystal deformation by crystallographic slip

Table 1 Material parameter (the Voce-Kocks model for Aluminum)

Model parameter	Value
$\dot{\alpha}$	1.0s^{-1}
m	0.05
$\bar{\tau}_0$	27.17 MPa
$\bar{\tau}_{s0}$	61.80 MPa
$\dot{\gamma}_s$	$5 \times 10^{10}\text{s}^{-1}$
Θ_0	58.41 MPa
A	0.129 MPa
μ	25.3 GPa

$$\tau^{(a)} = (P^{(a)(s)}) = \tau_r (P^{(a)} \sigma^{(s)}) \quad (9)$$

슬립시스템의 변형경화, 즉 하드니스 발전식은 Voce에 의해 제시되어 Kocks에 의해 온도와 변형률속도 영향을 포함시키도록 수정된 것으로 다음과 같다.

$$\dot{\tau} = \Theta_0 \left(\frac{\bar{\tau}_s(\dot{\gamma}^*) - \bar{\tau}_{avg}}{\bar{\tau}_s(\dot{\gamma}^*) - \bar{\tau}_0} \right) \dot{\gamma} \quad (10)$$

여기서,

$$\bar{\tau}_s(\dot{\gamma}^*) = \bar{\tau}_{s0} \left| \frac{\dot{\gamma}^*}{\dot{\gamma}_s} \right|^{A/\mu}, \quad \dot{\gamma}^* = \sum_a |\dot{\gamma}^{(a)}| \quad (11)$$

윗식에서 μ 는 전단탄성계수이고 $\bar{\tau}_0$, $\bar{\tau}_{s0}$, $\dot{\gamma}_s$, Θ_0 와 A 는 재료상수이다. 위의 결과는 참고문헌 (5)에서 발췌한 알루미늄 1100의 재료상수를 이용하여 얻은 것으로 Table 1에 재료상수의 값이 주어져 있다.

2.3 응력과 방위계산

각 결정립들의 마이크로 점소성변형은 앞의 이론에 따라 예측될 수 있으며 이들을 종합하여 결정립 집합체의 매크로 소성변형을 구할 수 있다. 본 연구에서는 Taylor가 제시한 바와 같이 모든 결정립의 변형률속도텐서는 다결정 집합체의 변형률속도텐서(\mathbf{d})와 같은 것을 가정하였다. 즉,

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^{(s)} = \sum_{a=1}^{N_s} \mathbf{P}^{(a)} \dot{\gamma}^{(a)} \quad (12)$$

한편 다결정 집합체의 진응력(σ)은 각 단결정의 응력을 평균하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\sigma = \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \sigma^{(s)} \quad (13)$$

윗식에 N_s 는 집합체내에 있는 결정립들의 수이고, 각 단결정의 미세응력 $\sigma^{(s)}$ 는 식 (3), 식 (8)과 식 (9)으로부터 구한다.

$$\mathbf{d}^{(s)} = \left\{ \sum_{a=1}^{N_s} f(\tau^{(a)}) \mathbf{P}^{(a)} \otimes \mathbf{P}^{(a)} \right\} [\sigma^{(s)}] \quad (14)$$

윗식에서 $f(\tau^{(a)})$ 는 결정립의 미세응력($\sigma^{(s)}$)의 함수이므로 Newton-Raphson법에 의해 반복법으로 미세응력을 구한다. 일반적으로 소성변형은 체적불변을 가정하여 식 (14)의 좌측항은 5개의 독립변수를 갖게 되므로 실제의 계산에서는 우측항의 4차 콤플라이언스텐서는 5×5 의 행렬로 만들 수가 있으며(부록 1 참조), 그것의 역행렬이 존재하기 위해서는 적어도 5개 이상의 작용슬립시스템이 있어야 한다. 점소성해석에서는 모든 슬립시스템이 작용을 하므로, FCC나 BCC 같이 5개 이상의 슬립시스템을 갖는 결정격자는 콤플라이언스텐서의 역행렬, 즉 강성행렬을 구할 수 있다. 결정립 집합체내의 각 결정립은 결정구조에 설정된 결정좌표계(crystal coordinate)에 대하여 모두 같은 슬립시스템을 이루고 있다. 따라서 각 단결정들은 결정좌표계에 대하여 모두 같은 구성방정식 (14)를 사용할 수 있다. 그러나 전체좌표계(global coordinate)에 대해서는 각 결정립들의 결정좌표계가 모두 다르므로 각 결정립의 미세응력을 전체좌표계로 변환한 후, 식 (13)에 의하여 집합체의 응력을 얻을 수 있다.

변형이 진행됨에 따라 집합체내의 각 결정립들은 현 방위에서 각각 달리 회전을 하게 된다. 현재형상에서의 방위를 나타내는 오일러각은 결정립에 설정된 좌표계와 전체좌표계 사이의 변환텐서 \mathbf{C} 로 표현될 수 있다. 또한 현재 형상에서의 변환텐서 \mathbf{C} 는 회전텐서 \mathbf{R}^* 과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{R}^*(t) \mathbf{C}(0) \quad (15)$$

결국 현재 형상에서의 방위는 회전텐서 \mathbf{R}^* 로 표현된다. 그러므로 방위각의 변화를 직접 구하는 대신 회전텐서 \mathbf{R}^* 를 적분해 나감으로써 변형중 결정립방위의 변화를 계산할 수 있다. 현재형상에서의 회전텐서 \mathbf{R}^* 는 결정격자의 회전속도식 (7)을 적분하여 구할 수 있으며 본 연구에서는 두 가지 방법을 검토하였다. 첫 번째 방법은 매우 단순한 것으로 식 (7)을 오일러법으로 적분한다. 즉,

$$\mathbf{R}^*(t + \Delta t) = \mathbf{R}^*(t) + \dot{\mathbf{R}}^*(t) \Delta t \quad (16)$$

두 번째 방법에서는 식 (7)을 재정렬하여 다음과 같이 새로운 회전텐서를 얻는다.

$$\mathbf{R}^*(t + \Delta t) = \text{Exp} \left[\left(\omega - \sum_{\alpha=1}^{N_s} Q^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \right) \Delta t \right] \mathbf{R}^*(t) \quad (17)$$

위의 계산은 2차 비대칭텐서의 지수함수에 대한 표현이 필요하며, 이것은 Simo⁽⁸⁾가 제시한 다음의 공식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\text{Exp}[\mathbf{W}] = \mathbf{I} + \frac{1}{1 + |\underline{\tilde{w}}|^2} (\underline{\tilde{W}} + \underline{\tilde{W}}^2) \quad (18)$$

여기에서 $\underline{\tilde{w}}$ 는 2차 비대칭텐서 $\underline{\tilde{W}}$ 의 축벡터(axial vector)이고 이것은 \mathbf{W} 의 축벡터 \mathbf{w} 와 다음 관계를 갖는다(부록 2 참조).

$$\underline{\tilde{w}} = \frac{1}{2} \frac{\tan(|\mathbf{w}|/2)}{|\mathbf{w}|/2} \mathbf{w} \quad (19)$$

전자의 방법은 쉽게 사용될 수 있으나 변형이 진행됨에 따라 오차가 가중되어 회전텐서의 3차 불변량이 1을 벗어나는 양이 점차 커지는 반면에 후자의 방법은 프로그래밍하기에 복잡하고 전자의 방법과 같이 시간증분의 크기에 따른 오차는 있을 수 있으나 회전텐서의 조건은 대변형시에도 반드시 만족시키는 것이 확인되었다. 이에 본 연구에서는 모두 후자의 방법을 이용하여 위의 결과들을 얻었다.

3. 결과 및 고찰

본 연구의 결정 소성학 이론은 입방정구조의 금속에는 수정없이 적용할 수 있으므로, 쉽게 재료상

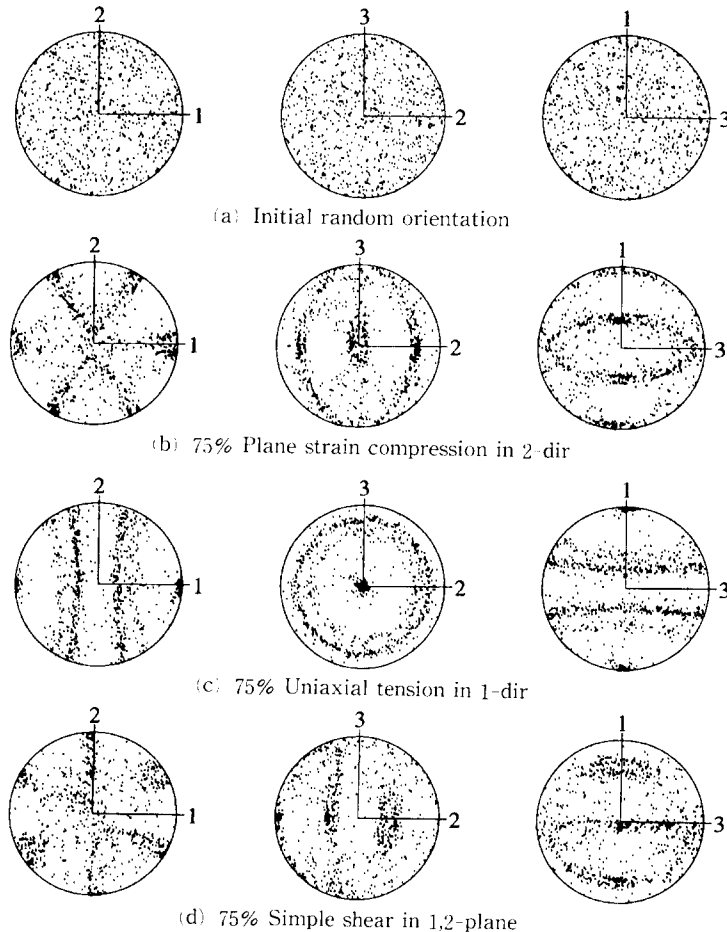


Fig. 2 {111} Pole figure for

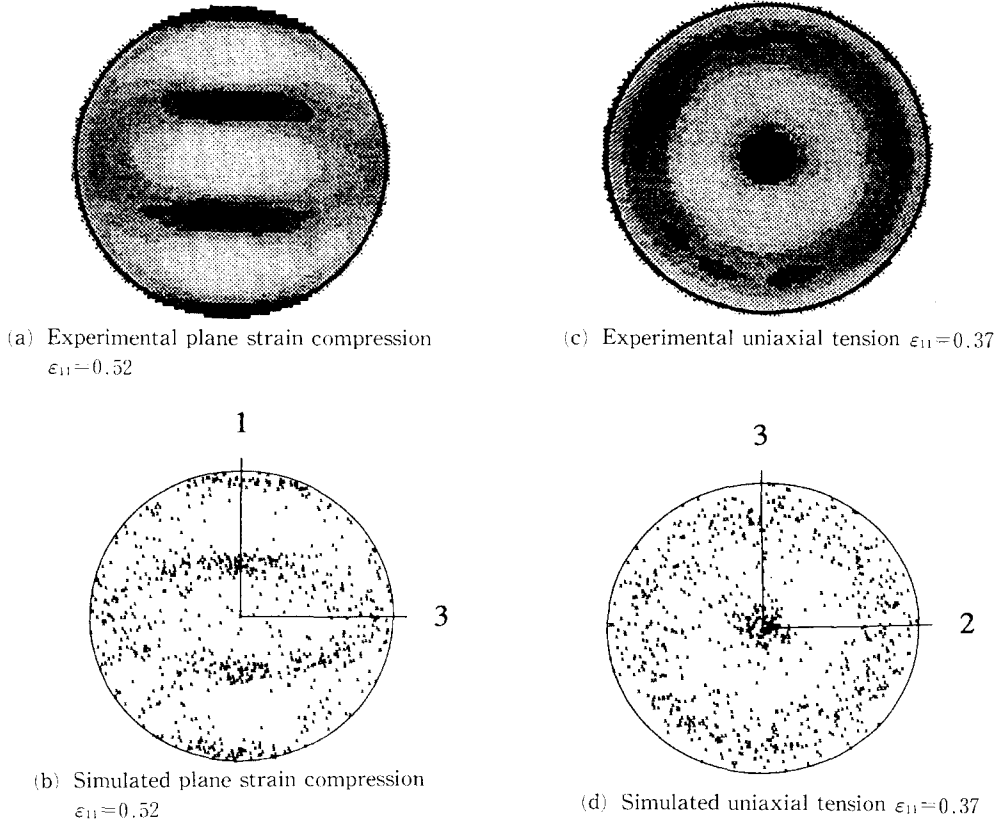


Fig. 3 Experimental and Simulated {111} pole figure

수를 구할 수 있는 FCC구조의 알루미늄 1100을 시뮬레이션 대상으로 선택하였다. 결정립 집합체 내의 결정립 수는 통계학적 분포를 고려하여 200개로 하였으며, (10) 무질서 방위의 각 결정립 오일러 각을 난수발생으로 얻어 등방성을 나타내도록 하였다.

무질서 방위를 갖는 결정립 집합체에 다음과 같은 세 가지의 속도구배를 일정하게 유지하는 변형을 고려하였다.

- (1) 평면변형률 압축변형 : $L_{11} = -L_{22} = 1.0$
- (2) 일축 인장변형 : $L_{11} = -2L_{22} = -2L_{33} = 2/\sqrt{3}$
- (3) 단순 전단변형 : $L_{12} = 2.0$

위에 주어진 속도구배에서 성분이외는 모두 영이고, 세 가지 모두 같은 크기의 유효 변형률속도를 갖는다. Fig. 2에 유효 변형률이 0.75가 되었을 때 각 경우의 {111}극점도들이 초기의 무질서 방위에 대한 극점도와 함께 주어져 있다. 평면변형률 압축

과 일축인장 변형 후에 일반적으로 관측되는 {111} 극점도와 수치해석결과를 Fig. 3에서 비교해 보았다. Fig. 3의 (a)와 (c)는 Bronkhorst, (11) Kalidin-

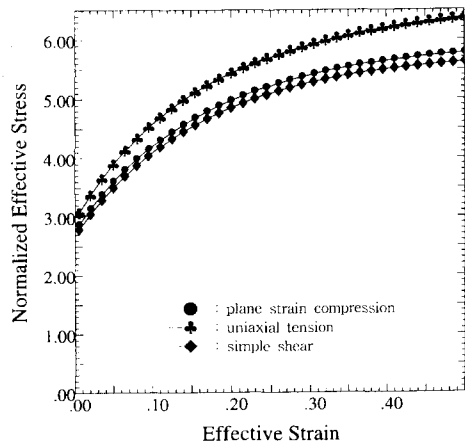


Fig. 4 Effective Stress vs. Effective Strain

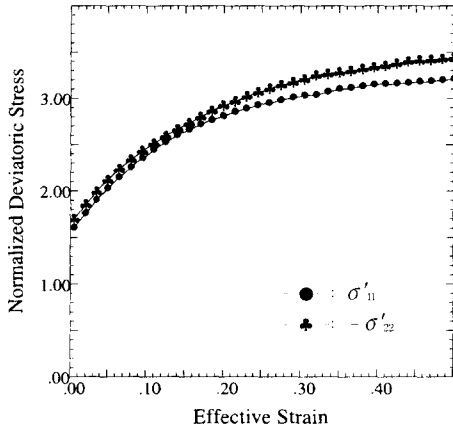


Fig. 5 σ'_{11} and σ'_{22} in plane strain compression

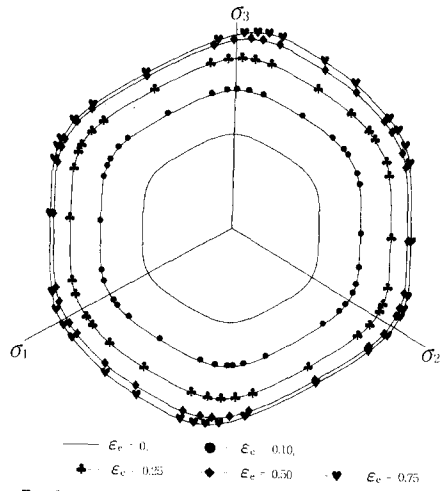


Fig. 7 Flow potential surface evolution: uniaxial tension

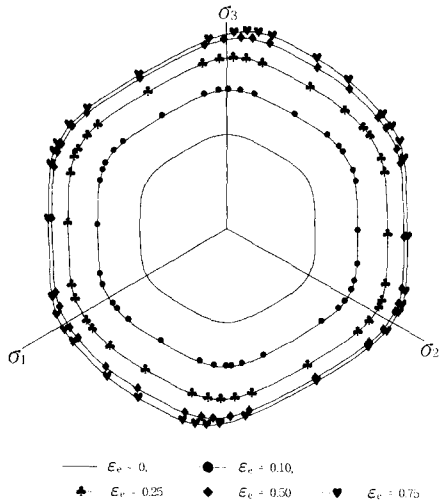


Fig. 6 Flow potential surface evolution: plane strain compression

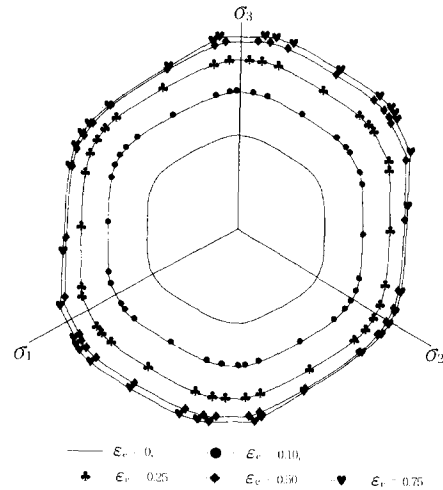


Fig. 8 Flow potential surface evolution: simple shear

di⁽¹²⁾ 등에 의해 수행된 OFHC 구리의 평면변형률 압축, 단축인장 실험후 얻은 극점도이다. 소재가 다르나 같은 FCC 구조를 갖고 있기 때문에 본 연구의 수치해석 결과와 유사한 경향을 보여주고 있다. Fig. 4에서는 세 경로에 따른 유효 응력의 변화를 보여주고 있으며, 일축인장의 경우에 평균 변형경화가 타 경우보다 크게 일어나고 있음을 나타내고 있다. Fig. 5에서는 평면변형률 압축변형을 받는 경우에 변형이 진행됨에 따라 압축방향으로의 편차수직응력이 인장방향의 수직응력보다 커지고 있는 것을 보여주고 있다. 등방성의 경우에는 두

방향으로의 응력은 크기는 같고 방향이 반대이므로 그림에서 보여주는 차만큼의 이방성이 결정립방위의 변화에 기인한 것을 알 수 있다.

점소성유동 해석에서는 항복의 개념이 없으나 이와 유사한 유동포텐셜을 만들 수 있다. Figs. 6, 7 과 8에서는 세 변형경로에 따라 등소성일률을 갖는 유동포텐셜의 변화를 π 평면에서 보여주고 있다. 무질서 방위를 갖는 집합체는 Tresca 항복곡면 형태의 등유동포텐셜 곡면을 보여주고 있다. 변형의

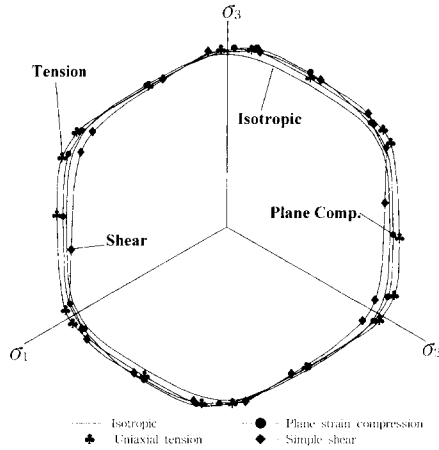


Fig. 9 Flow potential surface in π plane

초기에는 변형경화속도가 빠르나 점차 줄어들고 있으며, 형태변화는 비교적 늦게 나타나고 있다. 약간의 형태변화일지라도 유동규칙에 크게 나타날 수 있음을 주지할 필요가 있다. 변형경화의 영향을 없이 결정립 방위만이 이방성에 미치는 영향을 볼 수 있도록 같은 하드니스를 갖으며 Fig. 2에 주어진 극점도를 갖는 경우에 대한 유동포텐셜들이 Fig. 9에 주어졌다.

4. 결 론

결정 조성론의 범주내에서 방위변화에 큰 영향을 주지 않는 단상변형을 무시하고, 슬립면상에서 변형경화성의 점소성 전단변형을 가정하였다. Taylor 가정형태로 집합체내의 모든 결정립은 같은 변형률 속도를 갖는 것을 가정하고, 방위변화를 예측하기 위한 오일러적분방법과 2차 비대칭텐서 지수함수를 이용한 적분방법이 조사되었다. FCC 다결정재를 대상으로 수행한 평면변형률 압축변형, 일축인장변형과 단순전단변형 상모에 따른 수치해석결과가 Bronkhorst⁽¹¹⁾와 Kalidindi⁽¹²⁾에 의해 수행된 실험결과들과 유사한 경향을 보이므로 비교적 큰 변형률(약 0.75)까지 본 연구의 이론모델이 유효한 것을 알 수 있다. 소성가공 공정에 적용하기 위한 이방성변화의 거시-현상학적 모델링은 매우 난해하며 그 성공 가능성이 희박하다. 대신 본 연구에서는 재료의 거시적 거동의 근본원인이 되는 미시적 거동을 해석함으로써 거시적 이방성의 변화를 모사할 수 있었다.

후 기

본 연구는 1995년도 한국과학재단의 지원(과제번호 : 95-0200-40-3)에 의하여 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Taylor, G. I., 1938, "Plastic Strain in Metals," *J. Inst. Metals.*, Vol. 62, pp. 307~324.
- (2) Sachs, G., 1928, *Z. Verein Deut. Ing.*, Vol. 72, pp. 734.
- (3) Kocks, U. F., 1958, *Acta Metall.*, Vol. 6, pp. 85~94.
- (4) Piehler, H. R., 1967, Sc. D. Thesis, MIT Cambridge.
- (5) Mathur, K., and Dawson, P. R., 1989, "On Modeling the Development of Crystallographic Texture in Bulk Forming Processes," *Int. J. Plast.*, Vol. 5, pp. 67~94.
- (6) 오규환, 1994, "유한요소법을 이용한 면심입방 정금속의 변형 집합조직 예측," 한국소성가공학회지, Vol. 3(2), pp. 229~242.
- (7) Asaro, R. J., 1983, "Crystal Plasticity," *J. App. Mech.*, Vol. 50, pp. 921~934.
- (8) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L., 1986, "A Three Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects," *Comp. Methods App. Mech. Eng.*, Vol. 58, pp. 79~116.
- (9) Gurtin, M. E., 1981, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York.
- (10) Maniatty, A. M., Dawson, P. R. and Lee, Y-S., 1992, "A Time Integration Algorithm for Elasto-Viscoplastic Cubic Crystals Applied to Modeling Polycrystalline Deformation," *IJNME*, Vol. 35, pp. 1565~1588.
- (11) Bronkhorst, C. A., et al., 1992, "Polycrystalline Plasticity and the Evolution of Crystallographic Texture in FCC Metals," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, Vol. 341, pp. 445~477.
- (12) Kalidindi, S. R. and Anand, L., 1994, "Macroscopic Shape Change and Evolution of Crystallographic Texture in Pre-Textured FCC Metals,"

J. Mech. Phys. Solids, Vol. 42, No. 3, pp. 459~490.

부 록

부록 1 : 단결정 응력-변형률 관계식의 유도

슬립 시스템의 구성방정식 (8)을 단결정 운동학으로부터 유도된 변형률속도 식 (3)에 적용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{d}^{(g)} = \sum_{a=1}^{N_s} \mathbf{P}^{(a)} \alpha^{(a)} \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \left| \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \right|^{1/m-1} \quad (\text{A1})$$

$$= \sum_{a=1}^{N_s} \alpha^{(a)} \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \left| \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \right|^{1/m-1} \text{tr}(\mathbf{P}^{(a)} \boldsymbol{\sigma}^{(g)}) \mathbf{P}^{(a)} \quad (\text{A2})$$

$$= \left\{ \sum_{a=1}^{N_s} \alpha^{(a)} \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \left| \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \right|^{1/m-1} \mathbf{P}^{(a)} \times \mathbf{P}^{(a)} \right\} \boldsymbol{\sigma}^{(g)} \quad (\text{A3})$$

체적불변의 가정으로부터 변형률속도텐서 $\mathbf{d}^{(g)}$ 는 5개의 독립성분을 갖게된다. 식 (5)에서 주어진 Schmid 텐서의 대칭부 $\mathbf{P}^{(a)}$ 를 구성하는 슬립방향 벡터 $\mathbf{s}^{(a)}$ 와 슬립면 법선벡터 $\mathbf{n}^{(a)}$ 는 서로 직교하므로, 다음의 관계식이 주어진다.

$$\text{tr}(\mathbf{P}^{(a)}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{s}^{(a)} \times \mathbf{n}^{(a)} + \mathbf{n}^{(a)} \times \mathbf{s}^{(a)}) \quad (\text{A4})$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\mathbf{s}^{(a)} \times \mathbf{n}^{(a)}) + \text{tr}(\mathbf{n}^{(a)} \times \mathbf{s}^{(a)}) \right] \quad (\text{A5})$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{s}^{(a)} \cdot \mathbf{n}^{(a)} + \mathbf{n}^{(a)} \cdot \mathbf{s}^{(a)}) \quad (\text{A6})$$

$$= 0 \quad (\text{A7})$$

대칭조건과 더불어 위의 조건이 부가되어 Schmid 텐서의 대칭부 $\mathbf{P}^{(a)}$ 는 5개의 독립된 성분을 갖게된다. 강점소성해석시 편차응력성분에 의한 소성변형만을 고려하게 되므로 응력텐서 $\boldsymbol{\sigma}^{(g)}$ 또한 5개의 독립성분만을 갖는다. 그러므로, 변형률속도 $\mathbf{d}^{(g)}$ Schmid 텐서의 대칭부 $\mathbf{P}^{(a)}$ 와 응력텐서 $\boldsymbol{\sigma}^{(g)}$ 는 5개의 성분을 갖는 벡터 $\{\mathbf{d}^{(g)}\}$, $\{\mathbf{p}^{(a)}\}$, $\{\boldsymbol{\sigma}^{(g)}\}$ 로 표현할 수 있다. 식 (A3)을 벡터식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\{\mathbf{d}^{(g)}\} = \sum_{a=1}^{N_s} \alpha^{(a)} \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \left| \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}} \right|^{1/m-1} \{\mathbf{p}^{(a)}\} \{\boldsymbol{\sigma}^{(g)}\} \quad (\text{A8})$$

부록 2 : 비대칭텐서의 지수식

식 (17)의 우변 지수부는 비대칭텐서(skew symmetric tensor)로서 \mathbf{W} 라 놓고, 이것의 축벡터를 \mathbf{w} 라 하면 행렬식으로 다음과 같이 표현된다.

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{w}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A9})$$

축벡터 \mathbf{w} 의 놈(norm) $|\mathbf{w}|$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \quad (\text{A10})$$

식 (19)에 의하여 $\tilde{\mathbf{w}}$ 을 구할 수 있으며, $\tilde{\mathbf{w}}$ 와 $\tilde{\mathbf{w}}^2$ 은 다음과 같다.

$$[\tilde{\mathbf{W}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{w}_3 & \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 & 0 & -\tilde{w}_1 \\ -\tilde{w}_2 & \tilde{w}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

$$[\tilde{\mathbf{W}}^2] = \begin{bmatrix} -\tilde{w}_2^2 - \tilde{w}_3^2 & \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 & \tilde{w}_1 \tilde{w}_3 \\ \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 & -\tilde{w}_3^2 - \tilde{w}_1^2 & \tilde{w}_2 \tilde{w}_3 \\ \tilde{w}_3 \tilde{w}_1 & \tilde{w}_2 \tilde{w}_3 & -\tilde{w}_1^2 - \tilde{w}_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A12})$$

위의 식들을 식 (18)에 적용하면 비대칭텐서 \mathbf{W} 의 지수식을 구할 수 있다.

$$[\text{Exp}(\mathbf{W})] = \left[\mathbf{I} + \frac{1}{1+|\tilde{\mathbf{w}}|^2} (\tilde{\mathbf{W}} + \tilde{\mathbf{W}}^2) \right] = \begin{bmatrix} 1 - \beta(\tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2) & \beta(-\tilde{w}_3 + \tilde{w}_1 \tilde{w}_2) & \beta(\tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 \tilde{w}_1) \\ \beta(\tilde{w}_3 + \tilde{w}_1 \tilde{w}_2) & 1 - \beta(\tilde{w}_3^2 + \tilde{w}_1^2) & \beta(-\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 \tilde{w}_3) \\ \beta(-\tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 \tilde{w}_1) & \beta(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 \tilde{w}_3) & 1 - \beta(\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

여기서, $\beta = 1/(1+|\tilde{\mathbf{w}}|^2)$, $|\tilde{\mathbf{w}}| = \tan(|\mathbf{w}|/2)$ 이다.