

〈논 문〉

마찰력이 개재된 3차원 강체충돌 해석 —타원체간 충돌—

한인환* · 조정호**

(1995년 9월 4일 접수)

Analysis of Three-Dimensional Rigid-Body Collisions with Friction —Collisions between Ellipsoids—

Inhwan Han and Jeongho Cho

Key Words : Three-Dimensional Rigid-Body (3차원 강체), Ellipsoid (타원체), Theory of Impulse and Momentum (역적-운동량 이론), Poisson's Hypothesis (Poisson의 가설), Frictional Impact (마찰충돌), Sliding and Sticking (미끄럼정지), Forward Sliding (순미끄럼)

Abstract

The problem of determining the 3-dimensional motion of any two rough bodies after a collision involves some rather long analysis and yet in some points it differs essentially from the corresponding problem in two dimensions. We consider a special problem where two rough ellipsoids moving in any manner collide, and analyze the three dimensional impact process with Coulomb friction and Poisson's hypothesis. The differential equations that describe the progress of the impact induce a flow in the tangent velocity space, the flow patterns characterize the possible impact cases. By using the graphic method in impulse space and numerical integration technique, we analyzed the impact process in all the possible cases and presented the algorithm for determining the post-impact motion. The same principles could be applied to the general problem in three dimensions. We verified the effectiveness of the analysis results by simulating the numerous significant examples.

1. 서 론

시스템을 구성하는 물체들 간의 충돌시 동적거동을 해석하는 방법은 크게 2가지로 나눌 수 있다. 구조역학적인 해석방법^(1,2)과 강체역학의 범주 내에서 역적-운동량 이론을 이용하는 해석방법⁽³⁾이다. 그런데, 기계 부품처리 시스템뿐만 아니라 자동차

충돌문제에 이르기까지, 강체역학의 범주 내에서 충돌문제를 해석하는 것이 많은 경우에 오히려 적절하다는 연구보고가 있다.⁽⁴⁾

강체 충돌에 관한 기존의 연구들은 마찰의 역할을 무시하거나 혹은, Coulomb의 법칙을 그대로 적용, 단순히 법선 역적(normal impulse)의 값에 마찰계수를 곱하여 접선 역적(tangential impulse)의 값으로 사용하였다. 실제로 충돌의 짧은 시간동안 충돌하는 물체들의 분리 이전에 그 미끄럼의 방향이 변하거나 정지할 수 있다는 가능성을 간과한

*회원, 홍익대학교 기계설계학과

**홍익대학교 대학원

것이다. 따라서, 그 결과는 대체로 부적절한 것이 되고, 상황에 따라서는 충돌 후 운동에너지가 충돌 전보다 오히려 증가하는 치명적인 오류까지 범하게 되었다.⁽⁵⁾ 이러한 마찰충돌에서의 문제를 해결하기 위해 최근에 많은 연구가 진행되어 왔으며, Wang⁽⁶⁾은 이러한 연구 결과들을 Table 1에서 볼 수 있는 것처럼 요약하였다. 이 연구 결과들은 마찰 충돌의 해석 과정에서 역적-운동량방정식에 추가적인 구속조건의 역할을 하는 반발계수를 정의하는 방법에 따라, 다음과 같이 3가지로 나뉘어 질 수 있다.

○Newton의 가설: 충돌접촉점에서 충돌 전후의 법선방향 상대속도 비

○Poisson의 가설: 압축과 반발 구간 과정동안의 법선 역적의 비

○에너지 소산(dissipation) 가설: 압축과 반발 구간과정에서 에너지 전달량의 비의 이중근

아주 최근에도 계속되고 있는 마찰충돌에 관한 연구들⁽⁷⁻⁹⁾도 앞서 언급한 3가지의 카테고리로부터 벗어나고 있지는 않다. 3가지의 카테고리 중

Poisson의 가설과 에너지 소산 가설이 에너지 변화 관점에서 적절한 것으로 여겨지고 있으며,⁽⁶⁾ 논문 저자도 마찰력을 수반하는 일반적 2차원 충돌 문제에 대해 Poisson의 가설에 근거한 충돌후 동적 운동에 대한 해를 제시하였고, 실험에 의해 해석 결과를 입증한 바 있다.⁽³⁾ Stronge⁽¹⁰⁾이 최초로 세창한 에너지 소산 가설은 에너지 변화 관점에서 볼 때 가장 합리적인 것으로 여겨지고 있으나, 실험에 의해 입증된 자료가 없을 뿐만 아니라 정면중심충돌(direct central impact)에서도 점접촉적이 발생하는 오류가 개재되어 있다.⁽⁶⁾

Routh⁽¹¹⁾는 강체역학의 범주 내에서, Poisson의 가설에 근거하여 마찰력이 개재된 물체간의 충돌 운동을 해석하기 위한 그래픽 방법을 최초로 연구하였다. 이 Routh의 그래픽방법에 근거하여 Wang and Mason⁽¹²⁾은 2차원 물체 간 마찰충돌에 관한 해석결과를 제시하였으나, 단일 강체와 지면과의 충돌에서 물체의 충돌후 회전에 관한 정성적인 변화만을 언급하였다. Brach⁽¹³⁾는 마찰계수를

Table 1 Summary of previous work-Rigid body impact models⁽⁶⁾

	Assumptions	Impact hypothesis	Analysis and simulation	Remarks
Lötstedt [1984]	Rigid; w/friction; planar	Newton's kinematic hypothesis	Analytical solution	Reduces the problem to a quadratic programming problem
Keller [1986]	Rigid; w/friction; spatial	Poisson's impulse hypothesis	Analytical solution	Formulation for three dimensional dynamics
Brach [1989]	Rigid; w/friction; planar	Newton's kinematic hypothesis	Analytical solution	Broader interpretation of μ (impulse ratio)
Han and Gilmore [1990]	Rigid; w/friction; planar	Poisson's impulse hypothesis	Analytical solution and simulation	Simulation of part feeding
Wang and Mason [1991]	Rigid; w/friction; planar	Poisson's impulse hypothesis	Analytical solution	Routh's graphical technique
Stronge [1990]	Rigid; w/friction; planar	Energy dissipation hypothesis	Analytical solution	Energy hypothesis is most satisfying

확장한 역적비(impulse ratio)라는 개념을 정의하여 Newton의 기구학적 가설에 근거한 해석방법을 제시하였다. 또한, Wang^(6,14)과 Marghitu 등⁽¹⁶⁾이 Stronge의 가설을 이용하여 다점 마찰접촉에 관한 해석을 수행한 바 있다.

그러나, 어느 경우에도 마찰력이 개재된 3차원 강체 충돌에 관해서는 체계적인 연구 결과가 발표되지 못했었다. Bhatt and Koechling^(7,8)은 3차원 강체와 지면과의 일점 마찰충돌에 관해 모델링을 수행하였고, 충돌 접촉점에서의 동적 현상을 특성화 하였다. 그러나, 그들은 충돌 접촉점에서 역적의 효과를 단순화하여 역적에 의한 모멘트 효과를 무시하였고 또한, 마찰충돌의 유형만을 분류한 채 구체적인 충돌 해석결과는 제시하지 못했다. Routh⁽¹¹⁾는 3차원 충돌에 대해서도 2차원 충돌 해석방법과 마찬가지로의 해결방법을 제시하고 일부 해석을 전개하였으나, 완벽한 결과는 제시하지 않았다. Brach⁽¹⁵⁾는 역적비 개념을 사용하여 3차원 충돌에 대한 모델링 결과를 제시하고, 긴 막대가 지면에 충돌하는 특정한 3차원 문제에 대한 해를 제시한 바 있다. 그는 충돌동안 운동에너지 감소량의 관찰을 주요한 문제로 간주하였고, 3차원 충돌의 일반적인 해결을 위해서는 운동방정식 적분에 의한 방법의 유용성을 인정하였다. 그런데, 3차원 문제는 일반적으로 2차원 문제 해결 방법의 단순한 확장으로 해결할 수 없다는데, 그 어려움이 있다.

본 논문에서는, 저자에 의해 발표된 2차원 마찰충돌이론⁽³⁾을 근거로 하여, 3차원 마찰 충돌에서 일반적으로 적용될 수 있는 해석방법을 제시한다. 일반적인 강체 간의 충돌에 관한 문제는 지나치게 복잡한 해석과정을 요구하게 되므로, 본 논문에서는 Routh⁽¹¹⁾가 제시한 것과 같은 타원체들(ellipsoids) 주직경(principal diameter) 간의 접촉점에서 3차원 마찰충돌이라는 특별한 문제에 대한 완벽한 해를 제공한다. 이 특별한 문제는 최소한 구(sphere)간의 충돌은 모두 포괄하게 된다. 충돌과정을 묘사하는 미분방정식으로부터 속도공간에서 흐름 유형에 근거한 정성적 해석결과 및 2차원 마찰 충돌 해석에서 사용했던 그래픽방법에 근거한 정량적 마찰충돌 해석결과를 제시한다. 이러한 이론적 해석 결과를 토대로 한 컴퓨터 시뮬레이션 프로그램을 작성하여, 특성화되고 분류된 여러 가지 주요한 예제들에의 적용을 통해 제시한 해석결과의 유용성을 입증하도록 하였다.

2. 운동방정식

Fig. 1에서 볼 수 있는 것처럼, 두개의 거친 탄성 타원체가 충돌하는 경우에 대해 해석방법을 모색할 것이다. 한 타원체의 주직경의 끝이 다른 타원체의 주직경의 끝과 접촉 충돌이 발생하고, 충돌 순간에 한 타원체의 3개의 주축은 다른 타원체의 3개의 주축과 평행하다고 고려한다. 문제를 수학적으로 용이하게 처리하기 위해, 충돌을 순간적인 것으로 가정하지 않으나, 그 미소의 시간동안 모든 물체의 회전방향과 위치는 불변한다고 가정한다.

2.1 역적-운동량 방정식

Fig. 1에서 좌표축 (x, y, z) 는 그 원점을 충돌 접촉점에, 그리고 각 축을 타원체를 주축에 평행하도록 설정하였고, 타원체의 주반경 a, b, c 는 각각 x, y, z 축 방향으로 하였다. 역적-운동량 이론을 적용하여, body 1, 2에 대해 운동방정식을 작성하면 식 (1), (2)로 나타낸다.

$$m_1(v_{1x} - v_{1x0}) = -P_x$$

$$m_1(v_{1y} - v_{1y0}) = -P_y$$

$$m_1(v_{1z} - v_{1z0}) = -P_z$$

$$I_{1xx}(w_{1x} - w_{1x0}) = c_1 P_y$$

$$I_{1yy}(w_{1y} - w_{1y0}) = -c_1 P_x$$

$$I_{1zz}(w_{1z} - w_{1z0}) = 0 \quad (1b)$$

$$m_2(v_{2x} - v_{2x0}) = P_x$$

$$m_2(v_{2y} - v_{2y0}) = P_y$$

$$m_2(v_{2z} - v_{2z0}) = P_z \quad (2a)$$

$$I_{2xx}(w_{2x} - w_{2x0}) = c_2 P_y$$

$$I_{2yy}(w_{2y} - w_{2y0}) = -c_2 P_x$$

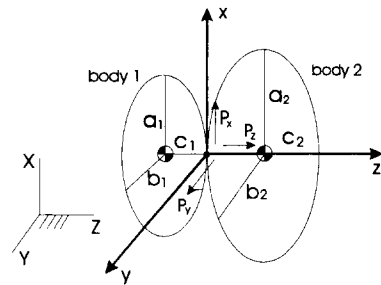


Fig. 1 Coordinate system and impulse components for colliding ellipsoids

$$I_{2zz}(w_{2z} - w_{2z0}) = 0 \quad (2b)$$

$P_z(t)$ 는 법선 역적이고, $P_x(t)$ 와 $P_y(t)$ 는 각각 x , y 축 방향으로의 접선 역적이다. Fig. 1에서 보여지는 역적들은 body 2에 작용하는 것들을 나타낸 것이고, 같은 크기 반대방향의 역적들이 body 1에 작용한다. 구조역학적인 해석방법에서는 식 (1)(2)로 표현되는 역적-운동량 방정식이 사용될 수 없으며, 내부 변형도 에너지(internal strain energy)를 별도로 고려해야만 한다. (2) Fig. 1에 보여지는 물체들에 대해 충돌 접촉점에서 접선방향 상대속도 $s_x(t)$, $s_y(t)$, 그리고 법선방향 상대속도 $c(t)$ 를 각각 구하면, 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} s \cos \theta &= v_{1x} + c_1 w_{1y} - v_{2x} + c_2 w_{2y} \\ s \sin \theta &= v_{1y} + c_1 w_{1x} - v_{2y} + c_2 w_{2x} \\ c &= v_{1z} - v_{2z} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서 s 는 충돌 접촉점에서의 미끄럼 상대속도 (≥ 0)이고, θ 는 미끄럼방향이 x 축과 이루는 각도이다. 식 (1), (2)를 식 (3)에 대입하여 정리하면 식 (4)로 표시할 수 있다.

$$s_x = s \cos \theta = s_0 \cos \theta_0 - A P_x \quad (4a)$$

$$s_y = s \sin \theta = s_0 \sin \theta_0 - A' P_y \quad (4b)$$

$$c = c_0 - B P_z \quad (4c)$$

여기서,

$$\begin{aligned} s_0 &= s(t_0), \quad c_0 = c(t_0) \\ A &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{c_1^2}{I_{1yy}} + \frac{c_2^2}{I_{2yy}} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$A' = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{c_1^2}{I_{1xx}} + \frac{c_2^2}{I_{2xx}} \quad (5b)$$

$$B = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (5c)$$

식 (5)에서 3개의 상수 A, A', B 는 충돌전의 속도와는 무관하며, 충돌하는 두 물체의 기하학적 상대 위치 및 질량에 따라 정해진다. 식 (5)에서 알 수 있듯이 상수 A, A', B 는 항상 양수이고, 두 물체가 충돌하기 위해서는 c_0 도 역시 양수이어야 한다. 두 물체가 구일 경우에는 항상 $A = A'$ 이다.

2.2 역적 구속조건

식 (1), (2)에 보여지는 것처럼 12개의 역적-운동량 방정식을 유도할 수 있고, 12개의 속도 성분과 3개의 역적을 포함하는 도합 15개의 변수가 결정되어야 한다. 속도와 역적에 관해 풀기 위해서는 3개의 구속조건 방정식이 추가로 요구된다. 이러한

3개의 구속조건은 충돌하는 두 물체의 탄성(elasticity)과 거칠기(roughness)에 의해 결정될 수 있다.

식 (4c)에서 $c(t)$ 에 관한 표현은 충돌과정중 압축과정의 종료시점에서 법선 역적을 결정하기 위해 사용되어 진다. 역적공간(P_x, P_y, P_z)에서 상대법선속도 $c(t)=0$ 에 의해 결정되는 평면은 (P_x, P_y)평면에 평행하게 되며, 이를 최대압축평면(plane of maximum compression) C 로 정의하고 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$c = c_0 - B P_z = 0 \quad (6)$$

최대압축평면 C 는 P_z -축과 교차하게 되며, 그 교차점 $P_{zc} = \frac{c_0}{B}$ 로 나타난다. $c(t)=0$ 가 되는 순간에, 접촉점의 상대법선속도는 0이 되고, 충돌의 압축과정은 종료된다. 또한, 반발계수 e 는 식 (7)과 같이 Poisson의 가설로 정의한다.

$$\frac{P_z(t_f)}{P_z(t_c)} = 1 + e \quad (7)$$

식 (7)에서 t_c 는 최대압축시의 시간이고, t_f 는 충돌 종료시간이다. 충돌과정중 법선 역적은 식 (6)과 (7)에 의해 결정할 수 있으며, 두 식은 함께 하나의 역적 구속조건(impulse constraints)식을 제공한다.

식 (4a, b)에서 상대접선속도 $s(t)=0$ 로 놓으면, 미끄럼정지에 관한 역적의 선형관계를 식 (8)로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_x &= s_0 \cos \theta_0 - A P_x = 0 \\ s_y &= s_0 \sin \theta_0 - A' P_y = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)로 역적공간 (P_x, P_y, P_z)에서 표현되는 선은 P_z -축과 평행한 직선이 되며 이를 미끄럼 정지선(line of sticking) S 라고 정의한다. Coulomb 마찰은 많은 물체들의 접촉을 모델링할 때, 가장 적절한 1차(first-order) 모델이다. (16) 미분 역적(differential impulse)은 힘이므로, 마찰구속조건은 Coulomb 법칙에서 구할 수 있으며 식 (9)로 나타난다.

$$\text{Sliding Regime: } |dP_s| = \mu \cdot dP_z \quad (9)$$

dP_s 와 dP_z 는 각각 접선방향과 법선방향의 미분 선형역적이고, μ 는 충돌동안의 마찰계수이다. 식 (8)은 식 (9)와 함께 또 하나의 역적 구속조건식을 제공한다.

식 (9)로 표현되는 Coulomb법칙을 등방성(7)으로

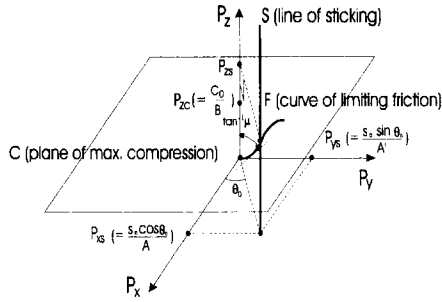


Fig. 2 Impact process diagram in the impulse space

고려한다면, 식 (10)과 같은 표현을 구할 수 있게 된다.

$$(dP_s)^2 = (dP_x)^2 + (dP_y)^2, \frac{dP_y}{dP_x} = \tan \theta \quad (10)$$

식 (10)으로 표현되는 Coulomb법칙의 등방성은 추가적인 역적 구속조건 역할을 하게 된다. 식 (9)와 (10)으로부터 역적 공간상에서 한계마찰곡선 (curve of limiting friction) F 를 정의할 수 있으며, 식 (11)로 표현할 수 있게 된다.

$$\sqrt{(dP_x)^2 + (dP_y)^2} = \mu dP_z \quad (11)$$

역적공간상에서 충돌과정의 진행은, 미끄럼 정지점에 다다를 때까지 F 를 따라 진행하게 된다. Fig. 2에는 최대압축평면 C , 미끄럼 정지선 S , 한계마찰곡선 F 가 보여진다.

3. 마찰충돌 해석

Bhatt and Koechling⁽⁷⁾이 채용했던 방법과 유사하게, 충돌 접촉점에서의 미끄럼속도를 접선속도 공간에서 유동으로 가시화하여 정성적인 충돌해석 방법을 제시한다. 정성적인 충돌 해석과정을 통해, 주어진 모델에 대해 충돌의 가능한 경우를 정형화하고 분류한다. Routh의 그래픽 방법과 해석적 방법을 통해, 분류된 충돌의 각개의 경우에 대해 정량적인 충돌 해석을 수행하여 주어진 문제에 대한 완벽한 해를 제시한다.

3.1 정성적 충돌 해석

식 (10)으로 나타나는 등방성 Coulomb법칙은 상대 접선속도 평면 (s_x, s_y)에서의 흐름(미끄럼)을 고려할 때 식 (12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dP_x}{dP_z} = -\frac{\mu s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}, \frac{dP_y}{dP_z} = \frac{\mu s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \quad (12)$$

식 (8)을 P_z 에 관해 미분을 한 결과가 식 (13)으로 보여진다.

$$\begin{aligned} \frac{ds_x}{dP_z} &= -A \frac{dP_x}{dP_z} = -A \frac{\mu s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \\ \frac{ds_y}{dP_z} &= -A' \frac{dP_y}{dP_z} = -A' \frac{\mu s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

P_z 를 확장하여 식 (14)와 같이 정의하면, 충돌 개시로부터 미끄럼 정지점 (sticking point)에 도달하기까지의 흐름 관계식은 식 (13)으로부터 식 (15)로 나타나진다.

$$d\tau = \frac{\mu}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} dP_z \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds_x}{d\tau} &= -A s_x \\ \frac{ds_y}{d\tau} &= -A' s_y \end{aligned} \quad (15)$$

식 (14)에서, 흐름에 따른 변수로서 P_z 로부터 τ 로의 변환은 미끄럼 정지점에 도달하기 전까지는 적절한 역할을 수행하나, 미끄럼 정지점에 이르면 $s_x = s_y = 0$ 이 되어 τ 가 무한대가 되므로 제대로 정의되지 못한다. 따라서, 운동방정식을 풀기 위해 수치 적분을 이용할 경우 미끄럼 정지점 근방에서 해가 불안정해질 가능성이 있으므로 해석적 결과를 사용해야 할 필요성이 있다. Fig. 3은 식 (15)의 흐름 관계식으로부터 얻을 수 있는 흐름패턴이며, A 와 A' 사이의 관계에 따라 그 유형이 결정된다. Fig. 3에서 볼 수 있는 것처럼, 모든 흐름이 미끄럼 정지점 (sink)에 도달하게 되므로, 역적 공간 (P_x, P_y, P_z)에서 한계마찰곡선 F 가 반드시 미끄럼 정지선 S 와 교차하게 된다는 사실을 알 수 있다. 물론, 실제 충돌과정에서 충돌완료전까지 미끄럼 정지점에 도달하지 않을 수도 있다. 또한, $A=A'$ 이거나 혹은 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 이라면 미끄럼방향(흐름 방향)이 전혀 변화하지 않는다는 사실도 아울러 확인할 수 있다. 그런데, 일단 미끄럼 정지점에 도달하면 역적공간에서 S 가 P_z -축에 평행하므로, 어떤 경우의 마찰계수에도 F 를 따라 진행되던 충돌과정은 S 를 따라 진행하게 된다. 따라서, 구끼리의 충돌의 경우에는 어떤 경우에도 충돌과정 중 미끄럼 방향이 변화하지 않게 되고, 타원체끼리의 충돌에도 초기 상대접선속도의 방향이 타원체 주축의 방

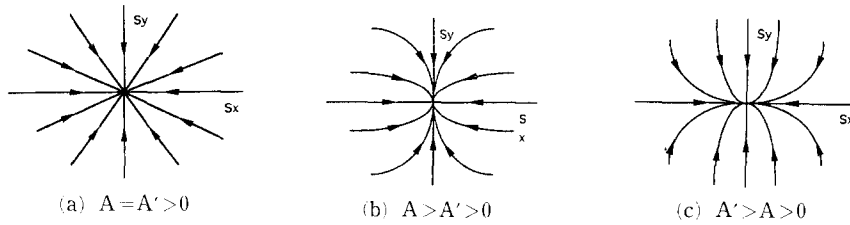


Fig. 3 Impact flow in the (s_x, s_y) plane

항과 일치할 때에는 미끄럼방향이 불변이다. 주어진 문제에 대해, 충돌동안 전 과정을 통해 미끄럼 방향이 불변하는 경우 (CASE 1: $\theta = \text{const.}$)와 미끄럼방향이 변하는 경우 (CASE 2: $\theta \neq \text{const.}$)로 아래와 같이 분류할 수 있게 된다.

- CASE 1: $A = A'$ or $\sin 2\theta_0 = 0$ (or $s_0 = 0$)
- CASE 2: $A \neq A'$ and $\sin 2\theta_0 \neq 0$ (and $s_0 \neq 0$)

또한, 식 (8)로부터 알 수 있는 것처럼 $s_0 = 0$ 일 경우에는 항상 S 가 P_z 축과 일치하게 되며, 충돌 과정동안 계속해서 S 를 따라 충돌이 진행될 것이다. 따라서, 이 경우는 CASE 1의 특별한 경우로 간주할 수 있을 것이다.

식 (15)로 표현되는 흐름 관계식을 적교좌표계에서 극좌표계로 변환을 하면, 식 (16)으로 나타낼

수 있으며 그 흐름 패턴이 Fig. 4에 보여지고 있다.

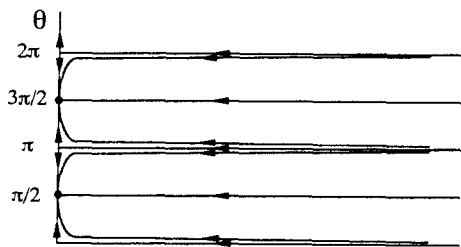
$$\frac{ds}{d\tau} = -s(A \cos^2 \theta + A' \sin^2 \theta)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = (A - A') \cos \theta \sin \theta$$

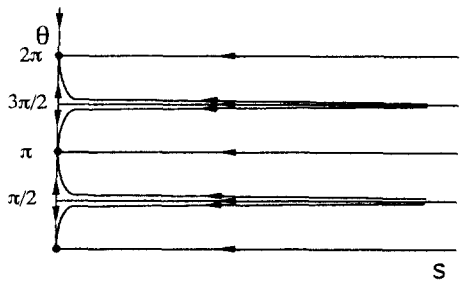
여기서

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{s_y}{s_x} \right) \quad (16)$$

Fig. 4에 보여지는 (s, θ) 평면에서의 흐름 다이어그램으로부터 쉽게 알 수 있는 사실은 미끄럼 정지점에 도달하기까지 흐름의 방향 θ 는 θ_0 가 속한 4분면을 벗어날 수 없다는 것이다. 또한, 주어진 θ_0 의 값으로부터 미끄럼 정지점($s=0$)에서의 θ 값을 결정할 수 있다.



(a) $A > A'$: $A = 31.7391, A' = 28.6091$



(b) $A < A'$: $A = 28.6091, A' = 31.7391$

Fig. 4 Impact flow in the (s, θ) plane

3.2 정량적 충돌해석-그래픽 해석

가능한 충돌 경우를 분류하고 각각의 경우에 관한 해석적 해를 구하기 위해, 마찰충돌 해석에서 그래픽 방법을 사용한다. 충돌 초기에 각 body는 각각의 면위를 미끄러진다. 식 (12)로 표현되는 Coulomb법칙에 식 (8)을 적용하면 식 (17)을 구할 수 있다.

$$\frac{dP_x}{s_0 \cos \theta_0 - A P_x} = \frac{dP_y}{s_0 \sin \theta_0 - A' P_y} \quad (17)$$

충돌과정에서 $P_x = P_y = 0$ 이라는 초기조건을 가지고, 식 (17)을 적분하면, 식 (18)이 결과된다.

$$\left(\frac{s_0 \cos \theta_0 - A P_x}{s_0 \cos \theta_0} \right)^{1/A} = \left(\frac{s_0 \sin \theta_0 - A' P_y}{s_0 \sin \theta_0} \right)^{1/A'}$$

or

$$\left(\frac{s \cos \theta}{s_0 \cos \theta_0} \right)^{1/A} = \left(\frac{s \sin \theta}{s_0 \sin \theta_0} \right)^{1/A'} \quad (18)$$

식 (18)로부터 s 에 대한 표현은 식 (19)로 나타나며, 미끄럼속도(s)와 미끄럼방향(θ)간의 관계를 규정한다.

$$\frac{ds}{d\theta} = s \frac{A \cos^2 \theta + A' \sin^2 \theta}{(A - A') \cos \theta \sin \theta} \quad (29)$$

식 (29)를 식 (27)에 대입하면, θ 에 따른 접선 역적의 변화율은 식 (30)으로 나타난다.

$$\frac{dP_x}{d\theta} = \frac{s}{(A - A') \sin \theta} \quad (30a)$$

$$\frac{dP_y}{d\theta} = \frac{s}{(A - A') \cos \theta} \quad (30b)$$

식 (30)으로 표현되는 결과를 식 (11)에 대입하면 법선 역적과 관련하여 식 (31)을 얻을 수 있고, 이 식을 적분하여 충돌과정 중 법선 역적에 관한 표현을 식 (32)로 구할 수 있다.

$$(\mu \frac{dP_z}{d\theta})^2 = \frac{s^2}{(A - A')^2} \cdot \frac{2^2}{(\sin 2\theta)^2} \quad (31)$$

$$P_z = \frac{2}{\mu |A - A'|} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{s}{|\sin 2\theta|} d\theta \quad (32)$$

식 (30), (32)로 충돌 접촉점에서 충돌개시후 미끄럼이 정지되기까지의 역적공간에서의 경로가 구해진다. Fig. 2에 보는 것처럼, 그 경로곡선은 역적공간에서 한계마찰곡선 F 가 되고, 그 접선은 P_z 축과 항상 일정한 각도 $\tan^{-1} \mu$ 를 이루게 된다. 식 (18)로 정의되는 경로곡선, 즉 F 에 관한 식이 미끄럼 정지선 S 를 묘사하는 식 (8)에 의해 만족되므로 F 는 반드시 S 와 교차하게 된다. 이 사실은 Fig. 3의 흐름 다이어그램으로부터도 확인된다. CASE 1의 경우와 마찬가지로, 충돌개시후 역적공간에 식 (18), 즉 식 (30), (32)로 정의되는 F 를 따라 진행하던 충돌과정은 S 와의 교차점부터는 P_z 가 증가하는 방향으로 S 를 따라 충돌이 진행하게 된다. 미끄럼 정지점에 도달하기까지 미끄럼의 방향 θ 는 θ_0 가 속한 4분면을 벗어나지 않으며, 미끄럼 정지점에서의 θ 의 값 θ_s 는 θ_0 가 속한 범위에 따

라 달라지게 된다. Table 2에 보여지는 θ_s 값을 식 (32)에 대입하면 F 와 S 와의 교점의 P_z 좌표를 식 (33)으로 구할 수 있다.

$$P_{zs} = \frac{2}{\mu |A - A'|} \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{s}{|\sin 2\theta|} d\theta \quad (33)$$

그런데, 식 (33)을 풀기 위해 수치적분을 수행하면, 무한대로 발산하는 경우가 발생하게 되므로 해석적 방법의 도움이 필요하게 된다. 식 (19)로 표현되는 s 를 식 (33)에 대입하여 정리하면, A 와 A' 의 상대적 크기에 따라 식 (34)로 나타난다.

$$\cdot A > A': \theta_s = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3\pi}{2}$$

$$P_{zs} = G_1(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{(|\cos \theta|)^{\frac{2A'-A}{A-A'}}}{(|\sin \theta|)^{\frac{2A'-A'}{A-A'}}} d\theta \quad (34a)$$

$$\cdot A < A': \theta_s = 0 \text{ or } \pi$$

$$P_{zs} = G_2(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{(|\cos \theta|)^{\frac{2A'-A}{A-A'}}}{(|\sin \theta|)^{\frac{2A'-A'}{A-A'}}} d\theta \quad (34b)$$

식 (34)로부터 P_{zs} 가 무한대로 발산하는 경우는 식 (35)로 나타낼 수 있다,

$$A > 2A' \text{ or } A < \frac{1}{2}A' \quad (35)$$

CASE 1과 마찬가지로 CASE 2도 미끄럼 정지 충돌(CASE 2-1)과 순 미끄럼 충돌(CASE 2-2)로 구분할 수 있다. 또한, 두 경우 모두 최종 법선 역적은 식 (22)와 똑같이 식 (36)으로 나타난다.

$$P_{zE} = (1 + e) \frac{C_0}{B} \quad (36)$$

그리고, CASE 1과 유사하게, Fig. 2로부터 두 경우에 대한 조건과 최종 접선 역적값은 아래와 같이 정리할 수 있다.

(CASE 2-1) Sliding and Sticking: $P_{zs} \leq P_{zE}$

$$P_{xE} = \frac{s_0 \cos \theta_0}{A}$$

$$P_{yE} = \frac{s_0 \sin \theta_0}{A'} \quad (37)$$

(CASE 2-2) Forward Sliding: $P_{zs} > P_{zE}$

$$P_{xE} = \frac{1}{(A - A')} \int_{\theta_0}^{\theta_E} \frac{s}{\sin \theta} d\theta$$

$$P_{yE} = \frac{1}{(A - A')} \int_{\theta_0}^{\theta_E} \frac{s}{\cos \theta} d\theta \quad (38)$$

식 (37), (38)에서 충돌 종료점에서의 미끄럼 방향 θ_E 는 식 (36)으로 표현되는 P_{zE} 값을 식 (32)에

Table 2 The θ_s -values corresponding to the region which includes θ_0

θ_0	θ_s	$A > A'$	$A < A'$
	$0 < \theta_0 < \pi/2$	$\pi/2$	
$\pi/2 < \theta_0 < \pi$	π		
$\pi < \theta_0 < 3\pi/2$	$3\pi/2$		0
$3\pi/2 < \theta_0 < 2\pi$			2π

적용하여 식 (39)와 같은 적분방정식을 풀어서 구하게 된다.

$$(1+e) \frac{c_0}{B} = \frac{2}{\mu |A-A'|} \int_{\theta_0}^{\theta_E} \frac{S}{|\sin 2\theta|} d\theta \quad (39)$$

식 (39)에서 구한 θ_E 값을 식 (37), (38)에 대입하여 각개의 경우에 대한 점선 역적을 구할 수 있게 된다. CASE 2-1의 경우는 CASE 1-1의 경우와 똑같게 되며 역적값도 같게 된다. 또한, 식 (35)의 경우는 P_{2s} 가 무한대로 발산하므로 무조건 CASE 2-2에 속하게 된다.

CASE 1 그리고 CASE 2의 경우 모두 순미끄럼 혹은 미끄럼정지 충돌의 형태만 존재하게 되며 미끄럼방향의 역전현상은 주어진 모델에 대해서는 발생하지 않게 된다.

4. 시뮬레이션 예제

전 절에서 제시한 해석 결과에 근거하여, 여러 가지 경우에 대해 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 본 절에서는 Fig. 1에 나타난 모델에 준하는 예제를 크게 2가지의 카테고리로 나누어, 시뮬레이션 결과를 제시한다. Fig. 6에서 보여지는 첫번째 카테고리는 구 혹은 타원체인 단일 물체와 지면과의 충돌이고, Fig. 7의 두번째 카테고리는 두개의 움직이는 구 혹은 타원체 간의 충돌이다. 두번째 카테고리는 편의상 구의 포함여부에 따라 다시 두가지로 분류하였다. 충돌과 관련된 시뮬레이션이나 실험에 의한 해석에서 가장 주요한 부분은 충돌 전후의 운동에너지 감소량의 비율이다.⁽¹⁵⁾ 따라서, 각 카테고리에 속한 예제에서 마찰계수 및 반발계수를 변화시키면서 운동에너지의 감소비율 비교 결과를 제시한다.

4.1 카테고리 I: 단일 물체 충돌

Fig. 6에 보여지는 예제들과 관련된 입력 파라미

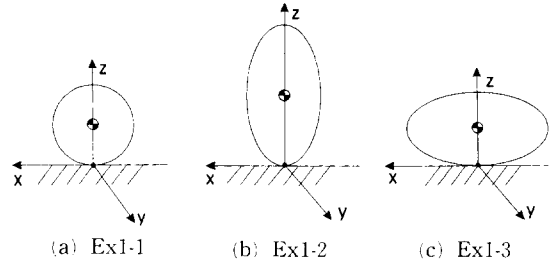


Fig. 6 Category I examples: a colliding body to the ground

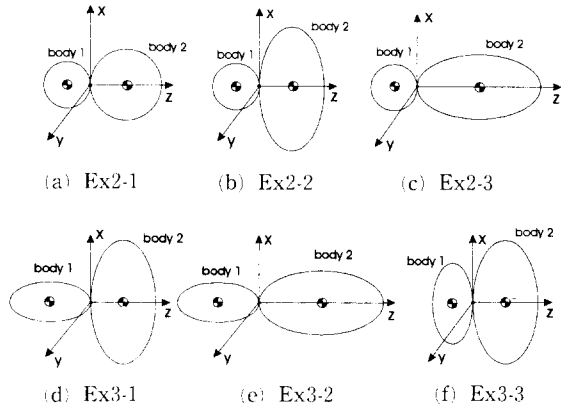


Fig. 7 Category II examples : two colliding bodies

터 값들은 Table 3에 나타나 있다. Table 3에서, 질량 관성 모멘트 (I_{xx} , I_{yy} , I_{zz})는 질량중심에서 주축 방향인 x , y , z 축에 대하여 결정된 값들이다. Fig. 8에서는 각 예제들에 대해, 마찰계수 및 반발계수를 변화시키면서 구한 운동에너지 감소비율이 그래프로 보여지고 있다. Fig. 8에서 볼 수 있는 것처럼, 비교적 작은 마찰 계수일 경우에는 순미끄럼 충돌의 경우에 해당되므로 마찰계수가 증가할수록 운동에너지 감소율이 증가하게 된다. 그러나, 마찰계수가 증가하여 어느 정도 값에 이르르면 미끄럼정지 충돌 경우에 해당되므로 운동에너지 감소율

Table 3 Category I examples: physical parameters

Category I examples	mass [kg]	a [m]	b [m]	c [m]	I_{xx} [kg m ²]	I_{yy} [kg m ²]	I_{zz} [kg m ²]
Ex1-1	0.35	0.05	0.05	0.05	0.00035	0.00035	0.00035
Ex1-2	0.35	0.05	0.05	0.08	0.000623	0.000623	0.00035
Ex1-3	0.35	0.08	0.05	0.05	0.00035	0.000623	0.000623

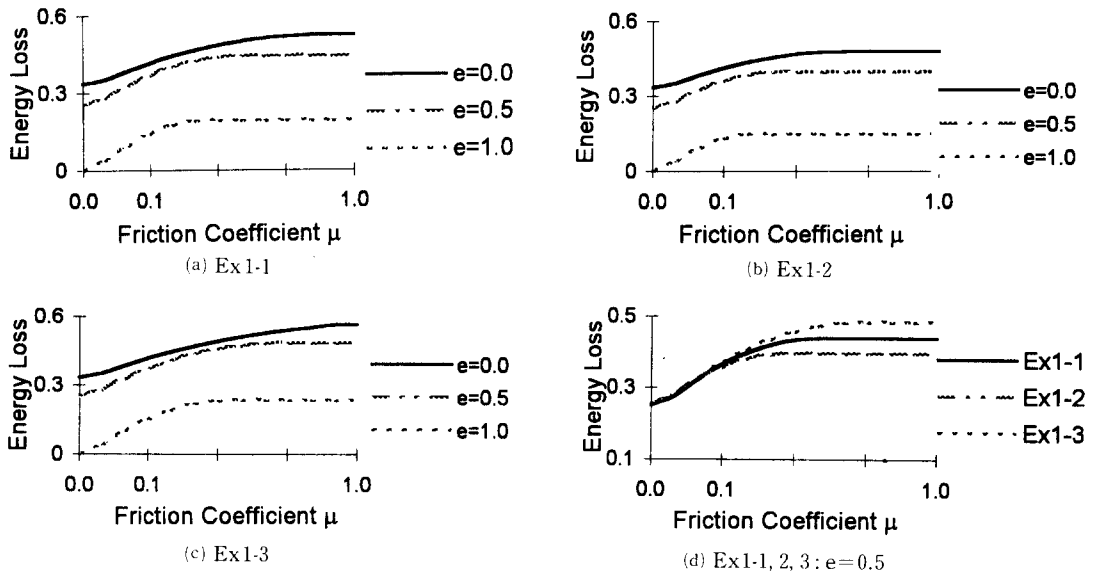


Fig. 8 Category I examples: Impact analysis results (percent energy loss)

$$* \text{Energy Loss} = \frac{\text{Pre-impact K.E.} - \text{Post-impact K.E.}}{\text{Pre-impact K.E.}}$$

Table 4 Category II examples: physical parameters

Category II examples	Body 1							Body 2						
	mass [kg]	a [m]	b [m]	c [m]	Ixx [kg m ²]	Iyy [kg m ²]	Izz [kg m ²]	mass [kg]	a [m]	b [m]	c [m]	Ixx [kg m ²]	Iyy [kg m ²]	Izz [kg m ²]
Ex2-1	0.23	0.02	0.02	0.02	0.0000368	0.0000368	0.0000368	0.35	0.05	0.05	0.05	0.00035	0.00035	0.00035
Ex2-2	0.23	0.02	0.02	0.02	0.0000368	0.0000368	0.0000368	0.35	0.08	0.05	0.05	0.00035	0.000623	0.000623
Ex2-3	0.23	0.02	0.02	0.02	0.0000368	0.0000368	0.0000368	0.35	0.05	0.05	0.08	0.000623	0.000623	0.00035
Ex3-1	0.23	0.02	0.02	0.04	0.000092	0.000092	0.0000368	0.35	0.08	0.05	0.05	0.00035	0.000623	0.000623
Ex3-2	0.23	0.02	0.02	0.04	0.000092	0.000092	0.0000368	0.35	0.05	0.05	0.08	0.000623	0.000623	0.00035
Ex3-3	0.23	0.04	0.02	0.02	0.0000368	0.000092	0.000092	0.35	0.08	0.05	0.05	0.00035	0.000623	0.000623

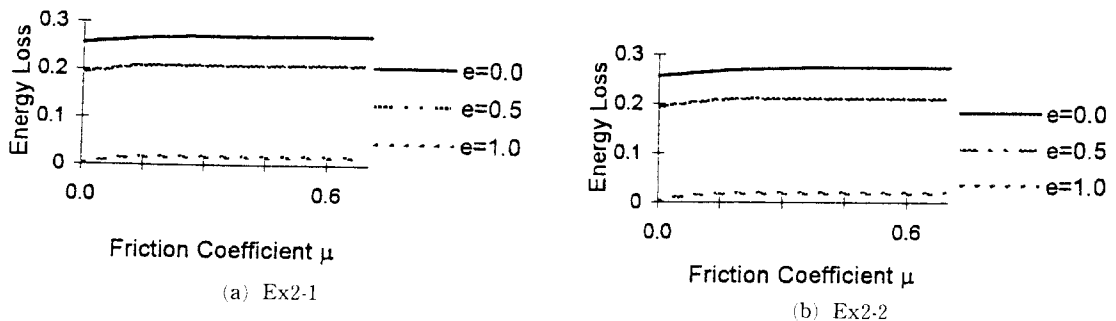


Fig. 9 Continued

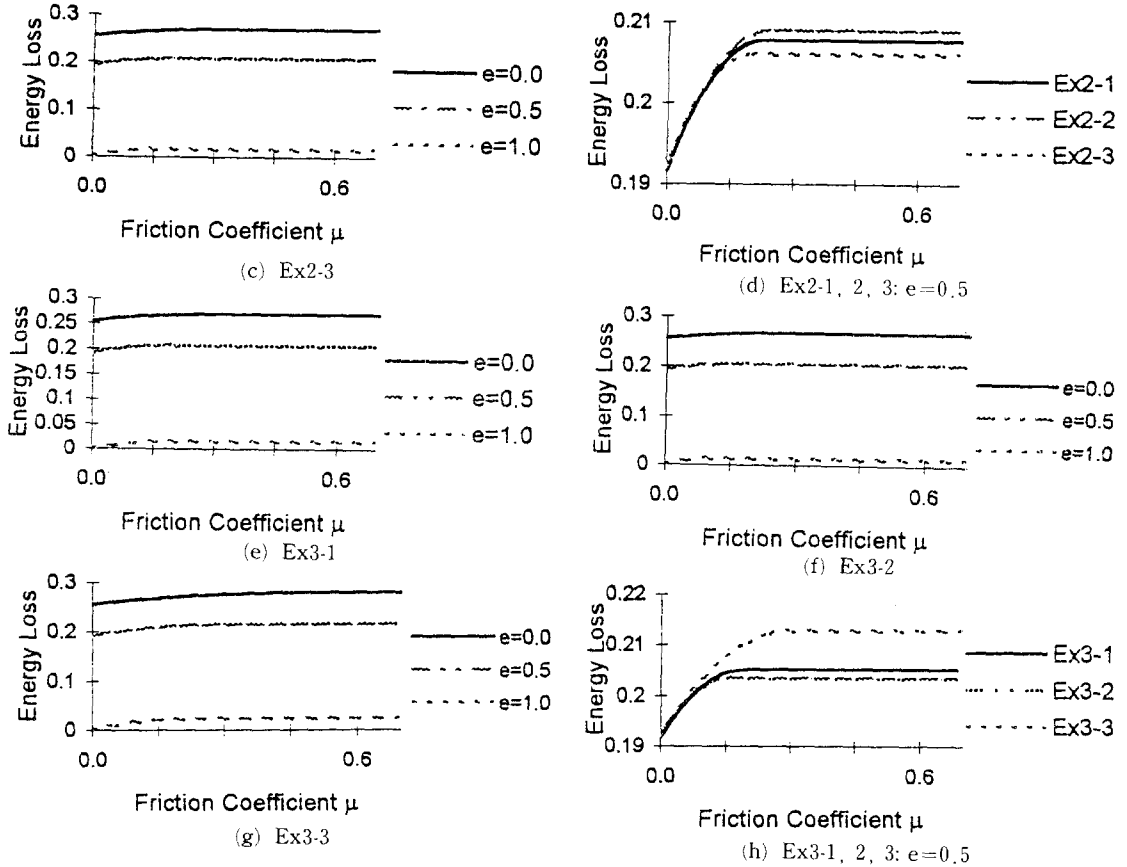


Fig. 9 Category II examples: Impact analysis results (percent energy loss)

은 마찰계수에 관계없이 일정하게 된다. 세가지 예제에서 모두, 반발계수가 증가할 수록 운동에너지 감소율이 감소하게 되고, 완전탄성 충돌($e=1$)의 경우에도 마찰력의 역할로 인해 운동에너지 감소가 있게 된다. 에너지 감소율의 크기는 Ex 1-3에서 가장 크게 나타나고 Ex 1-2에서 가장 낮게 나타난다. 또한 마찰계수가 커질수록 세 예제간 에너지 감소율의 차이가 점점 커지다가 어느 정도 값에 이르르면 일정하게 된다.

4.2 카테고리 II 두 물체 충돌

Fig. 7에 보여지는 예제들과 관련된 입력 파라미터 값들이 Table 4에 나타난다. Fig. 9에서는 예제들에 대해, 마찰계수 및 반발계수를 변화시키면서 구한 운동에너지 감소비율이 그래프로 보여지고 있다. 카테고리 I에서 관측했던 현상들은 카테고리 II에서도 동일하게 나타난다. Fig. 9에서 볼 수 있

는 것처럼, Ex 2-2, 2-1, 2-3, 그리고 Ex 3-3, 3-1, 3-2의 순으로 에너지 감소율이 크게 나타난다. 카테고리 II에서도 마찰계수가 커질 수록 예제간 에너지 감소율의 차이가 두드러지게 된다. 그리고, 카테고리 I의 경우보다 에너지 감소율이 대폭 낮게 나타나고 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 Routh가 제시한 것과 같은 타원체들 주축간의 접촉점에서 3차원 마찰충돌이라는 특별한 문제에 대한 완벽한 해를 제시하였다. 이 특별한 문제는 최소한 구 간의 충돌은 모두 포괄한다. 충돌과정을 묘사하는 미분방정식으로부터, 충돌접촉점에서의 미끄럼속도를 접선속도 공간에서 유동으로 가시화하여, 주어진 모델에 대한 충돌의 가능한 경우를 정형화하고 분류하였다. Routh의

그래픽 방법과 해석적 방법을 통해, 분류된 충돌의 각개의 경우에 대해 정량적인 충돌 해석을 수행하여 주어진 문제에 대한 완벽한 해를 제시하였다. 이론적 해석결과에 근거한 프로그램을 작성하여 여러 가지 경우에 대해 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 모델에 준하는 예제를 크게 2가지의 카테고리 나눈어, 에너지 감소 비율에 대한 시뮬레이션 결과를 제시하였다.

마찰력이 개재된 3차원 강체 충돌의 일반적인 모델은 본 논문에서 제시한 경우보다 훨씬 길고 복잡한 해석을 요구하게 된다. 어떤 관점에서든, 3차원 문제는 상응하는 2차원 문제와 본질적으로 다른 양상을 가질 수도 있다. 본 논문에서는, 문제에 대한 효과적인 접근방법을 찾아내기 위해, 단순화한 특별한 3차원 모델에 대해 해석을 수행하였다. 이 결과는 일반적인 3차원 강체 충돌의 문제 해결의 근거로 활용될 수 있을 것으로 여겨진다. 또한, 본 논문에 의해 제시한 해석결과는 실험에 의해 그 유효성을 입증하도록 해야 할 것이다.

후 기

이 논문은 1995학년도 홍익대학교 교내연구비에 의하여 연구되었습니다.

참고문헌

- (1) Wu, S.-C. and Haug, E.J., 1990, "A Substructure Technique for Dynamics of Flexible Mechanical Systems with Contact-Impact," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 390~398.
- (2) Zukas, J. A., 1990, "High Velocity Impact Dynamics," John Wiley & Sons, Inc., pp. 1~63.
- (3) Han, I. and Gilmore, B.J., 1993, "Multi-Body Impact Motion with Friction -Analysis, Simulation and Experimental Validation," *Designated as Best Technical Paper 1990 ASME Design Automation Conference, and ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 412~422.
- (4) Brach, R.M., 1989, "Tangential Restitution in Collisions," *Proc. of ASME Winter Annual Meeting*, AMD-Vol. 103, pp. 1~7.
- (5) Keller, J.B., 1986, "Impact with Friction," *ASME J. of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 1~4.
- (6) Wang, Y.-T., 1992, "Analysis and Simulation of Mechanical Systems with Multiple Frictional Contacts," Ph.D. Dissertation, Mechanical Engineering and Applied Mechanics, University of Pennsylvania.
- (7) Bhatt, V. and Koechling, J., 1994, "Classifying Dynamic Behavior During Three Dimensional Frictional Rigid Body Impact," *Proc. of IEEE Int'l Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2342~2348.
- (8) Bhatt, V. and Koechling, J., 1995, "Three-Dimensional Frictional Rigid-Body Impact," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 893~898.
- (9) Marghitu, D.B. and Hurmuzlu, Y., 1995, "Three-Dimensional Rigid-Body Collisions with Multiple Contact Points," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 725~732.
- (10) Stronge, W.J., 1990, "Rigid Body Collisions with Friction," *Proc. R. Soc. Lond., A* 431, pp. 169~181.
- (11) Routh, E.J., 1891, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, MacMillan and Co., London, pp. 265~269.
- (12) Wang, Y. and Mason, M.T., 1992, "Two-Dimensional Rigid-Body Collisions with Friction," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 635~642.
- (13) Brach, R.M., 1989, "Rigid Body Collisions," *ASME J. of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 133~138.
- (14) Wang, Y.-T., Kumar, V. and Abel, J., 1992, "Dynamics of Rigid Bodies Undergoing Multiple Frictional Contacts," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2764~2769.
- (15) Brach, R.M., 1991, "Mechanical Impact Dynamics -Rigid Body Collisions," John Wiley & Sons, New York, pp. 147~159.
- (16) Dupont, P.E., 1992, "The Effect of Coulomb Friction on the Existence and Uniqueness of the Forward Dynamic Problem," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1442~1447.