

〈논 문〉

## 베어링 스패상에 기어구동축을 갖는 스핀들 베어링 시스템의 정적 및 동적 해석방법에 관한 연구

최진경\* · 박규열\*\* · 이대길\*\*\*

(1995년 8월 5일 접수)

### Static and Dynamic Characteristics of the Spindle Bearing System with a Gear Located on the Bearing Span

Jin Kyung Choi, Kyu Yeol Park and Dai Gil Lee

**Key Words :** Machine Tools(공작기계), Spindle System(주축부), Stiffness(강성), Natural Frequency(고유진동수), Angular Contact Ball Bearing(앵글라 콘택트 볼베어링)

#### Abstract

Since the spindle bearing system is the main source of the total cutting point compliance of machine tool structures, in this work, the static and dynamic characteristics of the spindle bearing system driven by the gear located on the bearing span were investigated using analytical and finite element methods to improve the performance of the spindle bearing system. Based on the theoretical results, a specially designed prototype spindle bearing system was manufactured. Using the manufactured spindle bearing system. Based on the theoretical results, a specially designed prototype spindle bearing system was manufactured. Using the manufactured spindle bearing system, the static and dynamic characteristics were measured. From the comparison of the experimental results with the theoretical results, it was found that the finite element method predicted well the static and dynamic characteristics of the spindle bearing system.

#### 1. 서 론

최근 제조, 가공 분야에서는 다품종, 소량 생산과 함께 제품의 고정밀도를 요구하고 있으며, 생산원가의 절감을 위한 첨단 생산기술 개발에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 특히, 공작기계를 이용한 가공분야에서는 고속가공을 통한 절삭 가공시간의 단축에 대한 관심이 증대되고 있다.<sup>(1)</sup> 그러

나, 공작기계 주축의 회전수가 증가함에 따라 단위 시간당 가공량의 증가로 생산 효율이 좋아지는 장점을 갖는 반면, 주축부에서 소음, 진동 및 열발생 등과 같은 문제가 발생한다.<sup>(2)</sup>

공작기계로 공작물을 가공하는 경우 전체 강도(Rigidity)의 50% 이상이 주축부의 구조에 의해 결정되며, 그 밖의 강성은 베드, 슬라이드 및 기타 접속부에 의해 결정된다.<sup>(3)</sup> 특히, 중절삭 가공을 요하는 중, 대형 공작기계의 경우 주축부의 강성이 매우 중요하여 이에 대한 대책이 필요하다. 공작기계를 사용하여 공작물을 절삭할 경우 공작기계와 가공물의 간섭에 의하여 많은 에너지가 발생하기

\*한국과학기술원 기계공학과

\*\*울산대학교 정밀기계공학과

\*\*\*회원, 한국과학기술원 기계공학과

때문에 절삭폭(width of cut)이나 절삭속도(cutting speed)가 동작기계의 안정한계(stability limit)를 넘어서면 채터링(Chattering)현상이 발생한다. 채터링과 같은 진동의 발생은 가공물의 표면정도를 악화시키며, 또한 공구 마모를 증대시켜 공구수명의 단축 요인으로 작용한다. 동작기계 동역학(machine tool dynamics) 이론에 의하면, 채터링을 발생시키지 않는 동작기계의 최대 절삭폭(maximum width of cut)은 동작기계 정적강도(static rigidity)와 감쇠(damping)의 곱에 비례하며, 이와 같은 조건하에서의 채터의 발생은 일반적으로 동작기계와 공구의 고유진동수 근처에서 발생하게 된다.<sup>(4~6)</sup>

동작기계 주축부의 정적 및 동적 특성에 관한 연구는 오랜 기간동안 여러 사람에 의하여 해석적인 방법과 병행하여 실험적인 방법으로 수행되어왔다. 본 연구와 관련된 몇 가지 예를 소개하면 다음과 같다.

Wardle<sup>(3)</sup>은 주축부의 정적 및 동적 강성에 대한 고찰을 통하여 베어링의 예압력이 주축 강성에 미치는 영향과, 주축이 최대 동강성을 가질 때의 감쇠값과 그때의 예압량을 얻기 위한 실험을 하였다. Tlustý<sup>(7)</sup>는 경사 볼러베어링을 사용하는 주축의 온도 상승량, 동력손실 및 동강성에 대한 실험 및 해석을 수행하였다. Yang<sup>(8)</sup>은 동작기계 스펠들의 반경방향의 정 강성에 대한 베어링의 개수와 위치의 연관성을 연구하였으며, 하우징 전, 후단 베어링 조립부의 중심이 동일 선상에 있지 않을 경우(uncoaxiality)에 발생하는 분체짐에 대해 해석하였다. Aini<sup>(9)</sup>는 앵글라 콘택트 볼 베어링에 의해 지지되는 동작기계용 주축의 5자유도 해석을 위한 모델을 제시하였으며, 이 모델을 기존의 일사기의 주축에 적용하였다. Stone<sup>(10)</sup>은 구름베어링의 정강성과 감쇠값을 측정하기 위하여 과거에 소개되었던 3가지의 실험방법을 비교하였으며, 위의 결과값을 결정하는 중요한 변수들과 이 변수값의 상호 관계에 대하여 논하였다. Matsubara<sup>(11)</sup>는 볼 베어링으로 지지되는 동작기계 주축을 모델링하는 방법을 제안하였으며, 베어링을 변형구간에 따라 다른 탄성 계수를 가지는 선형 스프링으로 대체하여 수치 해석을 하였다. 이외에도 동작기계의 주축에 관한 많은 연구가 수행되었으며, Lee<sup>(12)</sup>는 주축부의 재질을 복합재료로 대체하여 동일한 정 강성조건을 갖는 기존의 주축에 비하여 절삭공정의 동적 및 열

적인 안정성을 증대시킬 수 있는 방법을 제안하였다.

최근에는 항공기 동체, 선박용 프로펠러, 터빈 블레이드등과 같은 복잡한 형상물의 보다 효과적인 가공을 위하여 주축 스펠상에 구동기어가 틸팅축(tilting axis)이 되는 다축 동작기계의 사용이 확산되면서 이에 대한 해석 및 실험이 요구되고 있다.

본 연구에서는 이와 같이 주축부의 다축화 및 다기능화를 위하여 베어링 스펠상에 기어 구동축을 갖는 주축 시스템의 정적 및 동적 특성에 관하여 연구하였다. 구체적으로, 각각의 베어링에 작용하는 하중을 계산하여 베어링 수명을 예측하였으며, 강성이 최대가 되는 베어링 스펠을 제시하였다. 또한, 주축부의 정적 및 동적 특성에 대한 해석 해 및 FEM해석결과를 주축 모델을 사용하여 얻어진 실험값과 비교함으로써 각 해석방법들의 실험값에 대한 오차정도를 구하였다. 일반적으로 주축부의 감쇠값이 0.1% 보다 작다고 알려져 있으므로 본 해석에서는 주축의 고유진동수 및 정 강성을 구할 경우 감쇠값을 무시하였다.<sup>(13)</sup>

## 2. 실험용 주축부의 구성

주축부를 설계, 제작하는 경우에는 먼저 주축의 형상 및 재질, 사용될 베어링의 종류, 숫자 및 배열방법 등을 선정할 후, 최적의 주축 시스템이 되도록 이들을 배치하여야 한다. 본 연구에서 실험용으로 설계, 제작된 주축의 베어링 조립부위는 그림으로 도급하여 표면강도 및 정도를 향상시켰으며, 고 강성을 얻기 위하여 간섭 끼워맞춤 공차로 재연삭 가공하였다. 그러나, 후단부 하우징의 베어링 조립부는 고속 절삭시에 베어링부위의 열발생으로 인한 베어링의 예압량 변화를 방지하기 위하여 헐거운 끼워맞춤이 되도록 가공하였다. Table 1은 본 연구에서 사용된 주축 베어링 조립부의 가공공차이다.

주축부에서 사용된 베어링은 고속 회전에서 안정된 특성을 갖는 FAG사의 B70계열인 앵글러 콘택트 볼베어링을 사용하였다. 요구되는 주축부의 강성과 고속회전을 위하여 전단부 세개의 베어링을 T-O 배열(복합조합)이 되도록 하였고, 후단부 두개의 베어링을 O 배열(배열조합)로 하여 고속회전에서 고 강성을 얻도록 하였다. Table 2는 본 주

**Table 1** Fit tolerance and arithmetical average roughness of the spindle

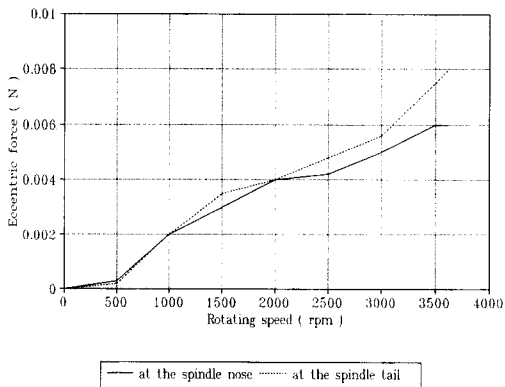
Spindle diameter (mm)	80		100	
Tolerance ( $\mu\text{m}$ )	+3		+3	
Circularity ( $\mu\text{m}$ )	1.2		1.5	
Arithmetical average roughness $R_a$ ( $\mu\text{m}$ )	2		2.5	
Housing diameter (mm)	120		150	
Tolerance ( $\mu\text{m}$ )	Clearance fit	+8	Interference fit	-3

**Table 2** Specifications of the angular contact ball bearings (FAG, Germany)

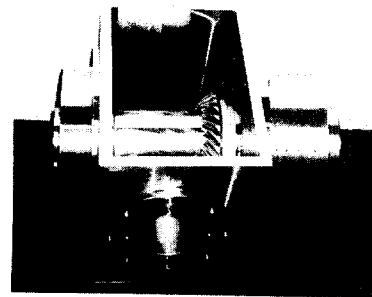
Bearing type	Inner diameter (mm)	Dynamic load rating (kN)	Static load rating (kN)	Limit speed (rpm)	
				Grease lubrication	Oil-air lubrication
B7020C	100	75	68	7000	9500
B7016C	80	58.5	48	9000	13000

축계에서 사용한 베어링의 사양이다. 이와 같은 앵글라 콘택트 볼 베어링은 베어링에 예압력을 주어 축의 회전 정밀도의 향상, 베어링의 강성 증가 및 진동의 감소 효과를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 주축 베어링을 너트로 죄어줌으로써 정위치 예압이 가능하게 하였다.

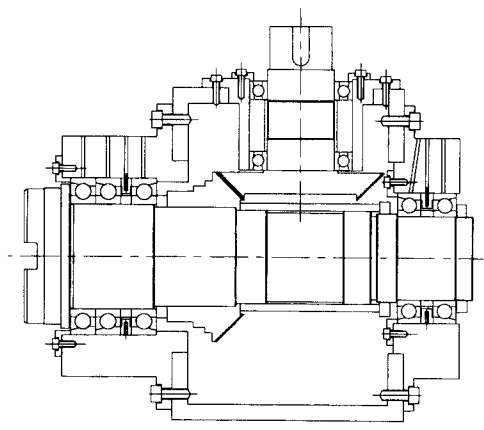
일반적으로 상대 운동을 하는 베어링 내부 각 요소의 금속간 접촉으로 인한 마모를 방지하고, 용이한 열발산을 위하여 윤활제를 사용한다. 본 연구에서는 FAG사의 저마찰, 초고속 공작기계용 주축



**Fig. 1** Eccentric centrifugal force of the spindle with respect to rotational speed



(a) Photograph



(b) Detailed configuration

**Fig. 2** Experimental setup for measuring static and dynamic characteristics of the spindle bearing system

그리스(Arcanol 174, Germany)를 사용하였다.

구동기어의 조립을 위하여 주축의 스펀상에 가공된 키홈은 주축 비대칭의 원인이 되어, 고속회전에서 주축부의 소음 및 진동의 원인이 된다. 비대칭 주축부의 속도가 증가함에 따라 편심 원심력이 증가하는 원리에 따라 평형시험기(balancing machine)에 표시되는 주축의 양끝단에서의 비대칭량을 감소시키는 방법으로 평형잡기를 하였다. Fig. 1은 평형잡기를 한 후에 주축의 각 회전수역에서의 비대칭 원심력을 나타낸다.

위에서 기술한 내용을 바탕으로 Fig. 2와 같이 주축부의 정적 및 동적인 구동특성을 얻기 위한 실험용 주축부를 구성하였다.

### 3. 주축부의 정특성 해석 및 실험

본 해석에서는 주축부의 하우징은 변형이 없는 강체로 가정하였으며, Fig. 2와 같은 복잡한 형상의 주축부를 Fig. 3과 같이 단순화하였다. 이와 같은 가정에서 얻어진 각 베어링에 작용하는 반경 방향의 하중( $F_r$ )을 아래의 계산식 (1)에 대입하여 베어링의 수명을 구하였다.<sup>(14)</sup>

$$L = (C/F_r)^a \quad (\text{Ball bearing, } a=3) \\ (\text{Roller bearing, } a=10/3) \quad (1)$$

여기서,  $L$ 은 베어링 수명,  $C$ 는 동정격 하중 그리고  $F_r$ 은 등가 반경방향 하중을 나타낸다.

Table 3은 위의 Fig. 3에서 주축 끝단의 작용력

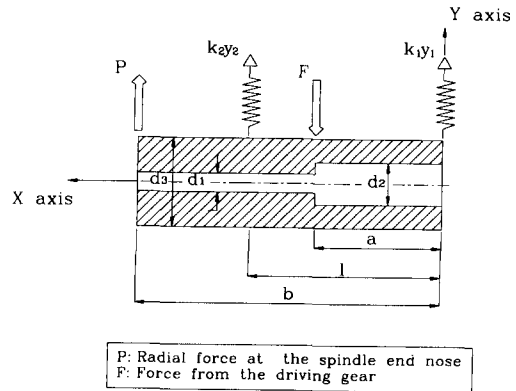


Fig. 3 Simplified spindle bearing model for the static and dynamic analyses (P : Radial Force at the spindle end nose, F : Force from the driving gear)

P와 기어의 구동력이 각각 2 kN, 240 N이 작용하였을 경우 주축의 베어링에 작용하는 하중값 및 베어링의 수명을 나타낸다. 이때 계산된 수명 값은 신뢰도가 90%일 경우이며, 신뢰도를 99%로 높이기 위하여 상수 0.23을 곱하였다.<sup>(14)</sup> 공작기계의 평균 사용년수를 8년, 하루에 8시간 동안 사용한다고 가정하였을 경우(8시간/일×8년=2.7년)에 비하여 위에서 구한 베어링의 수명값은 충분한 여유값을 갖는 것이 확인되었다.

절삭점에서의 정적 강성은 공작기계의 정도를 좌우하는 중요한 값으로, 이 값이 크게 되면 절삭점에서의 1차 고유진동수가 주축의 사용가능 최고 회

Table 3 Bearing lives and loads acted on the spindle bearings (Radial force P : 2kN)

Bearing type	Radial load $F_r$ (kN)	Bearing life (Number of revolution : 3000 rpm)	
		Reliability=90% (Cycle)	Reliability=99% (Year)
B7020	2.73	640E9	93
B7016	0.74	7056E9	1029

Table 4 Bearing stiffnesses calculated by the equation (2)

Bearing type	Preload (N)	Number of ball	Contact angle	Ball diameter (mm)	Thrust stiffness ( $K_a$ ) (MN/m)	Radial stiffness ( $K_r$ ) (MN/m)
B7020	500	22	15	15.1	55.7	133.0

전수보다 큰 값을 갖게 되어 사용에 안정하다. 이 경우, 절삭점에서서의 강성은 주로 주축계를 형성하는 베어링에 의해 결정되며, 베어링의 강성은 예압 및 틈새(clearance)에 의해 좌우되는 것으로 알려져 있다.<sup>(10,15)</sup> Wardle<sup>(3)</sup>은 단열(single row) 베어링의 강성에 대해서 아래의 식 (2)를 제시하였다. Table 4는 위의 식 (2)를 사용하여 계산된 실험용 주축부 베어링 한개의 축방향 및 반경방향의 강성을 나타낸다.

$$K_a = 3.44 \times 10^6 \times P_a^{\frac{1}{2}} \times Z^{\frac{2}{3}} \times \sin \beta^{\frac{5}{3}} \times D^{\frac{1}{3}}$$

$$K_r = 0.64 \times K_a \times \cot \beta \quad (2)$$

여기서,  $K_a$ 은 축방향 강성(N/m),  $K_r$ 은 반경방향 강성(N/m),  $P_a$ 은 예압력(N),  $Z$ 은 볼의 갯수,  $\beta$ 은 접촉각 그리고  $D$ 는 볼의 지름(mm)을 나타낸다.

본 연구에서 사용한 전단 베어링(B7020C)의 강성을 측정하기 위하여 Instron사의 용량 10ton인 인장-압축시험기(Canton, Massachusetts, America)를 사용하였다. 후단 베어링(B7016C)을 조립되기 전에 전단 베어링의 축에 단위 압축력이 작용하였을 경우의 미소 변형량을 압축변형률계(compressometer)로 측정하여 Table 4의 계산값과 비교하였다. 실험을 통하여 구한 베어링의 반경방향 강성은 320 MN/m로 위의 계산식(2)를 사용하여 얻은 강성 133 MN/m와 많은 차이를 보인다. 이와 같은 결과는 주축의 강성은 베어링의 종류에 따라 다른 표현식을 가지며, 특히 배열형태(O, X, T 배열)에 따라 많은 영향을 받기 때문에, 주축 베어링의 강성을 평가하는데 있어서 위의 식 (2)와 같은 단열 베어링에 대한 강성 계산식을 직접 사용하는 것은 타당하지 않은 것으로 판단된다.

주축부의 정 강성해석을 위하여 Fig. 3과 같이 복잡한 형상의 주축부를 단순한 원통 형상으로 단순화하였고, 하우징부는 변형을 무시할 수 있는 강체로 가정하였다. 또한, 위에서 얻은 베어링의 강

성을 토대로 베어링은 등가 스프링으로 대체하였으며, 스펀상에 위치한 구동기어는 평형질량(dummy mass)으로 가정하여 주축의 관성값에 가산하였다. 전체시스템에 대한 위와 같은 가정하에서 주축부는 다음과 같이 모멘트에 대한 특이함수 형태로 표시될 수 있다.

$$M = -xk_1y_1 + \langle x-a \rangle F - \langle x-l \rangle k_2y_2 \quad (3)$$

힘과 모멘트의 평형조건에 의해

$$-aF + lk_2y_2 + bP = 0 \quad (4a)$$

$$k_1y_1 + k_2y_2 - F + P = 0 \quad (4b)$$

상수  $y_1, y_2$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$y_1 = \frac{(l-a)F - (l-b)P}{lk_1} \quad (5a)$$

$$y_2 = \frac{aF - bP}{lk_2} \quad (5b)$$

주축의 끝단에 반경방향 하중  $P$ 가 가해졌을 경우에 발생하는 주축 끝단의 변형량  $\delta$ 를 에너지 방법으로 얻기 위해 주축부의 포텐셜에너지  $U$ 를 다음과 같이 구하였다.

$$U = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2 + \int_0^b \frac{M^2}{2EI} dx \quad (6)$$

여기서,  $k_1, y_1$ 은 선단부의 스프링상수 및 변위량,  $k_2, y_2$ 는 후단부의 스프링상수 및 변위량,  $M$ 은 굽힘 모멘트 그리고  $EI$ 는 굽힘강성을 나타낸다.

카스틸리아노(Castigliano)의 정리<sup>(16)</sup>에 의해 주축 끝단에서의 변형량  $\delta$ 는 전체 주축부의 포텐셜 에너지를 공구 끝단에서 반경방향의 하중으로 미분한 값이므로 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$= k_1y_1 \frac{\partial y_1}{\partial P} + k_2y_2 \frac{\partial y_2}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial P} \left( \int_0^b \frac{M^2}{2EI} dx \right) \quad (7)$$

이 식에 위의 주축 변형량식 대입하면 식 (8)이 얻어진다.

$$\delta = \frac{(l-b)^2P}{k_1l^2} + \frac{b^2P}{K_2l^2} - \left( \frac{l-a}{k_1} \frac{(l-b)}{l} + \frac{ab}{k_2} \right) \frac{F}{l^2} + \frac{1}{EI_1} \int_0^a \frac{x^2}{l^2} ((l-b)^2P - (l-a)(l-b)F) dx + \frac{1}{EI_2} \int_a^l \frac{x^2}{l^2} ((l-b)^2P - (l-a)(l-b)F) dx + \frac{x(x-a)(l-b)}{l} F dx + \frac{1}{EI_2} \int_l^b \left[ \frac{x(x-b)}{l} ((l-b)P - (l-a)F) + (x-a)(x-b)F + \frac{(x-l)(x-b)}{l} (aF - bP) \right] dx \quad (8)$$

식 (8)은 다음과 같이 반경방향의 하중  $P$ 와 변형량  $\delta$ 의 관계식 (9)로 나타낼 수 있다.

$$\delta = X_1 \cdot P + X_2 \tag{9}$$

$$X_1 = \frac{(1-b)^2}{k_1 l^2} + \frac{b^2}{k_2 l^2} + \frac{(1-b)^2}{3El^2} \left( \frac{a^3}{l_1} + \frac{bl^2}{l_2} a^3 \right)$$

$$X_2 = \frac{a(l-b)F}{3El^2} \left( \frac{a^2(a-l)}{l_1} + \frac{3a^2(2a-3l)+3l^3+al(l-b)^2}{l_2} \right) + \frac{F}{l^2} \left( \frac{a(l-b)}{k_1} - \frac{ab}{k_2} \right) \tag{10}$$

위의 컴플라이언스  $X_1$ 을 베어링 사이의 거리 (Bearing Span)  $l$ 로 미분을 하면 다음식 (11)과 같으며, 0이 될 때의  $l$ 값은 컴플라이언스( $X_1$ )을 최소로 만드는 베어링 사이의 거리가 된다.

$$\frac{\partial X_1}{\partial l} = \frac{2b}{k_1 l^3} (1-l) - \frac{2b^2}{k_2 l^3} + \frac{2a^3}{3El} (1-l) \frac{b}{l^2} + \frac{2}{3El} \left[ b(l-b) + a^2 b \cdot \frac{b}{l^3} \right] \tag{11}$$

식 (8)로 계산한 반경방향의 하중에 대한 주축 끝단에서 변형량  $\delta$ 와, 전용 FEM 소프트웨어인 ANSYS로 해석한 값과 비교하기 위하여 Fig. 4와 같이 주축을 2차원 축대칭 요소 및 1차원 모 요소

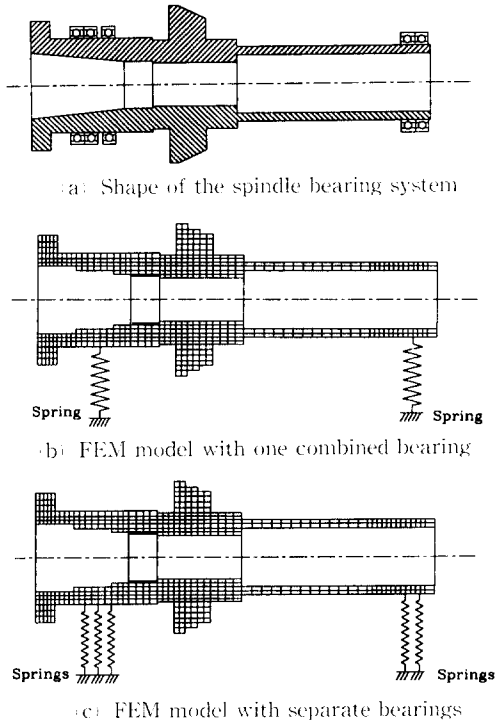


Fig. 4 FEM models for the stiffness of the spindle bearing system

여기서,  $X_1$ 은 주축계의 컴플라이언스(Compliance)를 나타내며,  $X_2$ 는 기어구동력  $F$ 에 의한 주축의 초기 변위량이다.

를 사용하여 결점을 생성하였다. 이 경우 전, 후단의 베어링 굽은 각각 하나의 등가 스프링으로 가정 한 경우와 베어링 개수와 같은 수의 등가 스프링으로 가정하였을 경우에 대하여 해석을 하였다.

또한, 해석값에 대한 실험적인 검증을 위해 Fig. 5에서 보는 바와 같이 인장 압축 시험기를 사용하여 주축의 끝점에서 작용하중에 대한 변위값을 구하였다. Fig. 6은 실험을 통하여 얻은 작용하중에 대한 변위량 곡선을 나타낸다.

위에서 얻은 FEM을 이용한 해석값과 수식 계산

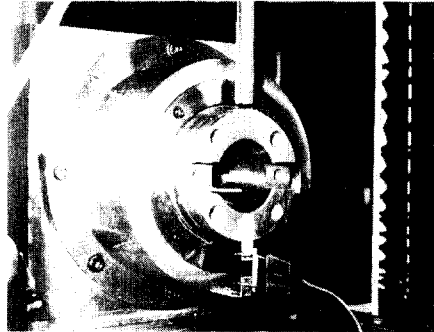


Fig. 5 Experimental setup for the stiffness of the spindle bearing system

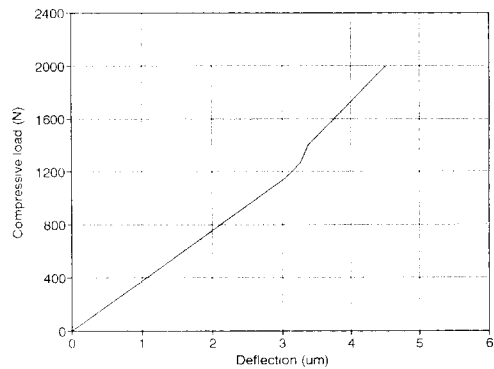


Fig. 6 Deflection of the spindle bearing with respect to the load at the spindle end nose

**Table 5** Deflections of the spindle end nose with respect to the radial force 2 kN

Methods			Displacement at the spindle end nose	Error to experimental result (%)
Analytic result			3.8 $\mu\text{m}$	15
FEM result	One dimensional beam element	Same number of equivalent springs	4.8 $\mu\text{m}$	6.7
		One spring	5.3 $\mu\text{m}$	17.8
	Two dimensional axisymmetric element	Same number of equivalent springs	4.7 $\mu\text{m}$	4.4
		One spring	5.1 $\mu\text{m}$	13.3
Experimental result			4.5 $\mu\text{m}$	

결과 값을 비교하였을 경우, Table 5에 의하면 베어링 스펙상에 기어구동축을 갖는 주축부는 주축을 간단한 형상으로 가정한 수치해산 결과 보다는 실제 주축과 비슷한 형상의 유한요소해석 결과값이 실험값에 더욱 근접하다는 것을 나타낸다. 또한, Table 5에서 나타난 바와 같이 주축을 2차원 축대칭 요소나 1차원 보 요소를 사용하는 경우 두 강성에는 거의 차이가 없기 때문에, 주축을 2차원 축대칭 요소를 사용하여 유한요소해석하기보다는 1차원 보 요소를 사용한다면 강성을 더욱 효율적으로 계산할 수 있다. 또한, 베어링을 같은 수의 스프링으로 가정을 하여 해석한 경우가 선, 후단의 베어링을 한 개의 베어링으로 가정한 한 경우 보다 실험값에 더욱 근사한 값을 얻을 수 있었다.

#### 4. 주축부의 동특성 해석 및 실험

주축부의 진동은 베어링을 스프링으로 가정하여 주축이 강체운동을 하는 경우와, 베어링을 지지점으로 하여 굽힘운동을 하는 두 경우로 나눌 수가 있다. 고유진동수를 구하기 위한 여러 가지 방법이 제안되어 있으나, 이중 Rayleigh-Ritz법<sup>(17)</sup>은 시스템의 진동 형태를 몇 가지 함수로 가정하고 이 함수들을 중첩하여 고유진동수를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 주축부의 동특성을 예측하기 위하여 정적 강성을 구할 때 사용했던 Fig. 3의 모델에 Rayleigh-Ritz법을 적용하였으며, 주축의 방정방향 변위  $Y$ 를 식 (12)로 가정하였다.

$$Y = C_1(x - a_1) + C_2(x - a_2) + C_3 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (12)$$

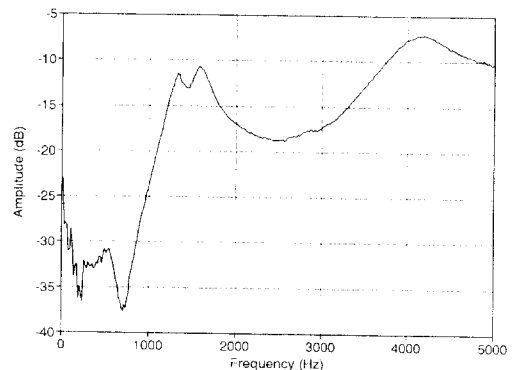
$$a_1 = \frac{lbk_1}{lk_1 + (l - b)k_2}$$

$$a_2 = \frac{l(l - a)k_2}{ak_1 + (l - a)k_2}$$

여기서,  $C_1$ 항과  $C_2$ 항은 주축이 강체운동 할 경우에 표현되는 변위이고,  $C_3$ 항은 베어링을 지지점으로 하여 굽힘운동을 할 경우 얻어지는 주축의 변위이다. 이때, 고유진동수의 제곱  $\omega^2$ 은 다음식 (13)으로 표현된다.

$$R(\omega) = \omega^2 \frac{fEI \int \frac{d^2 Y}{dx^2}{}^2 dx + k_1 Y^2 + k_2 Y^2}{\int \rho A (Y(x))^2 dx}$$

$$\frac{A}{B} = \text{상수}$$



**Fig. 7** Amplitudes of the acceleration of the spindle bearing system measured by FFT signal analyzer

**Table 6** Comparison of the fundamental natural frequencies of the spindle bearing system obtained by different methods

Methods		First natural frequency	Error in calculation (%)
Arithmetic result		1404 Hz	4.9
Simple spring-mass system		1533 Hz	14.5
FEM result	One dimensional beam element	Same number of equivalent springs	2.0
		One spring	2.8
	Two dimensional axisymmetric elementric element	Same number of equivalent springs	26.4
		One spring	27.3
Experimental result		1338 Hz	-

$$\begin{aligned}
 A &= k_1(a_1 C_1 + a_2 C_2)^2 + k_2((l - a_1) C_1 \\
 &\quad + (l - a_2) C_2)^2 + C_3^2 \int EI \frac{\pi^2}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \\
 B &= \int \rho A (C_1(x - a_1) + C_2(x - a_2) \\
 &\quad + C_3 \sin \frac{\pi x}{l})^2 dx \quad (13)
 \end{aligned}$$

또한, 고유진동수는  $C_i$ 항에 대하여 독립이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\delta(\omega^2)}{\delta C_i} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{\delta A}{\delta C_i} - \omega^2 \frac{\delta B}{\delta C_i} = 0 \quad (14b)$$

본 연구에서 설계된 주축부의 1차 고유진동수는 식 (13)에서 1,404Hz가 얻어지는 반면, 주축질량체를 스프링 한 개가 지지하는 단순 진동모델로 가정하였을 경우 1,533Hz가 얻어졌다. 주축을 이와 같은 단순한 스프링-질량계로 가정하였을 경우의 계산된 고유진동수는 종방향의 상하운동만을 고려하여 계산하였기 때문에, 이 값을 실제값으로 사용하는 것은 무리가 있으며, 단지 적지 않은 오차를 감수하고 고유진동수를 간단히 예측할 때 사용이 가능하다. 또한, 위의 수치해석과 병행하여 주축에 대한 FEM해석을 위하여 주축의 동특성을 구하였을 때와 같은 방법으로 2차원 축대칭 요소 및 1차원 보 요소 분할법을 사용하여 절점을 생성하여 주축의 1차 고유진동수를 구하였다.

위에서 구한 해석값에 대한 실험적 검증을 위하

여 B&K사의 FFT 신호분석기(FFT Signal Analyzer)를 사용하여 고유진동수를 구하였다. 가속도계(accelerometer)를 주축 베어링 스패んの 중앙에 부착한 후에 충격망치(impact hammer)로 가격한 후에 나타난 신호를 HPIB 기판을 사용하여 PC와 인터페이스(interface)하였다. Fig. 7은 실험을 통하여 얻은 주파수에 대한 변위의 곡선이다. Table 6에서 나타난 바와 같이 주축을 1차원 보 요소를 사용하여 동특성 해석을 한 경우에 실험값과 매우 적은 근사한 값을 갖는 반면, 2차원 축대칭 요소의 경우 상당한 양의 오차가 있음을 확인할 수 있다. 2차원 축대칭 요소의 경우 각 2차원 절점의 구속요건의 제한으로 정적 굽힘이나 전단력에 의한 응력 해석에는 유용하나, 모드해석에 사용하는 것은 불가능하다. 즉, 동특성 해석을 위하여 3차원 요소를 사용하여 주축부 전체를 모델링하거나, 1차원의 보 요소를 사용해야 한다. 주축부의 동특성 해석을 위하여 3차원의 복잡한 모델링을 하기 보다는 1차원 보 요소를 사용하여 간단히 한다면 고유진동수를 더욱 효율적으로 계산할 수 있다. 위의 해석 및 실험으로 구한 주축부의 1차 고유진동수(1338Hz)는 일반적인 주축부의 구동범위(20~50Hz)보다 높은 값으로 안정된 구동범위를 갖는다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 베어링 스패상에 기어구동축을 갖



는 공작기계의 주축 모델을 제작하여 정적 및 동특성을 실험과 해석을 통하여 구하였으며, 두값의 비교를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 주축을 간단한 1차원 보 요소 분할법을 사용하여 FEM 해석한 결과, 실험값과 3% 이내의 매우 근사한 고유진동수를 얻을 수 있었으며, 해석적인 식으로부터 얻어지는 값에 비하여 정확도 및 효율면에서 유리하였다.

(2) 주축부를 구성하는 베어링을 등가 강성을 갖는 스프링으로 대체하여 주축의 정 강성과 고유진동수를 구할 경우 베어링을 대체하는 등가 스프링의 개수가 증가함에 따라 정확도는 향상된다. 즉, 스프링이 주축과 접촉축의 관계를 갖는 것보다, 면 접촉에 근사하도록 가정하여 해석하여야 실제값에 보다 정확한 값을 얻을 수 있었다.

### 참고문헌

- (1) Weck, M. and Koch, A., 1993, "Spindle-Bearing Systems for High-Speed Applications in Machine Tools," *Ann. CIRP*, Vol. 42/1, pp. 445~448.
- (2) Al-Shareef, K. J. H. and Brandon, J. A., 1990, "On the Effect of Variations in the Design Parameters on the Dynamic Performance of Machine Tool Spindle Bearing Systems," *Int. J. Mach Tools Manufact.*, Vol. 30, pp. 431~445.
- (3) Wardle, F. P., Lacey, S. J. and Poon, S. Y., 1983, "Dynamic and Static Characteristics of a Wide Speed Range Machine Tool Spindle," *Precision Engineering*, pp. 175~183.
- (4) Koenigsberger, F. and Tlusty, J., 1970, *Machine Tool Structures*, Vol. 1, Section 2.
- (5) Cook, N. H., 1966, *Manufacturing Analysis*, Addison Wesley Publishing Company, Chapter 7.
- (6) Merrit, H. E., 1965, "Theory of Self-Excited Machine-Tool Chatter," *Journal of Engineering for Industry, Transactions of ASME*, pp. 447~454.
- (7) Tlusty, J., Hernandez, I., Smith, S. and Zamudio, C., 1987, "High Speed High Power Spindles with Roller Bearings," *Ann. CIRP*, Vol. 36, pp. 267~272.
- (8) Yang, S., 1981, "A Study of the Static Stiffness of Machine Tool Spindles," *Int. J. Mach. Tool Des. Res.*, Vol. 21, pp. 23~40.
- (9) Aini, R., Rahnejat, H. and Gohar, R., 1990, "A Five Degrees of Freedom Analysis of Vibrations in Precision Spindles," *J. Mach. Tools Manufact.*, Vol. 30, pp. 1~18.
- (10) Stone, B. J., 1982, "The State of the Art in the Measurement of the Stiffness and Damping of Rolling Element Bearings," *Ann. CIRP*, Vol. 32/2, pp. 529~538.
- (11) Matsubara, M., Rahnejat, H. and Gohar, R., 1988, "Computational Modelling of Precision Spindles Supported by Ball Bearings," *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, Vol. 28, pp. 429~442.
- (12) Lee, D. G., Sin, H. C. and Suh, N. P., 1985, "Manufacturing of a Graphite Epoxy Composite Spindle for a Machine Tool," *Ann. CIRP*, Vol. 34/1, pp. 365~369.
- (13) Welbourn, D. B. and Smith, J. D., 1970, *Machine Tool Dynamics*, Cambridge University Press, Chapter 5.
- (14) Shigley, J. E. and Mischke, C. R., 1989, *Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, 5th Edition, Chapter 11.
- (15) Harris, A., 1991, *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 3rd Edition, pp. 330-341.
- (16) Crandall, S. H., Dahl, N. C. and Lardner, T. J., 1978, *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill Book Company, 2nd Edition, pp. 164-172, 545-550.
- (17) Rao, S. S., 1984, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley Publishing Company, Chapter 8.