

< 논 문 >

구조-음향계의 정상상태 응답예측을 위한 유한요소법과 경계요소법의 응용

이 장 명*

(1994년 8월 24일 접수)

Application of Finite Element and Boundary Element Methods to Predict Steady-State Response of a Structure-Acoustic-Cavity System

Chang-Myung Lee

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Boundary Element Method(경계요소법),
Steady-State Response(정상상태응답), Coupled Structure-Acoustic-Cavity System
(연성된 구조-음향계), Direct Coupling(완전연성)

Abstract

The steady-state response for a coupled structure-acoustic-cavity system has been investigated by numerical technique using a directly coupled Finite Element Method(FEM) and Boundary Element Method(BEM) model. The Laplace transformed matrix equations for the structure and the acoustic cavity are coupled directly satisfying the necessary equilibrium and compatibility conditions. The coupled FEM-BEM code is verified by comparing its prediction for an example with known analytical, numerical and experimental results. The example involves a coupled structure-acoustic-cavity system which is a box-type cavity with one end an experimentally excited pinned-pinned plate.

1. 서 론

일반적인 소음진동 문제에 있어서 음향계 또는 구조계의 독립적인 문제 보다 자동차 또는 잠수함과 같이 구조-음향이 연성된 문제를 해결하여야 될 때가 많다. 이로 인하여, 구조-음향 연성 문제를 풀기 위하여 해석적으로 또는 수치적으로 많은 노력이 있어 왔다.

구조-음향 연성문제를 풀기위한 해석적인 시도는 Lyon⁽⁷⁾과 Pretlove⁽¹³⁾에 의하여 시도되기 시작하였다. Pretlove는 처음에 관과 음향계의 연성문제를

1-D 영역에서 구하는 방법을 보여주었으며 그 후 Pretlove와 Craggs⁽¹⁴⁾는 이 문제를 2-D 영역까지 확장하였다. 1973년에 와서 Guy 등⁽⁶⁾에 의하여 3-D 음향계와 관구조물의 연성을 구하는 방법을 보여 주었다. 하지만 이 경우 사각형 모양의 관과 상자 형상의 음향계가 연성이 되어 음의 투과 압력비를 계산하는 것으로 단순 형상에 대해서만 가능하였다. 이와같이 구조-음향 연성문제를 해결하는데 있어서 해석적인 방법으로는 실질적으로 부딪히는 복잡한 문제를 해결하는 데 어려움이 많음으로 수치적인 방법이 필요하게 되었다.

1960년대 말에 Gladwell과 Zimmerman⁽⁵⁾에 의하여 음향 유한요소법(FEM)의 모델링이 소개된 후 Arlett와 Zienkiewicz⁽¹⁾는 헬름홀츠 방정식에 유한

*회원, 울산대학교 자동차공학과

요소법을 적용하여 복잡한 경계조건을 가진 문제를 해결하는 방법을 소개하였다. Craggs⁽⁴⁾는 다양한 경계조건을 가진 판넬과 복잡한 형상의 음향계와의 상호관계를 유한요소법을 이용하여 해결하려는 시도를 하였다. 하지만 그의 노력은 실험적으로 증명되지는 않았다.

음향해석에 유한요소법이 적용되기 시작한 후 구조-음향 연성해석을 위한 많은 노력이 시도되었다. 1970년대에 와서는 유한요소 상용코드인 NASTRAN을 이용하여 자동차의 구조-음향 연성 해석을 시도하기 시작하였으며 이를 통하여 실내소음을 예측하기도 하였다. 비록 이러한 시도는 완전 연성은 아니지만 실험치와 비교하면 어느 정도 받아들일 수 있는 결과들이었다.

1980년대에 와서 음향계의 수치계산에 유한요소법 대신 경계요소법(BEM)의 사용이 급격히 늘어나기 시작하였다. 실내 음향계의 해석시에 유한요소법 대신 경계요소법을 사용하면 경계면만 모델링하면 되므로 인하여 모델링하는 시간을 무척 단축할 수 있어 각광을 받기 시작하였다. 더군다나 경계요소법의 사용은 무한 경계영역에서의 소음예측이 가능하게 되어 경계요소법의 사용은 빠르게 확산되어 왔다. 하지만 경계요소법 또한 아직까지 선형방정식과 균일 매체에만 응용이 가능할 뿐만 아니라 계산시간이 무척 길다는 주의점을 가지고 있다.

경계요소법의 확산에 따라 구조물도 경계요소법을 이용하여 수치계산이 이루어지게 되었다. 따라서 구조-음향계를 경계요소법만을 이용하여 문제를 해결하려는 노력이 시도되어 Tanaka⁽¹⁶⁾에 의하여 경계요소법만을 이용한 구조-음향 연성해석이 선을 보이게 되었다. 하지만 그의 공식 전개는 판넬 구조물에서만 가능할뿐 아니라 복잡한 공식전개를 수반하고 있다. 이 즈음 Ciskowski와 Royster^(2,3)에 의하여 3-D 탄성구조물과 음향계의 연성을 통한 음파의 전파를 예측 가능하게 하였다. 하지만 이들의 시도는 탄성 구조계안에서 음파의 전파에 기초를 두었기 때문에 일반적인 구조물의 진동에 따른 효과는 파악하기 곤란하게 되어 있다.

경계요소법이 유한요소법 보다 장점을 가지는 부분들이 있으나 구조물의 진동이나 구조물의 동적거동을 파악하는 데에는 유한요소법 보다 우위를 확보하지 못하고 있다. 따라서 복잡한 형상의 구조물 진동해석에는 유한요소법이 많이 이용되므로 구조-

음향계의 연성해석에 있어서 구조계는 유한요소법을 음향계는 경계요소법을 이용하는 것이 필연적이라 하겠다. 이로 인하여 1989년 Suzuki⁽¹⁵⁾는 구조물은 상용 소프트웨어인 NASTRAN을 이용하고 음향계는 경계요소법으로 공식전개하여 FEM-BEM 연성해석을 시도하였다. 하지만 이 경우 또한 NASTRAN으로부터 모달 데이터를 얻은 후 경계요소법에의 경계조건으로 이용하는 반 연성(indirect coupling) 해석을 하였다. 이와 유사하게 반 연성 해석을 통하여 FEM-BEM 해석이 가능하게 만들어진 상용 소프트웨어(SYSNOISE, COMET...)들이 최근들어 활발히 이용되고 있다. 하지만 이러한 상용 소프트웨어들도 NASTRAN에서 계산된 구조물의 변위나 속도의 정보를 경계요소법의 경계조건으로 이용하는 반 연성해석을 채택하고 있다.

따라서 본 연구에서는 구조-음향 연성해석을 위한 FEM-BEM의 완전 연성(direct coupling) 알고리즘을 소개하는 데 있다. 완전 연성 해석을 위하여, 구조물 해석을 위한 FEM 프로그램과 음향 해석을 위한 BEM 프로그램을 직접 개발하여 사용한다. 또한, 개발된 알고리즘의 확인을 위하여 판넬 구조물과 박스 형상의 음향계 연성문제에 적용하여 압력비의 반응을 기존 실험데이터 및 엄밀해 결과와 비교한다. 본 연구에서는 하나의 프로그램 개발로 정상상태 응답특성과 과도 응답특성 두 가지 모두 다 계산할수 있도록 하기 위하여 라플라스 변환을 이용한다. 라플라스 변환을 이용하지 않으면 정상상태 응답 및 과도응답을 계산하기 위하여 각각 별도의 프로그램 개발이 필요하다. 하지만 라플라스 변환을 이용하면 라플라스 영역에서 정상상태 응답을 바로 구할수 있을 뿐만 아니라 과도응답 특성도 역 라플라스 변환(inverse laplace transform)에 의하여 시간 영역에서 쉽게 구할수 있다. 따라서, 두가지 응답을 다 계산할수 있는 프로그램을 개발하기 위하여 라플라스 변환을 구조물의 운동방정식과 음향계의 파동방정식에 각각 적용하여 연성을 시킨다. 하지만 본 논문에서는 라플라스 변환을 이용하지만 정상상태 응답특성만을 구하는 과정을 보여주는데 주안점을 둔다.

2. 구조물에 대한 유한요소법의 공식전개

일반적인 구조물에 대한 운동방정식은 다음과 같

이 주어진다.

$$[M]\{\ddot{a}\}+[C]\{\dot{a}\}+[K]\{a\}=\{q\} \quad (1)$$

식 (1)은 시간에 대한 함수이므로 시간변수를 없애기 위하여 라플라스 변환을 적용하면,

$$[M][s^2\{\bar{a}\}-s\{a\}_0-\{\dot{a}\}_0]+[C][s\{\bar{a}\}-\{\dot{a}\}_0]+[K]\{\bar{a}\}=\{\bar{q}\} \quad (2)$$

여기서,

- s : 라플라스 변환변수
- $\{\bar{q}\}$: 가진력의 라플라스 변환형태
- $\{\bar{a}\}$: 변위의 라플라스 변환형태
- $\{a\}_0$: 초기 변위값
- $\{\dot{a}\}_0$: 초기 속도값

식 (2)에서 초기변위와 초기속도가 없다면 식 (2)는 다음과 같이 정리되어진다.

$$[s^2[M]+s[C]+[K]]\{\bar{a}\}=\{\bar{q}\} \quad (3)$$

분산행렬(distribution matrix) $[N]$ 을 이용하여 식 (3)의 $\{\bar{q}\}$ 를 유한요소의 각 절점마다의 실제적인 힘, $\{\bar{p}\}$,으로 표시할 수 있으므로 이를 나타내면,

$$\{\bar{q}\}=\iint_s [N]^T\{\bar{p}\}dA \quad (4)$$

식 (4)를 식 (3)에 대입한 후, 식 (3)을 간략하게 재정리하면,

$$A_s\bar{a}=N^T\bar{p} \quad (5)$$

여기서,

$$A_s=\{s^2[M]+s[C]+[K]\} \quad (6)$$

구조물과 음향계의 접합부에서 유한요소 모델과 경계요소 모델을 결합하기 위하여 양립(compatibility)과 평형(equilibrium) 조건이 만족되어야 한다. 특히, 유한요소 행렬들은 경계요소 영역에서 경계요소 행렬들과 유사한 형태로 바뀌어져야 한다.

그러므로 접합경계면을 고려하면 유한요소 행렬을 나타내는 식 (5)는 다음과 같이 나타내어 질 수 있다.

$$[A_s \ A_{sj}]\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{a}_j \end{bmatrix}=[N^T \ N^T_j]\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p}_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

\bar{a}_j, \bar{p}_j : 접합경계면에서의 변위와 압력의 라플라스 변환형태

A_{sj}, N_j : \bar{a}_j 와 \bar{p}_j 에 상응하는 행렬 A_s 와 N

여기서 이용되는 구조물과 음향계의 연성문제에 있어서 이용되어지는 구조물은 음향계와 완전한 접촉을 이루는 판이나 셸(shell)과 같은 종류이다. 결론적으로, 변위를 나타내는 \bar{a}, \bar{a}_j 는 같은 벡터를 의미하므로 식 (7)은 다음과 같이 줄여서 표시될 수 있다.

$$[A_s][\bar{a}]=[N^T \ N^T_j]\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p}_j \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. 음향계에 대한 경계요소법의 공식전개

공간상에서의 3-D 스칼라(scalar) 파동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla^2 p(\vec{x}, t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial t^2}=0 \quad (9)$$

여기서도 마찬가지로 시간변수를 없애기 위하여 라플라스변환을 적용하면,

$$\nabla^2 \bar{p}(\vec{x}, s)-\frac{s^2}{c^2}\bar{p}(\vec{x}, s)=0 \quad (10)$$

식 (10)에 그린정리(Green's theorem)을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C\bar{p}(\vec{y}, s)+\int_r \bar{p}(\vec{x}, s)\frac{\partial}{\partial n}\bar{g}(\vec{x}, \vec{y}, s)d\Gamma(\vec{x}) \\ =\int_r (\bar{g}(\vec{x}, \vec{y}, s)\frac{\partial}{\partial n}\bar{p}(\vec{x}, s)) \quad (11)$$

여기서, $\bar{g}(\vec{x}, \vec{y}, s)$ =라플라스 영역에서의 파동방정식에 대한 기초해(fundamental solution)를 나타내고 부드러운 경계면에 대하여 $C=1/2$ 의 값을 사용한다.

식 (11)에서 주어진 영역안에 있는 점, y ,를 경계면에 있는 점, y_0 ,로 옮기면,

$$\frac{1}{2}\bar{p}(\vec{y}_0, s)+\int_r \{\bar{p}(\vec{x}, s)\frac{\partial}{\partial n}\bar{g}(\vec{x}, \vec{y}_0, s)\}d\Gamma(\vec{x}) \\ =\int_r \bar{g}(\vec{x}, \vec{y}_0, s)\frac{\partial}{\partial n}\bar{p}(\vec{x}, s)d\Gamma(\vec{x}) \quad (12)$$

식 (12)로부터 주어진 계에 대하여 n 개의 요소를 이용하여 경계면을 이산화시킬 수 있다. 이와 같은 경계면의 이산화는 임의의 경계에 대한 음압

을 예측할 수 있는 파동방정식의 이산화를 유도할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{p}^n + \sum_{k=1}^n \bar{p}^k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \bar{g}(\vec{x}, \vec{y}_{n,s})}{\partial n} d\Gamma_k(\vec{x}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{p}^k}{\partial n} \int_{\Gamma_k} \bar{g}(\vec{x}, \vec{y}_{n,s}) d\Gamma_k(\vec{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 간단히 표시하기 위하여 다음과 같은 표현을 도입할 수 있다.

$$\mathbf{H}^{kn} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \bar{g}(\vec{x}, \vec{y}_{n,s})}{\partial n} d\Gamma_k(\vec{x}) & n=k \\ \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \bar{g}(\vec{x}, \vec{y}_{n,s})}{\partial n} d\Gamma_k(\vec{x}) & n \neq k \end{cases} \quad (14)$$

그리고,

$$\mathbf{G}^{kn} = \int_{\Gamma_k} \bar{g}(\vec{x}, \vec{y}_{n,s}) d\Gamma_k(\vec{x}) \quad (15)$$

식 (14)와 식 (15)를 식 (13)에 대입하여 정리하면,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{H}^{kn} \bar{p}^k = \sum_{k=1}^n \mathbf{G}^{kn} \frac{\partial \bar{p}^k}{\partial n} \quad (16)$$

식 (16)을 줄여서 다시 쓰면,

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{p}}_n \quad (17)$$

여기서, 행렬 \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 는 식 (14)와 식 (15)의 계산에 의해 구해진다. 또한 $\bar{\mathbf{p}}$ 와 $\bar{\mathbf{p}}_n$ 는 \bar{p}^k 와 $\frac{\partial \bar{p}^k}{\partial n}$ 을 의미한다. $\bar{\mathbf{p}}_n$ 은 음향계내에서 법선방향으로의 압력분포를 나타내므로, 음향계내의 변위, $\bar{\mathbf{u}}_a$, 를 이용하여 $\bar{\mathbf{p}}_n$ 을 표시할 수 있다. 즉,

$$\bar{\mathbf{p}}_n = -\rho_0 s^2 \bar{\mathbf{u}}_a \quad (18)$$

여기서, ρ_0 는 공기밀도를 나타낸다.

그러므로, 식 (18)을 이용하여 식 (17)을 다시 쓰면,

$$-\rho_0 s^2 \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}_a = \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} \quad (19)$$

식 (19)의 행렬 방정식을 풀면, 음향경계면에서 알고자 하는 압력값이나 변위값을 구할 수가 있다. 하지만 이 방정식을 풀기 위하여 초기 경계조건값들이 주어져야 하므로 경계면에는 알고 있는 경계조건과 계산되어야 하는 경계조건이 공존하게 된다. 그러므로 식 (19)의 행렬 방정식에서 알고 있는 경계조건을 방정식의 우변에 모으고 계산되어야 하는 경계조건을 좌변에 모아서 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} & [-\mathbf{H}_u - \rho_0 s^2 \mathbf{G}_u] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_u \\ \bar{\mathbf{u}}_{au} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{H}_k - \rho_0 s^2 \mathbf{G}_k] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_k \\ \bar{\mathbf{u}}_{ak} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$\bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{u}}_{ak}$: 경계면에서 알고 있는 압력과 변위
 $\mathbf{H}_k, \mathbf{G}_k$: 경계면에서 알고 있는 \mathbf{p}_k 와 \mathbf{q}_k 에 해당되는 \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 의 열 벡터

$\bar{\mathbf{p}}_u, \bar{\mathbf{u}}_{au}$: 경계면에서 계산되어야 하는 압력과 변위

$\mathbf{H}_u, \mathbf{G}_u$: 경계면에서 계산되어야 하는 $\bar{\mathbf{p}}_u$ 와 $\bar{\mathbf{u}}_{au}$ 에 해당되는 \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 의 열 벡터

식 (20)으로부터 다음과 같은 표현법을 도입한 후

$$[\hat{\mathbf{G}}] = -\rho_0 s^2 [\mathbf{G}] \quad (21)$$

식 (20)을 몇 개의 다른 경계조건으로 분류할 수 있다. 즉, 임피던스 경계조건, 음향 경계조건, 접촉부 경계조건 등을 세분하여 분류하면 복잡한 경계조건을 해결하는 데 도움이 된다.

식 (21)을 식 (20)에 대입한 후 분류된 경계조건을 적용하면,

$$\begin{aligned} & [-[\mathbf{H}_u]_I [\hat{\mathbf{G}}_u]_I - [\mathbf{H}_u]_B [\hat{\mathbf{G}}_u]_B - [\mathbf{H}_u]_Z [\hat{\mathbf{G}}_u]_Z] \\ & \times \begin{bmatrix} \{\bar{\mathbf{p}}_u\}_I \\ \{\bar{\mathbf{u}}_{au}\}_I \\ \{\bar{\mathbf{p}}_u\}_B \\ \{\bar{\mathbf{u}}_{au}\}_B \\ \{\bar{\mathbf{p}}_u\}_Z \\ \{\bar{\mathbf{u}}_{au}\}_Z \end{bmatrix} = [\mathbf{H}_k - \hat{\mathbf{G}}_k] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_k \\ \bar{\mathbf{u}}_{ak} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,

$[\mathbf{H}_u]_I, [\hat{\mathbf{G}}_u]_I$: 접촉 경계면에서 계산되어야 하는 $\{\bar{\mathbf{p}}_u\}_I$ 와 $\{\bar{\mathbf{u}}_{au}\}_I$ 에 해당하는 열벡터 $[\mathbf{H}]$ 와 $[\hat{\mathbf{G}}]$ 로 이루어진 행렬

$[\mathbf{H}_u]_B, [\hat{\mathbf{G}}_u]_B$: 음향 경계면에서 계산되어야 하는 $\{\bar{\mathbf{p}}_u\}_B$ 와 $\{\bar{\mathbf{u}}_{au}\}_B$ 에 해당하는 열벡터 $[\mathbf{H}]$ 와 $[\hat{\mathbf{G}}]$ 로 이루어진 행렬

$[\mathbf{H}_u]_Z, [\hat{\mathbf{G}}_u]_Z$: 임피던스 경계면에서 계산되어야 하는 $\{\bar{\mathbf{p}}_u\}_Z$ 와 $\{\bar{\mathbf{u}}_{au}\}_Z$ 에 해당하는 열벡터 $[\mathbf{H}]$ 와 $[\hat{\mathbf{G}}]$ 로 이루어진 행렬

4. 연성조건 및 행렬방정식의 연성

구조물과 음향계의 접촉부에서 경계조건들은 양립(compatibility)과 평형(equilibrium) 연성조건을 만족하여야 한다. 여기서, 먼저 양립(compatibility)의 조건을 먼저 생각하여 보자. 접촉 경계면에서 보면 구조물의 변위와 음향계의 변위는 일치한다. 즉,

$$u^a \cdot \mathbf{n}^a = u \cdot \mathbf{n} \quad (23)$$

여기서, \mathbf{n}^a 는 음향계에서의 바깥방향으로의 법선 벡터를 나타내고, \mathbf{n} 은 구조물의 바깥방향으로의 법선벡터를 나타낸다. 그리고 또한 u^a 와 u 는 음향계와 구조물의 각각의 변위영역을 나타낸다.

식 (23)에 라플라스 변환을 하면,

$$\bar{u}^a \cdot \mathbf{n}^a = \bar{u} \cdot \mathbf{n} \quad (24)$$

경계면에서, 변위와 압력의 관계는 다음과 같이 주어진다. 즉,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u^a}{\partial t^2} \quad (25)$$

식 (25)를 라플라스 영역으로 옮기면,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\rho_0 s^2 \bar{u}^a \quad (26)$$

경계면에서 단위법선 방향으로 방향도함수(directional derivative)를 적용하면,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = -\rho_0 s^2 \bar{u}^a \cdot \mathbf{n}^a \quad (27)$$

식 (24)를 식 (27)에 대입하면 접촉면에서 라플라스 변환된 양립(compatibility) 조건을 얻을 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = -\rho_0 s^2 \bar{u} \cdot \mathbf{n} \quad (28)$$

구조물의 일반적인 변위량은 형상함수 $[N]$ 을 이용하여 절점에서의 변위량으로 표현할 수 있다. 그러므로, 절점 i 에서의 변위량은

$$u_i = [N_i] \{a_i\} \quad (29)$$

구조물과 음향계의 접촉부에서도 마찬가지로 변위량에 대해서 식 (29)와 같은 방법으로 표현할 수 있다. 즉,

$$\bar{u} = [N] \{\bar{a}\} \quad (30)$$

여기서, 식 (28)과 식 (30)을 결합시키면 구조-음향 접촉면에서 양립(compatibility) 조건을 만족시키는 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = -\rho_0 s^2 [N] \{\bar{a}\} \cdot \mathbf{n} \quad (31)$$

다음으로 접촉부에서의 평형(equilibrium) 조건에 대해서 고려하여 보자.

접촉부에서 구조물의 진동에 의한 법선방향의 힘, q_n 은 접촉부에서의 음압의 총합, p^a 과 크기가 같고 방향이 반대이다. 즉,

$$q_n = -p^a \quad (32)$$

일반적으로, 접촉부에서의 구조물의 법선력은 형상함수 $[N]$ 과 표면함수 $\{T\}$ 를 이용하여 아래의 식과 같이 표현된다.

$$q_n = \iint_s [N]^T \{T\} \cdot \mathbf{n} ds \quad (33)$$

여기서, $\{T\}$ 대신에 경계면에서의 가진압력, $\{p_i\}$, 으로 대치하고, 식 (32)와 식 (33)을 결합하면, 접촉부에서의 평형(equilibrium)조건을 얻을 수 있다. 즉,

$$p^a = -\iint_s [N]^T \{p_i\} \cdot \mathbf{n} ds \quad (34)$$

라플라스 변환영역에서 식 (34)는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{p}^a = -\iint_s [N]^T \{\bar{p}_i\} \cdot \mathbf{n} ds \quad (35)$$

앞에서 구한 연성조건들은 행렬방정식에 적용하여 행렬방정식의 연성조건들을 구할 수 있다. 평형(equilibrium)과 양립(compatibility) 조건을 고려하여 식 (22)의 음향계에 대한 행렬방정식을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} & [[\hat{G}_N] - [H_u]_I - [H_u]_B [\hat{G}_u]_B - [\hat{H}_C]_Z] \\ & \times \begin{bmatrix} \{\bar{a}\}_I \\ \{\bar{p}_u\}_I \\ \{\bar{p}_u\}_B \\ \{\bar{u}_{au}\}_B \\ \{\bar{p}_u\}_Z \end{bmatrix} = [H_k \hat{G}_k] \begin{bmatrix} \bar{p}_k \\ \bar{u}_{ak} \end{bmatrix} \quad (36) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} [\hat{G}_N] &= [\hat{G}_u]_I [N] \text{과} [\hat{H}_C]_Z \\ &= -[H_u]_Z + [\hat{G}_u]_Z [Z_a] \quad (37) \end{aligned}$$

접촉부에서 구조물에 대한 행렬방정식 또한 연성을 위하여 다시 쓰면,

$$[A_s \ N^T_l] \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{p}_l \end{bmatrix} = [N^T \ 0] \begin{bmatrix} \bar{p} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

여기서, 식 (36)과 식 (38)을 합치면 구조-유항 연성해석을 위한 FEM과 BEM의 연성된 최종 행렬방정식을 얻을 수있다.

$$\begin{bmatrix} A_s & -N^T_l & 0 & 0 & 0 \\ [\hat{G}_N] & -[H_u]_l & -[H_u]_B & [\hat{G}_u]_B & -[\hat{H}_G]_Z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{\bar{a}\}_l \\ \{\bar{p}_u\}_l \\ \{\bar{p}_u\}_B \\ \{\bar{u}_{uu}\}_B \\ \{\bar{p}_u\}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^T & 0 & 0 \\ 0 & H_k & \hat{G}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p}_h \\ \bar{u}_{ah} \end{bmatrix} \quad (39)$$

5. 수치예제

지금까지 FEM과 BEM의 연성하는 방법이 소개 되었으며 개발된 알고리즘과 코드가 올바른가를 보여주기 위하여 한 모델이 선택되었다. 선택된 모델은 Fig. 1과 같이 박스형태를 하고 있고 한쪽면은 단순지지 경계조건을 가지는 구리판으로 이루어져 있다. 박스의 크기는 0.2×0.2×0.2m이고 구리판의 두께는 0.91×10⁻⁴m이다.

유한요소법의 이산화를 위하여 사용된 요소는 삼각형 셀요소이다. 셀요소이기 때문에 각 절점마다 6자유도로 이루어져 있어서 한 요소에 대하여 18개

의 자유도를 갖는다. 경계요소법 이산화를 위하여도 유한요소법과의 연성을 고려하여 삼각형 요소를 선택하였다. 일반적으로 많이 사용되는 경계요소법 요소들로는 상수요소(constant element), 1차 요소(linear element), 2차 요소(quadratic element) 등이 있다. 이 중 이번 연구에 사용된 요소는 상수 요소이다. 이는 유한요소법과의 연성시 연성의 편의를 위해서 이다. 즉, 해석하고자 하는 구조물의 기하학적 경계면에 존재하는 절점에서 FEM과의 연성시 BEM의 1차 요소 또는 2차 요소를 사용하면 복잡한 공식 전개를 수반할 뿐만 아니라 상수 요소의 사용으로도 충분한 정확도를 보장하면서 프로그램 개발이 용이하기 때문이다. 여기서, 이용된 FEM과 BEM 프로그램은 저자에 의하여 직접 개발된 프로그램을 이용하였다. FEM 프로그램은 판넬 뿐만 아니라 쉘 구조물까지 다이나믹 해석이 가능한 다목적용 소프트웨어이다.

상수요소를 이용하여 만들어진 BEM 프로그램은 adaptive integration scheme을 채택하였기 때문에 해석하고자 유항 모델을 이산화할시 적은 수의 경계 요소를 이용하여도 계산오차가 적도록 하였다.

경계요소법에 사용된 상수 요소는 요소의 중간에 요소를 대표하는 정보들이 존재한다고 보기 때문에 구조-유항 접촉부에서 1개의 경계요소에 대하여 3개의 유한요소가 필요되어 진다. Fig. 2는 Fig. 1에 나타난 모델에 대하여 경계요소와 유한요소를 이용하여 이산화한 것을 보여 주는 것으로 접촉부에서 1개의 경계요소에 대하여 3개의 유한요소가 필요함

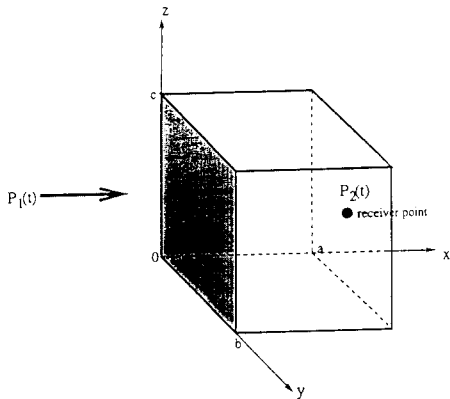


Fig. 1 Rectangular box with one end a pinned-pinned plate showing external plane wave excitation(P₁(t)) and an internal receiver point(P₂(t))

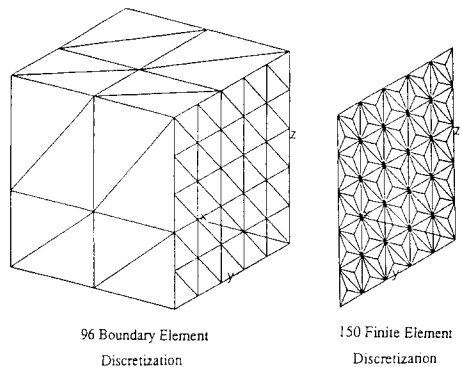


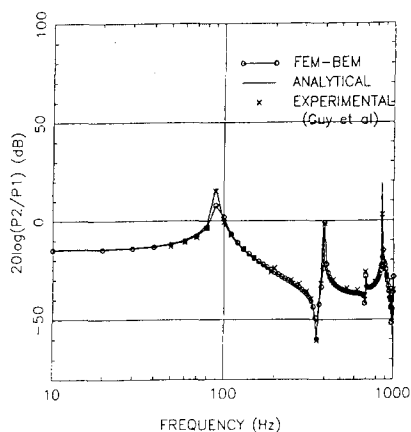
Fig. 2 Boundary element discretization for the rectangular box cavity and finite element discretization for the pinned-pinned plate
96 Boundary element discretization
150 Finite element discretization

Table 1 A comparison of the natural frequencies for different modes of the pinned-pinned plate studied

Mode	FEM	Analytical
(1, 1)	77 Hz	78 Hz
(1, 2), (2, 1)	193 Hz	195 Hz
(2, 2)	302 Hz	312 Hz
(1, 3), (3, 1)	386 Hz	390 Hz
(2, 3), (3, 2)	488 Hz	507 Hz
(3, 3)	659 Hz	702 Hz

Table 2 Change of natural frequencies causing by coupling for symmetric modes of the pinned-pinned plate studied

Mode	Before coupling	After coupling
(1, 1)	77 Hz	90 Hz
(1, 3), (3, 1)	386 Hz	400 Hz
(3, 3)	659 Hz	680 Hz

**Fig. 3** Comparison of numerical, analytical, and experimental predictions of $20\log(P_2/P_1)$ for the rectangular box with a pinned-pinned end plate(0.2×0.2×0.2 meter box)

을 보여주고 있다.

박스내의 음향계는 96개의 삼각형의 BEM요소에 의하여 이산화 되었고, 이 중 50개의 BEM요소는 구조물과 접촉 경계면에서의 요소이다. 단순 지지 경계조건을 가지는 구리판의 자유진동 모드에 대하여 개발된 FEM 코드의 결과와 엄밀해가 Table 1에 비교되어 있다. Table 1에서 보듯이 서로의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

구리판의 바깥에서 10 Hz에서 1 kHz까지 주파수를 변환시키면서 외압을 가했을 때에 이에 따른 정상상태 응답특성을 Fig. 3에 묘사하였다. FEM과 BEM의 연성코드를 이용하여 구한 응답특성과 Guy 등⁽⁶⁾에 의하여 계산되어지고 실험되어진 결과

들과 특성을 비교하였을 때 서로의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 3을 분석하여 보면 구조물의 진동모드중 판넬 대칭모드에 해당하는 (1, 1), (1, 3), (3, 3)모우드인 90 Hz, 400 Hz, 680 Hz에서만 공진을 일으키고 있다. 즉, 구조물의 대칭모드만 음향계에 영향을 미치었고 비대칭모드에서는 음압의 변화가 없음을 나타낸다. 그러므로 여기서, 우리가 하나 알 수 있는 것은 구조-음향 연성해석의 필요성이다. 구조물의 진동모드만 가지고는 어떤 진동모드가 얼마만큼 소음에 영향을 미치는 지는 알기가 힘들다. 물론 판넬의 센서티비티(sensitivity)해석을 통하여 판넬의 소음에 대한 기여도를 알 수는 있으나 결국 밀폐된 공간에서의 소음의 강도는 그 공간내에서의 압력의 변화를 나타내기 때문에 구조-음향 연성해석을 통하여 연성의 효과를 알 수 있다.

또한 연성효과에 의하여 판넬의 고유 주파수의 이동이 있음을 Table 2에 나타내었다. 박스 내의 음압의 변화는 공기의 탄성계수의 증가를 가져온다. 따라서 증가된 공기의 탄성계수가 판넬의 탄성계수에 영향을 미쳐서 판넬의 고유진동수의 증가가 있음을 알 수 있다. 이외에 구조물의 진동에 의하지 않고 박스 내부의 공진에 의한 음향차체 모드도 860 Hz에서 나타나고 있음을 Fig. 3을 통하여 알 수 있다.

6. 결 론

유한요소법과 경계요소법을 이용한 구조-음향계의 완전 연성해석을 위한 알고리즘이 개발되었다. 개발된 알고리즘은 정상상태 응답을 구하는 데 적용되었으며 이를 위하여 한쪽 면만 구조물로 이루어진 박스 모양의 음향계가 선택되어졌다. 이 모델

에 대하여 엄밀해 및 실험데이터를 이용하여 예측한 결과와 비교하였을 때 좋은 일치율을 보여주었다.

참고문헌

- (1) Arlett, P. L. and Zienkiewicz, O. C., 1968, "Application of Finite Element to the Solution of Helmholtz's Equation," *Proc. IEE*, Vol. 115, No. 12.
- (2) Ciskowski, R. D. and Royster, L. H., 1988, "Boundary Element Solution to Predict Steady-State Response of a 3-D Fluid-Structure System," in *Proc. NOISE-CON 88*(Bernhard, R. J. and Bolton, J. S., Eds.), Noise Control Foundation, New York, pp. 579~584.
- (3) Ciskowski, R. D. and Royster, L. H., 1988, "Boundary Element Solution to Predict Transient Response of a 3-D Coupled Fluid Cavity-Elastic Structure System," in *Boundary Element Methods in Applied Mechanics*(Tanaka, M. and Cruse, T. A., Eds.), Pergamon Press, New York, pp. 545~554.
- (4) Craggs, A., 1969, Ph.D Thesis, University of Southampton.
- (5) Gladwell, G. M. L. and Zimmermann, G., 1966, "On Energy and Complementary Energy Formulation of Acoustic and Structural Vibration Problems," *J. Sound and Vib.*, Vol. 3, pp. 233~241.
- (6) Guy, R. W. and Bhattacharya, M. C., 1973, "The Transmission of Sound Through a Cavity-Backed Finite Plate," *J. Sound and Vib.*, Vol. 27, No. 2, pp. 207~223.
- (7) Lyon, R. H., 1963, "Noise Reduction of Rectangular Enclosure with One Flexible Wall," *J. Acous. Soc. Am.* Vol. 35, pp. 1791~1797.
- (8) Lee, Chang-Myung., 1992, *Application of Finite Element and Boundary Element Methods to a Coupled Shell-Type Acoustic-Cavity System*, Ph. D. Thesis, North Carolina State University, Raleigh.
- (9) Lee, C. M., Royster, L. H. and Ciskowski, R. D., 1993, "Coupling of FEM and BEM for the Analysis of a Structure-Acoustic-Cavity System," *Boundary Element XV*, Vol. 1, pp. 305~320.
- (10) Lee, C. M., Royster, L. H. and Ciskowski, R. D., 1993, "Application of a Coupled BEM-FEM Technique to Study Earmuff Attenuation," *BIOMED 93*, pp. 31~40.
- (11) Mourad, K. M., Ciskowski, R. D. and Royster, L. H., 1987, "An on Going Study of the Use of the Boundary Element Method to Solve Some of the Commonly Encountered Industrial Noise and Vibration Control Problems," *J. Acoust. Soc. Am., Suppl. 1*, 82 S64.
- (12) Mourad, K. M., Royster, L. H. and Ciskowski, R. D., 1989, "Using the Boundary Element Method to Investigate Internal Earmuff-Earcanal Resonances," in *Advances in Boundary Elements*, Vol. 2(Brebbia, C. A. and Connor, J. J., Eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 297~308.
- (13) Pretlove, A. J., 1969, "The Response of Large Windows to Sonic Bangs," *J. Sound and Vib.*, Vol. 9, p. 497.
- (14) Pretlove, A. J. and Craggs, A., 1970, "A Simple Approach to Coupled Panel-Cavity Vibration," *J. Sound and Vib.*, Vol. 11, No. 2, pp. 207~215.
- (15) Suzuki, S., Maruyama, S. and Ido, H., 1989, "Boundary Element Analysis of Cavity Noise Problems with Complicated Boundary Conditions," *J. Sound and Vib.*, Vol. 130, No. 1, pp. 79~91.
- (16) Tanaka, M. and Masuda, Y., 1988, "Boundary Element Analysis of Some Structural-Acoustic Coupling Problems," in *Proc. First Japan-China Syn. on Boundary Element Methods*(Tanaka, M. and Du, Q.-H., Eds.), Pergamon Press, Oxford.
- (17) Xie, K.-J., Ciskowski, R. D. and Royster, L. H., 1988, "An Investigation of Wave Propagation in Viscoelastic Media Modeled By Fractional Derivative Using the Boundary Element Method," in *Boundary Element Methods in Applied Mechanics*(Tanaka, M. and Cruse, T. A., Eds.), Pergamon Press, New York, pp. 523~31.
- (18) Xie, K.-J., Royster, L. H. and Ciskowski, R.

D., 1989, "A BEM Formulation for Fractional
Calculus Modeled Viscoelastodynamic Struc-
tures," in *Advances in Boundary Elements*, Vol.

3(Brebbia, C. A. and Connor, J. J., Eds.),
Computational Mechanics Publications, South-
ampton, pp. 55~64.